







Lehrbuch

der

Reinen und angewandten Mechanik

für

Maschinen- und Bautechniker

Elementar in leichtfasslicher Weise dargestellt mit Rücksicht auf den in Maschinenbau- u. Bauschulen fortschreitenden Unterricht in der Mathematik und mit zahlreichen Beispielen aus der Praxis versehen

von

KARL HECHT

Ingenieur, Lehrer und vereid. Geometer

Nicht das Wissen, das Können macht den Mann!

Band III:

Die graphischen Methoden

Mit 225 Beispielen, 598 Figuren und einem Anhang

Dresden 1903

Verlag von Gerhard Kühtmann



Lehrbuch
der
Reinen und angewandten Mechanik
für
Maschinen- und Bautechniker

Elementar in leichtfasslicher Weise dargestellt mit Rücksicht auf den in Maschinenbau- u. Bauschulen fortschreitenden Unterricht in der Mathematik und mit zahlreichen Beispielen aus der Praxis versehen

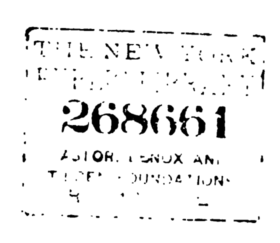
von

KARL HECHT
Ingenieur, Lehrer und vereid. Geometer

Nicht das Wissen, das Können macht den Mann!

Band III:
Die graphischen Methoden
Mit 225 Beispielen, 598 Figuren und einem Anhang

Dresden 1903
Verlag von Gerhard Kühtmann



Druck von Grimme & Trömel in Leipzig.

Vorwort.

Der vorliegende III. Band der reinen und angewandten Mechanik enthält die Anwendung der elementaren graphischen Methoden auf vorzugsweise der Praxis entnommene Beispiele. Der an und für sich schon wesentlich überschrittene Raum gestattete nicht, den Stoff noch weiter auszudehnen und sei für das Studium speziellerer Teile der Graphischen Statik auf die Werke und Abhandlungen von Mohr, Müller-Breslau, Ramisch, Winkler, Weyrauch u. s. f. verwiesen.

Die Aufstellung der vielseitigen Beispiele, ihre Berechnung und Konstruktion und besonders die wohlgelungene Wiedergabe der Zeichnungen haben sehr viel Zeit beansprucht, und hat es besonders der Verlagsbuchhandlung viel Mühe verursacht, die letzteren so übersichtlich wie möglich dem Texte anzupassen, um eine Teilung in Text und Tafeln zu vermeiden. Für die seitens der Verlagsbuchhandlung veranlasste Revision des Textes und besonders der Zahlenbeispiele ist der Verfasser zu besonderem Dank verpflichtet; ebenso denjenigen Herren, welche ihn mit der Ausführung von Konstruktionen, Berechnungen von Beispielen und bei Durchsicht der Korrekturen freundlichst unterstützt haben.

Der Verfasser hofft mit dem Erscheinen des III. Bandes vielen Wünschen, insbesondere denen seiner Schüler entgegen gekommen zu sein.

Neustadt in Mecklenburg, Juni 1902.

Karl Hecht.

Inhalt.

Anhang.

I. Erfahrungszahlen und Belastungen.

II. Die Normalprofile.

III. Tabelle

Die graphischen Methoden.

Einleitung.

Der Gedanke, etwas durch Zeichnung zu erklären, darzustellen, um dadurch einen vorteilhaften Einblick in irgend ein Problem zu gewinnen, um die Übersicht zu erhöhen, ist ebenso alt, wie der Versuch eine Behauptung mathematisch zu beweisen oder durch Zahlen zu begründen.

Der Weg, den ein Körper, welcher sich mit gleichförmiger oder ungleichförmiger Geschwindigkeit bewegt, innerhalb einer gewissen Zeit zurücklegt, kann durch eine Fläche dargestellt werden, welche so viele Flächeneinheiten enthält, als die zurückgelegte Strecke Längeneinheiten zählt. Mit Hülfe dieser Darstellung werden die Gesetze der gleichförmigen wie die der ungleichförmigen Bewegung, von denen namentlich letztere dem Anfänger nicht geringe Schwierigkeiten zu machen pflegen, anschaulich und leichter zum Verständnis gebracht. In gleicher Weise lässt sich eine mechanische Arbeit (welche aus dem Produkt, Kraft mal Weg besteht) durch eine Fläche darstellen, u. s. w.

Die Anwendung der Geometrie auf die Aufgaben der Statik ist mit Hülfe der früher erläuterten Darstellung der Kräfte durch Strecken, welche den Grössen der Kräfte proportional sind und auf ihren Richtungslinien abgetragen werden, ermöglicht. Hieraus ergab sich das wichtige Gesetz des Kräfteparallelogramms, welches die Grundlage der graphischen Statik bildet, und als erste Anwendung der Geometrie auf die Statik angesehen werden kann.

Die Lösungen von Aufgaben über Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften pflegte man schon früher figürlich darzustellen, aber das Resultat ermittelte man doch vorzugsweise auf dem Wege der Rechnung, um von den unvermeidlichen kleinen Zeichenfehlern unabhängig zu sein. Erst in der neueren Zeit sind die graphischen Methoden weiter ausgebildet worden und sie geben für zahlreiche Aufgaben der Praxis die

Möglichkeit zu einer Lösung, welche den Vorzug der Einfachheit mit dem der grösseren Anschaulichkeit gegenüber der Rechnung verbindet.

Eine graphische Darstellung kann entweder als wirklicher Ersatz der Zahlenrechnung dienen, so dass diese ganz entbehrt werden kann, oder nur zur besseren Übersicht, Unterstützung oder zur Mithülfe der Rechnung.

Wir erinnern an die graphische Darstellung der Bewegung der Eisenbahnzüge, auf die wir bereits in der Bewegungslehre hinwiesen, ferner an die Darstellung der Momente und Vertikalkräfte. Dem praktischen Leben entnommen, stellt man zur bessern Übersicht unter anderen meteorologische Beobachtungen, z. B. gleiche Temperaturen, Barometerstände kartographisch, d. h. eingetragen in eine Landkarte dar, den Verlauf von Fiebern durch Kurven oder Linienzüge bei Krankheitsbeobachtungen. Wie oft führt der Techniker Rechnungen graphisch aus, oder überzeugt sich dadurch, dass die Rechnung richtig war, oder auch, weil ihm die Rechnung an und für sich Schwierigkeiten verursacht, sucht er graphisch schneller und anschaulicher zum Ziele zu gelangen. Lassen wir auf einen Körper gleichzeitig zwei Geschwindigkeiten von gewisser Grösse unter beliebigen Winkeln einwirken, so bewegt sich der Körper, wie uns bekannt, mit einer „resultierenden" Geschwindigkeit. Wir haben nicht nötig, diese letztere zu berechnen, sondern tragen die gegebenen Geschwindigkeiten in irgend einem Massstab auf, und „konstruieren" die Diagonale des Parallelogramms nach den Grundsätzen der Geometrie. Hier haben wir die ganze Rechnung thatsächlich gespart, wir haben sie ersetzt durch die Zeichnung, während wir im Vorhergehenden teilweise Rechnung oder Beobachtung voraussetzen mussten.

Die graphischen Methoden teilen wir ein in die graphische Mathematik und graphische Mechanik, berücksichtigen aber nur den elementaren Teil der Mathematik, das graphische Rechnen, die graphische Algebra oder die graphische Arithmetik, die Arithmographie.

Die Einteilung der graphischen Mechanik steht im Zusammenhange mit der der Mechanik in Statik und Dynamik. Die sämtlichen Gesetze der Mechanik erstreben, wie uns bekannt, im allgemeinen die Ermittelung von Kräften. Wirken Kräfte auf einen in relativer Ruhe sich befindenden Körper, welcher seinen Ort vor unseren Augen nicht ändert, sich also im Gleichgewicht befindet (Statik), so lässt sich die Ermittelung der Kräfte auf graphischem Wege am einfachsten darstellen; es ist dies dasjenige Kapitel, welches am meisten in den Anwendungen Eingang gefunden hat: die graphische Statik, Graphostatik. Ändert der

Körper vor unseren Augen durch eine Kraft getrieben (Dynamik = Kraft, Kraftwirkung) seinen Ort, so treten Kraftwirkungen auf, mit deren Ermittelung sich die Dynamik beschäftigt. Die graphische Darstellung derselben ist mit mehr Schwierigkeiten verbunden, nur einige dieser Probleme haben graphisch bearbeitet Eingang in die Praxis gefunden (u. a. die Diagramme). Die geometrische Darstellung der Getriebe umfasst noch ein besonderes Kapitel, die Getriebelehre oder Kinematik, auch dieses erfordert ein eingehendes Spezialstudium, welches uns vorläufig noch fern liegt.

Eine besondere Art graphische Darstellung von Zahlenreihen wollen wir nicht unerwähnt lassen, die Rechenknechte und Rechenschieber. Diese sollen das Rechnen nicht in obigem Sinne durch eine graphische oder sagen wir geometrische Auffassung ersetzen, sondern es werden hier gewisse Zahlenreihen durch Massstäbe vertreten, aus denen man entweder unmittelbar die Resultate entnehmen kann — als Massstäbe aufgetragene Wurzeln, Logarithmen, trig. Funktionen — die Rechenknechte*); oder unter Zugrundlegung der logarithm. Sätze werden Massstäbe konstruiert, auf welchen man durch gegenseitige Verschiebungen einige arithmetische Probleme ohne Zahlenrechnung unmittelbar ausführen kann durch direktes Ablesen — die Rechenschieber**).

Ehe wir zur Detailbetrachtung übergehen, wollen wir nicht unterlassen, darauf aufmerksam zu machen, dass der Wert, die Brauchbarkeit der Zeichnung wesentlich von der Genauigkeit der Ausführung derselben abhängig ist. Wollen wir eine Länge, eine Kraft, ein Moment, eine Arbeitsleistung darstellen, so ist dies in allen Fällen eine Zahl, welche in irgend einem Massstabe aufgetragen werden kann. Nicht allein dieser Massstab, sondern auch die grössere oder geringere Sorgfalt, mit der die Zeichnung ausgeführt wird, ist massgebend für das mehr- oder minderwertige Resultat. Der Zeichnende kann sich also an der Hand des von ihm angewandten Genauigkeitsgrades ein Urteil über den Wert seiner graphischen Darstellung selbst bilden.

---

*) U. a. Pressler's math. Brieftasche bei Wold. Türk, Dresden.

**) S. Hecht, Hand- u. Hülfsbuch f. Absteckung der Kurven, Anhang: die Rechenschieber; Kühtmann, Dresden.

I. Die graphische Mathematik, das graphische Rechnen.

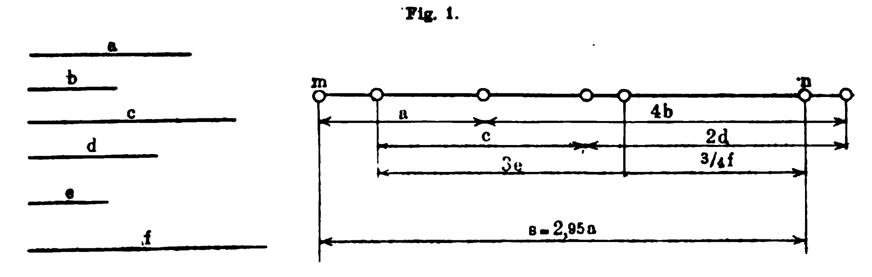
1. Summen und Differenzen.

Es sei die Aufgabe gestellt, die algebraische Summe

$$s = a + 4b - 2d - c + 3e + {}^3/_4 f$$

auf graphischem Wege darzustellen, wenn die Werte a, b, c, d, e, f als Längeneinheiten gegeben sind.

Fig. 1.



Die Auflösung dürfte die Fig. 1 hinreichend erklären. Man trägt die gegebenen Werte, welche irgend eine Bedeutung haben können, Kilogramm, Meter, Kubikmeter etc. in der angegebenen Folge aneinander, die positiven nach rechts, die negativen nach links, und erhält, wenn m der Anfangspunkt, durch mn = s das Resultat.

Die Reihenfolge der Summierung der einzelnen Glieder ist gleichgültig und kann auch in der folgenden äusseren Form vor sich gehen.

$$s = a + 2(2b - d) + 3(e + {}^1/_4 f) - c.$$

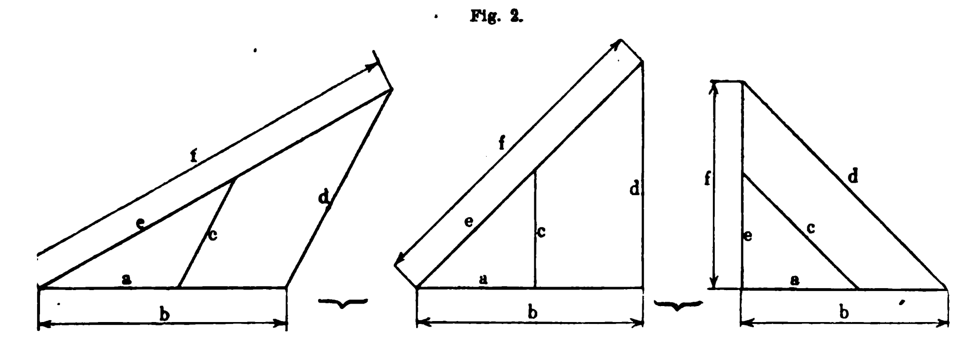
Würde beispielsweise a einer Einheit a^m, a^{kg} gleich sein, und werden die übrigen Werte b, c, d, e, f auf diese reduziert, so erhält man s = 2,95 a (s. Band I, S. 29, Fig. 13).

2. Produkte und Quotienten, Multiplikation und Division.

Die graphische Multiplikation und Division lässt sich am einfachsten

durch die Proportionallinien in ähnlichen Dreiecken erreichen, durch die vierte geometrische Proportionale.

Fig. 2.



Die in diesem Sinne in Fig. 2 gezeichneten Dreiecke enthalten die Proportionen:

$$a : b = c : d \text{ und } a : b = e : f,$$

welche die Gleichungen liefern:

$$\left.\begin{array}{l} ad = bc \text{ und} \\ af = be \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (1).$$

Denkt man sich nun eine der Linien des ersten Produktes einer Einheit gleich gemacht, z. B. $a = 1$, und betrachtet die andere des betreffenden Produktes als den zu suchenden Längenwert, so erhält man

$$\left.\begin{array}{l} d = \frac{bc}{a} = \frac{bc}{1} = bc \text{ und} \\ f = \frac{be}{a} = \frac{be}{1} = be \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (1a).$$

In derselben Weise folgt

$$b = \frac{ad}{c} = ad, \text{ für } c = 1 \text{ und}$$

$$e = \frac{af}{b} = af, \text{ für } b = 1 \text{ u. s. w.}$$

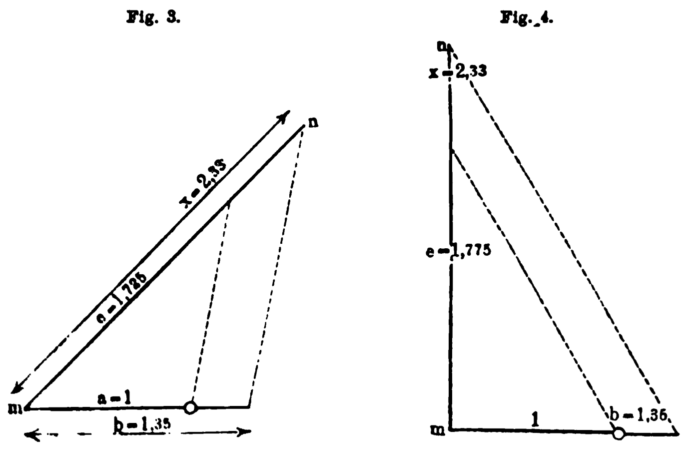
Man hat, wie die Fig. 3 bis 8 zugleich an einigen Zahlenbeispielen klar legen sollen, nur nötig, die fraglichen zu multiplicierenden Werte b, c bezw. b, e Gl. 1 a zu ähnlichen Dreiecken, wie in Fig. 2, mit einander zu kombinieren, die 4. geometrische Proportionale ist dann das endgültige Produkt.

Beispiele:

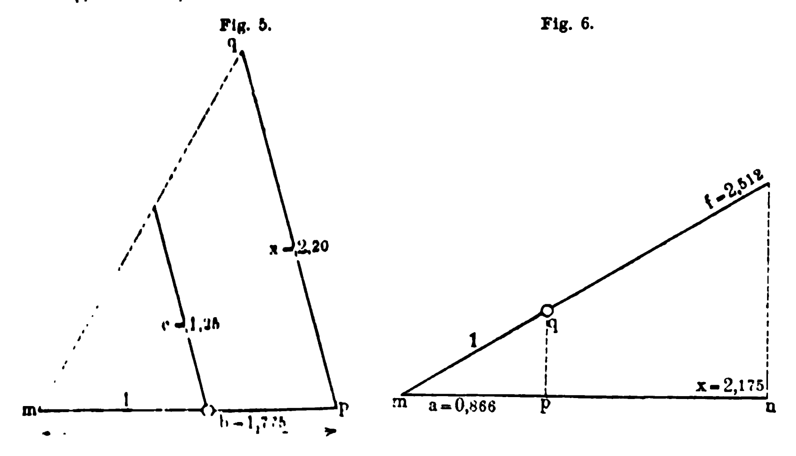
I. Es soll das Produkt $x = 1{,}35 \cdot 1{,}725$ graphisch ermittelt werden.

Setzt man b = 1,35, e = 1,725 und a = 1, so folgt nach Gl. 1 für f = x, als Unbekannte: 1 : b = e : x,

hieraus x = be = 1,35 · 1,725 = 2,33.



Die Fig. 3 und 4 erklären, mit den Figuren 2 verglichen, das Aneinandertragen der den Zahlen entsprechenden Linien wohl hinreichend. Man trägt an m die Einheit a und b = 1,35 an, ferner unter einem beliebigen Winkel oder auch senkrecht, wie in Fig. 4, e = 1,725, verbindet die Endpunkte von e und der Einheit, und zieht zu dieser Verbindungslinie durch den anderen Endpunkt von b eine Parallele, so schneidet diese die gesuchte Länge mn, das Produkt x = f = 2,33, mit derselben Einheit gemessen, ab.



II. In Fig. 5 ist das Produkt c · b = 1,25 · 1,775 graphisch bestimmt.

Die 4. Proportionale d = x in Gl. 1 ergiebt aus der Fig.:

$$1 : b = c : x \text{ und } x = b \cdot c.$$

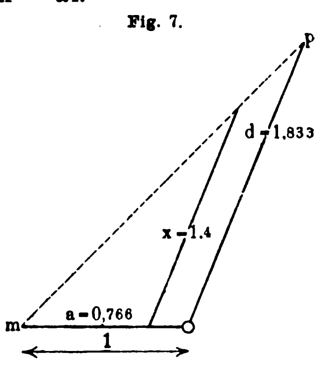
Der Winkel bei m richtet sich nach der gegebenen Länge c; x = $\overline{qp}$ liefert als Länge das Produkt b · c = 2,20.

III. Die Multiplikation der Zahlen 2,512 und 0,866 liefert die Fig. 6. Die Einheit e = 1 ist auf der Hypotenuse der ähnlichen rechtwinkeligen Dreiecke aufgetragen. Errichtet man im Endpunkte der Linie a = 0,866 eine Senkrechte $\overline{pq}$, und trägt von m aus an a einen Winkelschenkel f = 2,512 so an, dass mq = 1 wird, so schneidet eine Parallele zu $\overline{pq}$, welche also senkrecht auf der Verlängerung von mp steht, die Länge x = 2,175 ab. x ist das gesuchte Produkt, denn es ist

$$a : x = 1 : f, \text{ woraus } x = af.$$

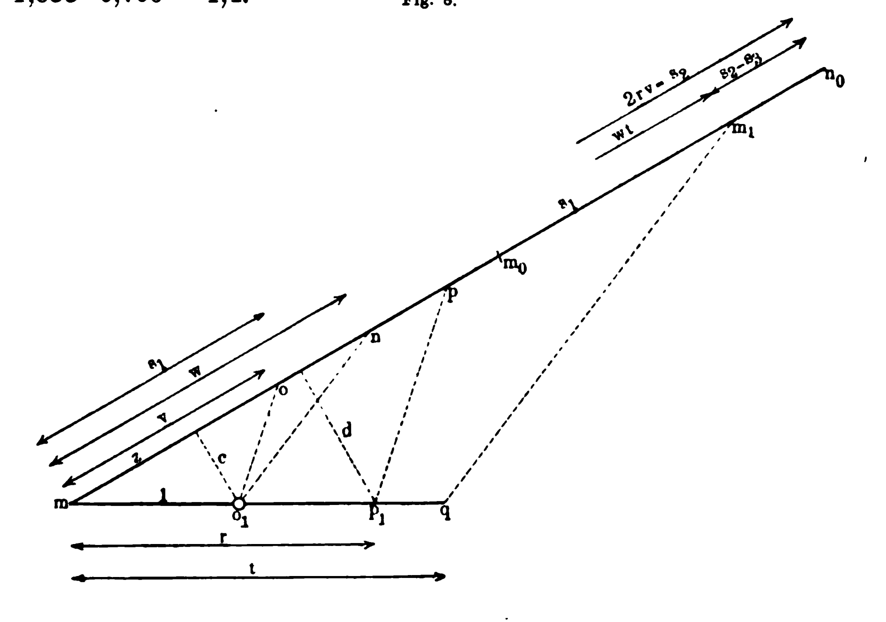
IV. Auch hier ist a < 1. Gegeben sind a = 0,766 und d = 1,833, b Gl. 1 ist die Einheit.

Fig. 7.



Man erhält (Fig. 7), a und 1 aufgetragen, d unter irgend einem passenden Winkel am Endpunkt der Einheit angesetzt, p mit m verbunden, und die Parallele x durch den Endpunkt der Linie a zu der Linie d gezogen, x = 1,4; denn es ist a : 1 = x : d, woraus x = ad = 1,833 · 0,766 = 1,4.

Fig. 8.



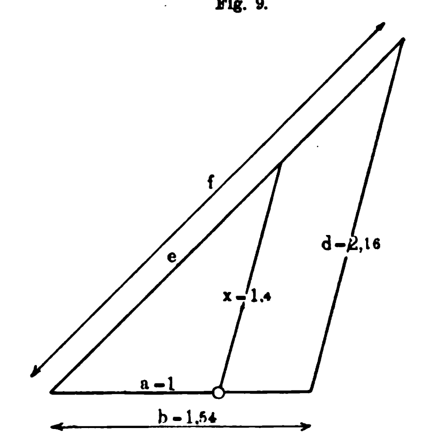
V. In Figur 8 ist eine Produktensumme graphisch dargestellt. Es ist

$$S = rz + 2rv - wt = s_1 + s_2 - s_3.$$

Man trägt eine Einheit $a = 1$ auf der Horizontalen $\overline{mq}$ auf, die gegebene z auf den von m ausgehenden Winkelschenkel, r auf die Verlängerung der Einheit. Die Endpunkte von 1 und z werden verbunden, die Parallele d zu c durch den Endpunkt von r schneidet das Produkt $s_1 = rz$ auf der Verlängerung von z ab, denn es ist $1 : z = r : s_1$ und sonach $s_1 = rz$.

Das zweite Produkt $s_2 = 2rv$ hat auch den Faktor r. Trägt man v nach $\overline{mo}$, verbindet o mit 0_1 und zieht die Parallele $\overline{pp_1}$, so wird $\overline{mp} = r \cdot v$ und $\overline{mn_0} = 2 \cdot r \cdot v = s_2$.

Fig. 9.



Verbindet man endlich den Endpunkt von w mit o_1 der Einheit und zieht $\overline{qm_1}$ parallel $\overline{o_1 n}$, so ist $\overline{mm_1} = w \cdot t = s_3$, weil $1 : w = t : s_3$.

Setzt man nun s_1 an $s_2 - s_3 = \overline{m_1 n_0}$, so ist $S = \overline{m_0 n_0}$ das Resultat.

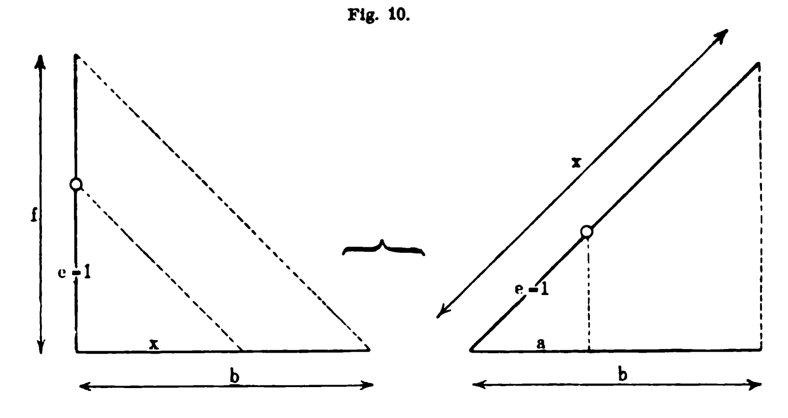
Anschliessend an Fig. 2 und an Gl. 1 haben wir in Fig. 9 $a = 1$ gemacht. Betrachten wir c als die zu suchende Proportionale, so erhält man aus

$$1 : b = x : d,$$

$$x \cdot b = d \text{ bezw. } x = \frac{d}{b} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

In der Figur ist die Division $\frac{2,16}{1,54}$ ausgeführt, man erhält $x = 1,4$; die Linien e und f sind hier nur Hilfslinien.

Fig. 10.



Die algebraischen Divisionen, welche die Zeichnungen Fig. 10 enthalten, lassen sich durch die Proportionen darstellen:

$1 : x = f : b$ und $1 : x = a : b$,

woraus

$x = \frac{b}{f}$, bezw. $x = \frac{b}{a}$ folgt (2a).

Die Wahl der einen oder andern Konstruktion hängt selbstverständlich von der gestellten Aufgabe ab.

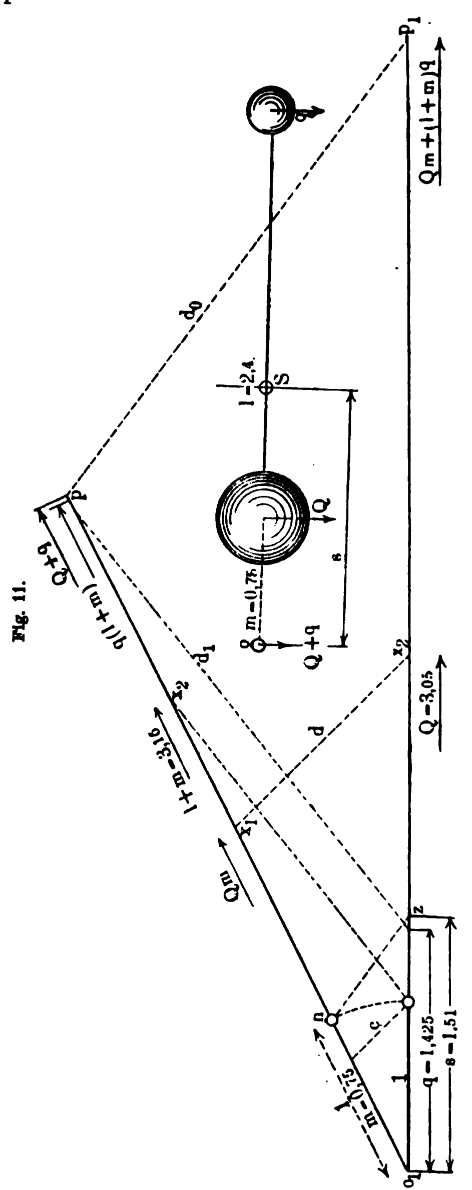


Fig. 11.

VI. An einer Stange $l = 2{,}4^m$ lang, hängen zwei Gewichte $Q = 3{,}05$ kg und $q = 1{,}425$ kg; es soll arithmographisch der Schwerpunkt gesucht werden.

Ist o, Fig. 11, ein beliebiger Drehpunkt in der Entfernung m und in der Verlängerung der Stange, s die fragliche von o gerechnete Schwerpunktsentfernung, so ist nach den uns bekannten Grundsätzen (s. Band I, S. 81 ff.) die Schwerpunktsgleichung

$(Q + q) s = m Q + q (l + m)$,

aus dieser folgt

$$s = \frac{mQ + q(l + m)}{Q + q}.$$

Es liegen hier zwei Multiplikationen $mQ = 0{,}75 \cdot 3{,}05$ und $q(l + m) = 1{,}425 (2{,}4 + 0{,}75) = 1{,}425 \cdot 3{,}15$, deren Produkte addiert werden müssen, und eine Division durch $Q + q = 4{,}475$ vor; m haben wir 0,75 angenommen.

Um die erste Multiplikation auszuführen, tragen wir auf einem horizontalen Winkelschenkel von o_1 aus eine Einheit und $Q = 3{,}05$ ab,

auf dem anderen $\underline{m} = 0{,}75$. Die Parallele d zu c schneidet auf dem oberen Schenkel $\overline{o_1 x_1} = Qm$ ab.

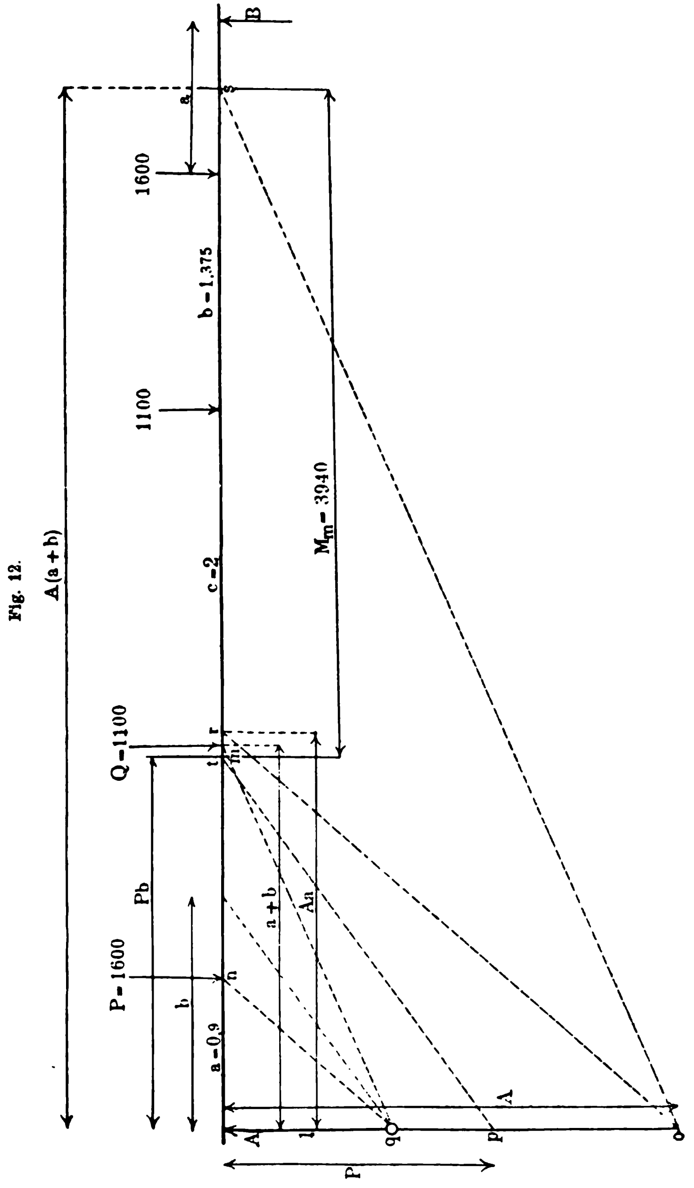


Fig. 12.

Verbindet man den Endpunkt der Einheit mit x_2, den Endpunkt der Länge $1 + m = 3{,}15$, trägt $q = 1{,}425$ von 0, auf, so schneidet die

Parallele d_1 zu der eben erwähnten Verbindungslinie die Länge $\overline{o_1 p}$, das zweite Produkt q (l + m) ab. Die Summe der Produkte wird nach $\overline{o_1 p_1}$ übertragen.

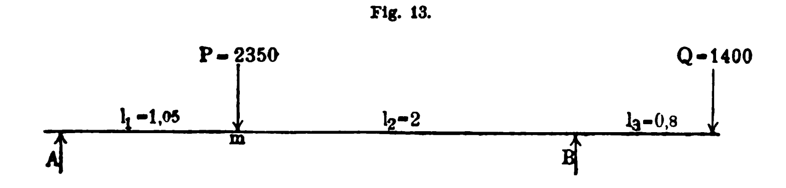
Verbindet man p_1 mit dem Endpunkt der Länge Q + q, welcher neben p fällt, schlägt die Einheit nach $\overline{o_1 n}$ und zieht durch n eine Parallele zu der Verbindungslinie d_0, so schneidet diese die Entfernung $s = 1{,}51 = \overline{o_1 z}$ auf der Horizontalen ab; die Division erfolgte hierbei nach Gl. 2a.

VII. Ein Träger AB, Fig. 12, sei nach den eingeschriebenen Massen $a = 0{,}9$, $b = 1{,}375$ und $c = 2^m$ symmetrisch mit $2P = 2 \cdot 1600$ und $2Q = 2 \cdot 1100$ kg belastet; es sollen die Momente in m und n in den Angriffspunkten der Kräfte P und Q gesucht werden.

Die Auflagerreaktionen sind gleich gross. $A = B = 1600 + 1100 = 2700$ kg. Die Momente in n und m sind $M_n = Aa$ und $M_m = A(a + b) - Pb$. Trägt man sich, um zunächst das Produkt Aa zu erhalten, eine Einheit in die Richtung der Auflagerreaktion nach $\overline{Aq}$ auf, ferner $A = 2700$, also 2,7 Einheiten nach $\overline{Ao}$, verbindet q mit n, zieht die Parallele $\overline{or}$ zu $\overline{qn}$, so erhält man $Mn = Aa = 2{,}43$ im Massstabe der Zeichnung. Das sind, da jede Längeneinheit 1000 kg bedeutet, 2430 kgm. Verbindet man q mit m, dem Endpunkt der Länge a + b, und zieht hierzu $\overline{os}$ parallel, so ist $\overline{As} = A(a + b)$, weil aus $1 : a + b = A : x$, $x = A(a + b)$ folgt. Das hiervon in Abzug zu bringende Produkt liefert die Länge $\overline{At}$. Trägt man sich $P = \overline{Ap}$ und b von A aus auf, so verhält sich, wie leicht zu übersehen, $1 : b = P : \overline{At}$, woraus $\overline{At} = Pb$. Die Differenz $\overline{As} - \overline{At} = ts$ giebt das Resultat. Man findet $ts = 3{,}94$, also $M_m = 3940$ kgm.

VIII. Ein Träger von der Länge $l_1 + l_2 + l_3$, Fig. 13, ruht auf zwei Stützen A und B und ist innerhalb AB mit $P = 2350$, ausserhalb

Fig. 13.

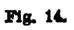


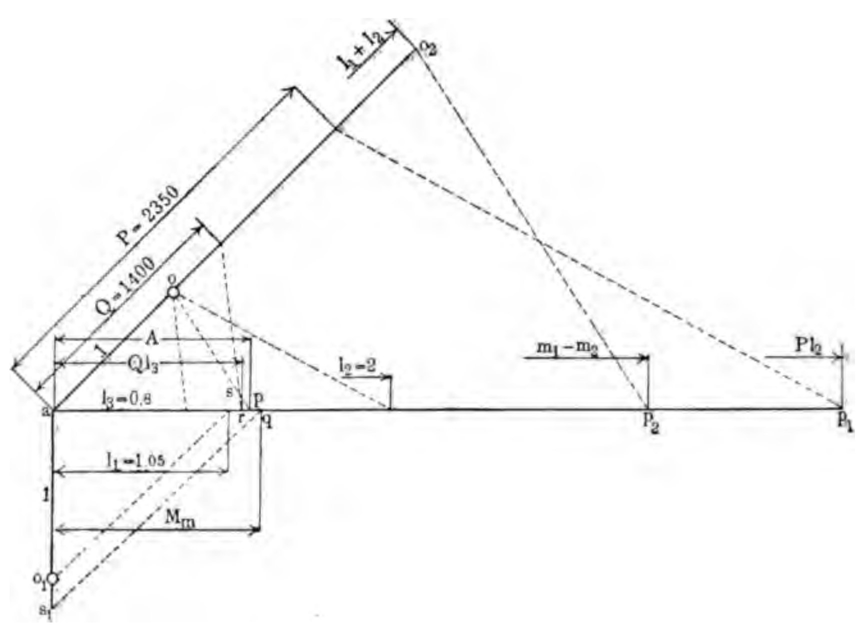
B mit $Q = 1400$ kg belastet. Wie gross sind arithmographisch berechnet, die Auflagerreaktionen?

Nach den in Fig. 13 eingetragenen Bezeichnungen ist bekanntlich (S. Band I, Seite 128)

$$A = \frac{Pl_2 - Ql_3}{l_1 + l_2}, \quad B = P + Q - A.$$

Die Produktendifferenz $Pl_2 - Ql_3 = m_1 - m_2$ und die Division durch $l_1 + l_2 = 3{,}05$ sind in Fig. 14 ausgeführt.





Man verbindet den Endpunkt der Einheit o mit dem, der auf $\overline{ap_1}$ aufgetragenen Länge $l_2 = 2^m$, eine Parallele hierzu durch den Endpunkt der auf $\overline{ao}$ übertragenen Länge 2,35 (2350 kg) giebt das Produkt $Pl_2 = \overline{ap_1} = m_1$. Aus $1 : l_2 = P : m_1$ folgt $m_1 = Pl_2$.

Ebenso folgt in derselben Weise aufgetragen aus $1 : l_3 = Q : \overline{ar}$, $\overline{ar} = m_2 = Ql_3$.

Die Momentendifferenz ist $m_1 - m_2 = \overline{rp_1}$. Trägt man diese jetzt nach ap_2, verbindet p_2 mit o_2, dem Endpunkt der Länge $\overline{ao_2} = l_1 + l_2$ und zieht die Parallele $\overline{op}$ durch o, so wird $\overline{ap} = A$, dem Auflagerdruck; denn es folgt aus

$$1 : \overline{ap} = l_1 + l_2 : m_1 - m_2 \text{ bezw. } 1 : \overline{ap} = \overline{ao_2} : \overline{ap_2},$$

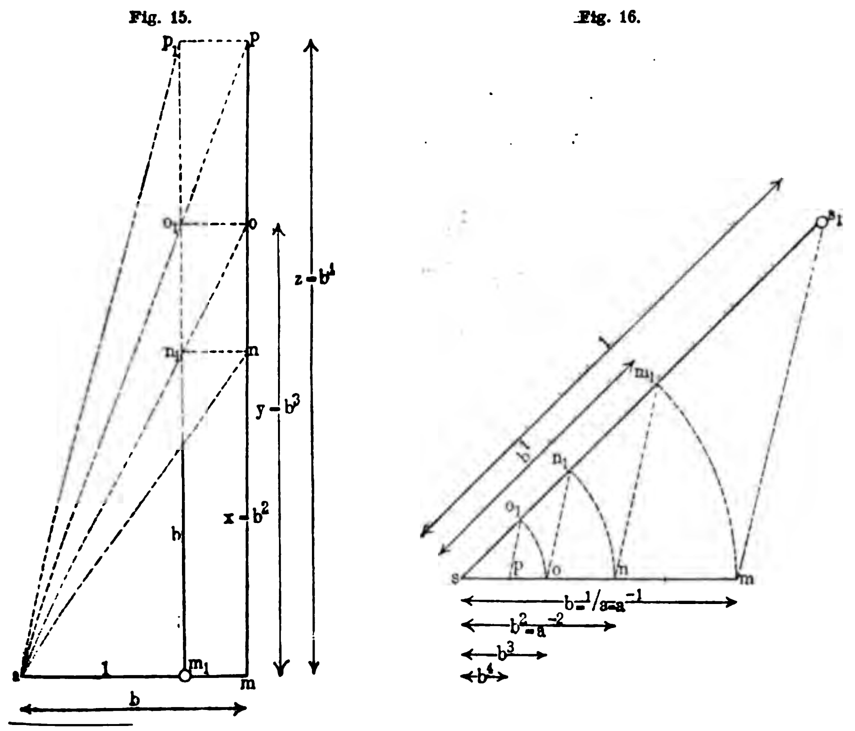
$$\overline{ap} = A = \frac{m_1 - m_2}{l_1 + l_2}.$$

Die Figur ergiebt $\overline{ap} = 1{,}17$, wonach $A = 1170$ kg. Die Vertikalkraft in B ist $B = 2350 + 1400 - 1170 = 2580$ kg. Um das Moment

im Angriffspunkt der Kraft P, in m, zu finden, $M_m = A \cdot l_1$, trägt man die Einheit nach $\overline{ao_1}$, A nach $\overline{as}$, und $l_1 = 1{,}05$ nach $\overline{as}$, verbindet o_1 mit s und zieht parallel $\overline{s_1 q}$, so folgt, weil $1 : l_1 = A : \overline{aq}$, $\overline{aq} = A l_1 = M_m = 1230$ kgm.

3. Die Potenzierung.

Multipliziert man ein und dieselbe Zahl oder Grösse b, n mal mit sich selbst, so erhält man die n te Potenz der Grösse b. Die hierfür übliche Bezeichnung ist b^n. Hiernach ist das Verfahren der Pontenzierung eine fortgesetzte Multiplikation mit derselben Zahl; n ist der Exponent (die exponierte, ausgesetzte Zahl), welche die Anzahl der zu wiederholenden Multiplikationen andeutet. Die Zahl b nennt man die Grundzahl*). — Trägt man, Fig. 15, von a eine Einheit $\overline{am_1} = 1$ und



*) Mit b als Grundzahl erhält man nach den Potenzgesetzen $b \cdot b \cdot b \cdots = b^n$; $b^n \cdot b^m = b^{n+m}$; $\frac{b^n}{b^m} = b^{n-m}$, für $n = m$ wird $\frac{b^n}{b^n} = b^o = 1$; und wenn $b = \frac{1}{a}$, $b \cdot b \cdot b \cdots = b^n = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n} = \frac{a^o}{a^n} = a^{o-n} = a^{-n}$.

die Grundzahl b nach $\overline{am}$, zugleich auch b senkrecht auf $\overline{am}$ in m_1 an, so erhält man durch m eine Parallele zu b gezogen, die Länge x als zweite Potenz von b. Es verhält sich $1 : b = b : x$, wonach $x = b^2$. Überträgt man ferner $\overline{mn}$ nach $\overline{m_1n_1}$, zieht $\overline{an_1}$ bis o, so ist $\overline{mo} = y$ die 3te Potenz von b; denn es verhält sich wieder

$$1 : \overline{m_1n_1} = b : \overline{mo} \text{ oder } 1 : x = b : y, \text{ woraus } y = ba = bb^2 = b^3.$$

Wiederum $\overline{mo}$ nach $\overline{m_1o_1}$ übertragen und a durch o_1 mit p verbunden, erhält man die Proportion

$$1 : \overline{m_1o_1} = b : \overline{mp} \text{ oder } 1 : y = b : z, \text{ somit } z = by = bb^3 = b^4.$$ In der Fig. ist $z = b^1$ in $z = b^4$ zu verbessern.

Durch die Verlängerung von ap_1 würde man die 5te Potenz erhalten u. s. w.

Man übersieht, dass für $b > 1$, zusammengestellt:

$$x = b^2, \; y = b^3, \; z = b^4 \quad . \; . \; . \; . \quad (3)$$

werden muss.

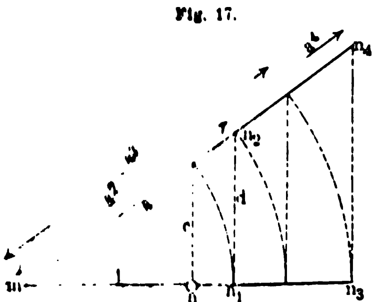
Ist b ein Bruch, also $b < 1$, etwa $b = \frac{1}{a}$, so finden sich die natürlich immer kleiner werdenden Potenzen von b aus der in Fig. 16 angedeuteten Konstruktion.

Es sei $sm = b = \frac{1}{a} = a^{-1}$ und $\overline{ss_1} = 1$. Die Einheit wird auf dem beliebigen Winkelschenkel $\overline{ss_1}$ oder auch als Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks aufgetragen, sofern $\overline{s_1m}$ senkrecht auf $\overline{sm}$. Überträgt man sm nach sm_1 und zieht $\overline{m_1n}$ parallel $\overline{s_1m}$, so ist $\overline{sn} = b^2 = a^{-2}$, denn es verhält sich

$$1 : b = sm_1 : \overline{sn} \text{ oder } 1 : b = b : \overline{sn} \quad . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Überträgt man ferner $\overline{sn}$ nach $\overline{sn_1}$ und zieht $\overline{n_1o}$, so findet sich die dritte Potenz $\overline{so} = b^3$ oder die Reziproke von a in der dritten Potenz,

Fig. 17.



$$b^3 = a^{-3} = \frac{1}{a^3}; \text{ denn es folgt aus}$$

$$1 : b = \overline{sn_1} : \overline{so}; \; \overline{so} = \overline{bsn_1} = b \cdot b^2 = b^3.$$

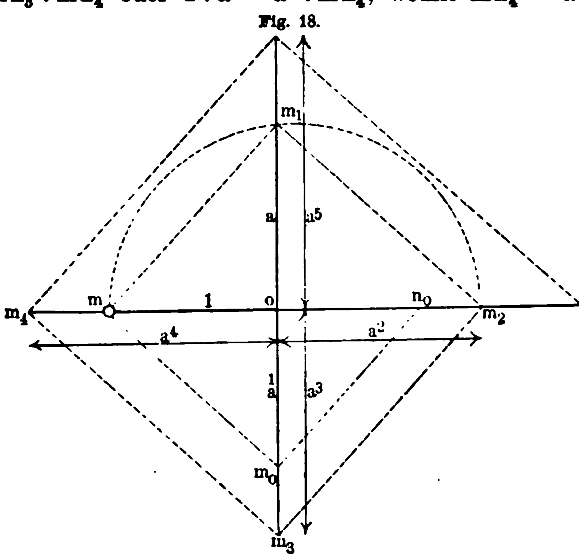
In dieser Weise fortgesetzt, wird $b^n = \frac{1}{a^n}$ schliesslich für $n = \infty$ zu Null.

In Fig. 17 ist die Grundzahl $a > 1$ als Hypotenuse der Katheten $\overline{mn} = 1$ und c aufgetragen. Überträgt man a durch Kreisbogen nach $\overline{mn_1}$, und zieht d parallel c, so schneidet d die zweite Potenz auf der verlängerten Hypotenuse ab, $\overline{mn_2} = a^2$. Es

verhält sich nämlich $1 : a = \overline{mn_1} : \overline{mn_2}$, bezw. $1 : a = a : a^2$. Die folgenden Potenzen findet man leicht aus der Figur; die vierte Potenz beispielsweise ergiebt sich aus

$1 : a = \overline{mn_3} : \overline{mn_4}$ oder $1 : a = a^3 : \overline{mn_4}$, womit $\overline{mn_4} = a^4$ u. s. w.

Fig. 18.



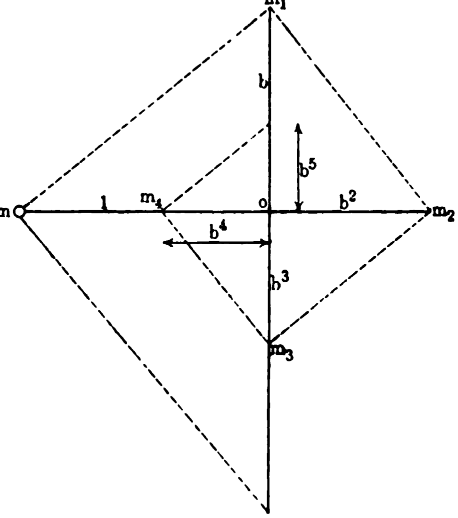
Die mittlere geometrische Proportionale bietet uns ein ebenso einfaches wie leicht übersichtliches Verfahren zur Potenzierung jeder Grundzahl $\gtrless 1$. Trägt man auf zwei senkrechten Linien, welche sich in o (Fig. 18) schneiden, nach $\overline{mo}$ die Einheit, nach $\overline{om_1}$ die Grundzahl a, verbindet m mit m_1 und zieht $\overline{m_1m_2}$ senkrecht auf $\overline{mm_1}$, so verhält sich

$1 : a = a : \overline{om_2}$, woraus

$\overline{om_2} = a^2$ . . . (5)

$\overline{m_3m_2}$ senkrecht auf $\overline{m_1m_2}$ konstruiert, folgt weiter $a : a^2 = a^2 : \overline{om_3}$, woraus $\overline{om_3} = \frac{a^4}{a} = a^3$; $\overline{m_4m_3}$ senkrecht zu $\overline{m_2m_3}$ schneidet a^4 bei m_4 ab u. s. w.

Fig. 19.



Das konstruktive Verfahren bleibt dasselbe, wenn auch $a < 1$, wie aus Fig. 19 zu ersehen.

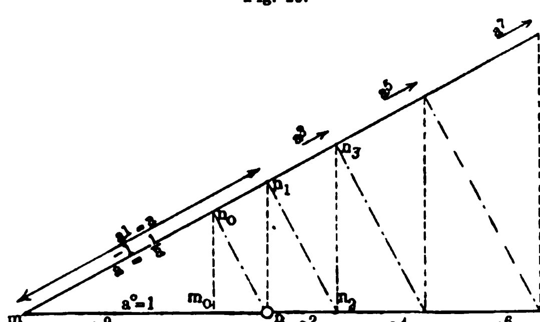
Ist hier $b = \frac{1}{a}$ die Grundzahl, so wird $\overline{om_2} = b^2 = \frac{1}{a^2} = a^{-2}$ die zweite; $\overline{om_3} = b^3 = a^{-3}$ die dritte; $\overline{om_4} = b^4 = a^{-4}$ die vierte Potenz.

Errichtet man $\overline{m_0 m}$, Fig. 18, senkrecht auf $\overline{mm_1}$, so erhält man die Reciproke von a, denn es folgt aus

$$a : 1 = 1 : \overline{om_0},\ \overline{om_0} = \frac{1}{a};\ \text{weiter}\ on_0 = \frac{1}{a^2} = a^{-2}\ \text{u. s. w.} \quad . \quad . \quad (5a)$$

In Fig. 18 ist in der Linie om_0 der Bruchstrich für $\frac{1}{a}$ zu ergänzen.

In dem rechtwinkeligen Dreieck mnn_1 sei in Fig. 20 $a = \overline{mn_1}$ die Hypotenuse gleich der Einheit.



Errichtet man $\overline{n_1 n_2}$ senkrecht auf a im Punkte n_1; $\overline{n_2 n_3}$ senkrecht auf mn_2 in n_2, in n_3 eine senkrechte Linie bis zum Schnittpunkt mit der Horizontalen; fällt man rückwärts von n eine Senkrechte auf a, von dem so erhaltenen Punkt n_0 eine Senkrechte auf $\overline{mn}$ u. s. f., so übersieht man, dass infolge der Ähnlichkeit der rechtwinkeligen Dreiecke auf der horizontalen Kathete die geraden und auf der Hypotenuse die ungeraden Potenzen der Grundzahl a abgeschnitten werden.

Die beiden Dreiecke $\triangle mnn_1 \sim \triangle mn_1n_2$ ergeben die Proportion $\overline{mn} : \overline{mn_1} = \overline{mn_1} : \overline{mn_2}$, bezw. $1 : a = a : mn_2$, also zunächst $\overline{mn_2} = a^2$.

Weitere in demselben Sinne aufgestellte Proportionen liefern sodann

$$\overline{mn_3} = a^3,\ \overline{mn_0} = \frac{1}{a} = a^{-1},\ \overline{mm_0} = \frac{1}{a^2} = a^{-2}\ \text{u. s. w.};$$

denn es folgt aus der Figur

$$1 : a = a^2 : a^3 = a^4 : a^5 = \ldots.\ \text{oder}\ \frac{1}{a} = \frac{a^2}{a^3} = \frac{a^4}{a^5} = \ldots.$$

Trägt man sich, wie umstehend geschehen, Fig. 21, eine Einheit $\overline{mn} = 1$ als Hypotenuse des rechtwinkeligen $\triangle mon$ und anliegend an diese $a = \overline{mo}$ als Kathete auf, wodurch $a < 1$ und $\overline{no}$ rechtw. zu a wird, und setzt wie in der vorigen Figur die Konstruktion fort, so resultieren wieder die Potenzen von a; sie ergeben sich, die in der Figur

eingetragenen Werte unmittelbar verwendet, aus den Proportionen (in Fig. 21 ist $\frac{1}{a^4}$ in $\frac{1}{a^2}$ zu ändern).

Fig. 21.

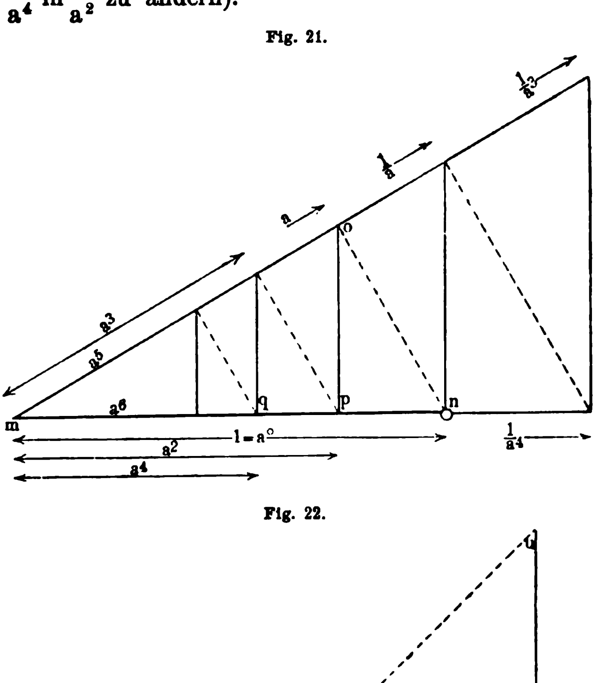


Fig. 22.

$$a : 1 = \frac{1}{a} : \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^3} : \frac{1}{a^4} = \ldots \text{ und } a : 1 = a^3 : a^2 = a^5 : a^4 = \ldots$$

Endlich haben wir in Fig. 22 unter Beibehaltung derselben Bezeichnungen, wobei auch wieder $a < 1$ die Verbindungskathete on der Endpunkte a und der Einheit verlängert und die Konstruktion wie in Fig. 20

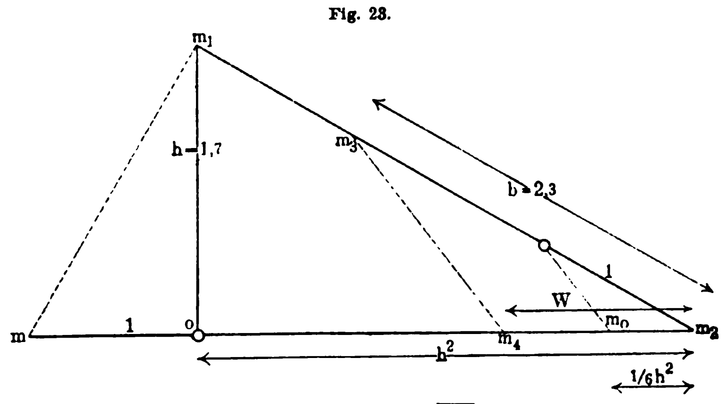
beiderseitig fortgesetzt. Man erhält auf diese Weise wieder die Potenzen von a, welche, wenn $a < 1$ als reziproke Potenzen der Grundzahl nach rechts wachsen $\frac{1}{a} = a^{-1}$, $\frac{1}{a^2} = a^{-2} \ldots$, nach links zu, abnehmen müssen a^2, a^3, $a^4 \ldots$

Die Grundzahl in Fig. 22 ist $a = 0,71$, die Abmessungen ergeben beispielsweise $a^3 = \overline{0,71^3} = 0,36$ und $tu = a^{-2} = \frac{1}{a^2} = \frac{1}{\overline{0,71^2}} = 2$.

Beispiele.

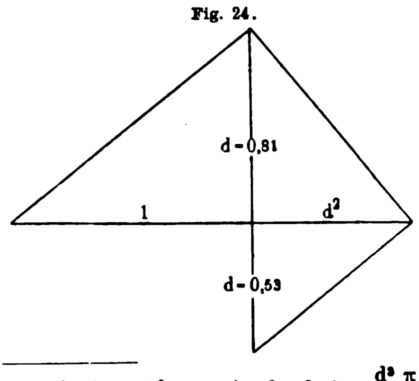
I. Man soll, Fig. 23, das Widerstandsmoment $W = \frac{1}{6} bh^2$ für $b = 2,3$ und $h = 1,7$ auf graphischem Wege bestimmen.

Fig. 23.



Trägt man senkrecht zur Einheit $\overline{mo} = 1$, die gegebene $h = \overline{m_1 o} = 1,7$ auf, dann erhält man, $\overline{m_1 m_2}$ senkrecht zu $\overline{mm_1}$ gezogen, durch $\overline{om_2}$ das Quadrat von h, $\overline{m_0 m_2}$ ist der sechste Teil desselben, $\frac{1}{6} h^2$. Tragen wir ferner nach $\overline{m_3 m_2}$ den Wert $b = 2,3$ und die gleiche Einheit wie $\overline{mo}$, verbinden den Endpunkt der letzteren mit m_0, so schneidet die Parallele zu derselben $\overline{m_3 m_4}$ die gesuchte $W = 1,11$ ab.

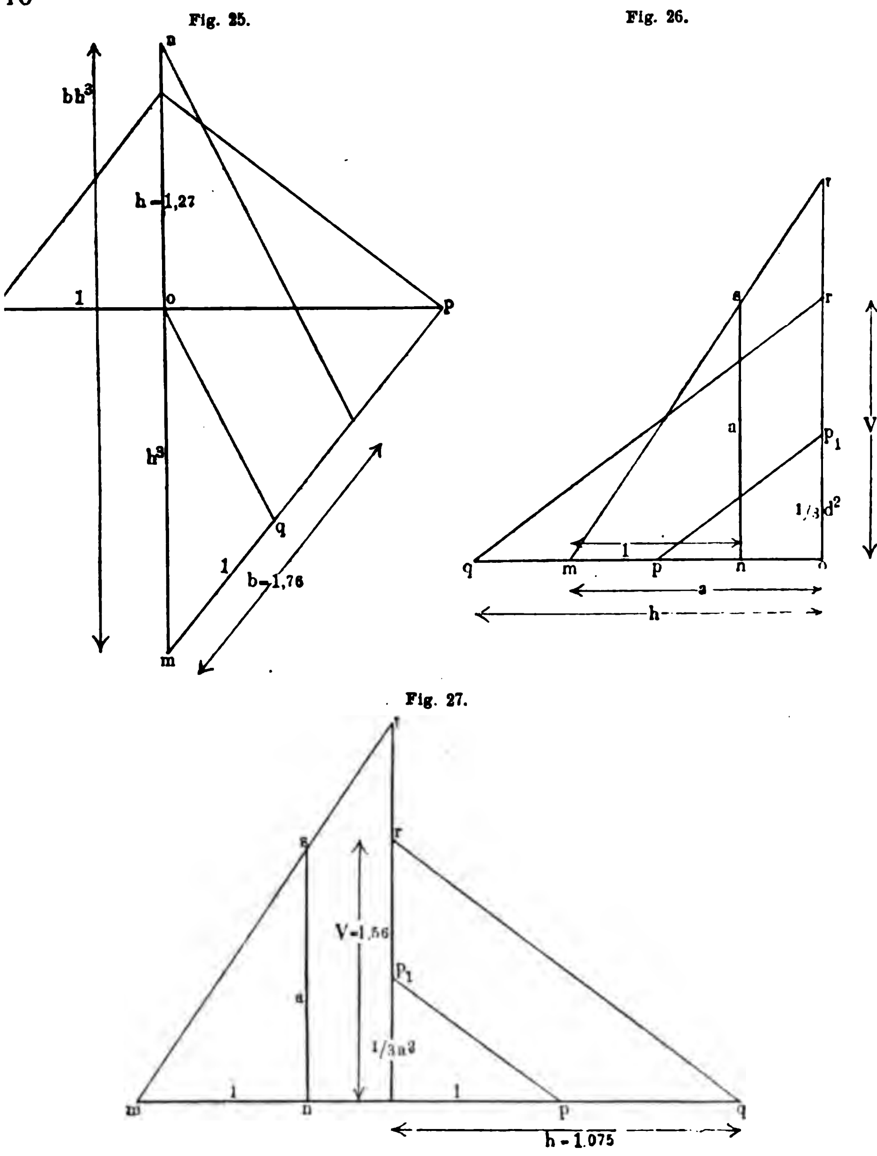
Fig. 24.



II. Den Ausdruck $W = \frac{d^3}{10}$, das Widerstandsmoment*) eines kreisförmigen Querschnitts zu konstruieren, Fig. 24. Man trägt d senkrecht zur Einheit und bildet, wie hier geschehen, nach Fig. 19 die

*) Angenäherter Ausdruck für $\frac{d^3 \pi}{32}$; s. Band II, S. 169 u. f.

3. Potenz, deren zehnter Teil W liefert. Es ist hier $d = 0{,}81$ und $W = \frac{1}{10} 0{,}53 = 0{,}053$. In der Fig. ist $d = 0{,}53$ in $d^3 = 0{,}53$ zu ändern.



III. Das Trägheitsmoment $J = \frac{1}{12} bh^3$ für $b = 1{,}76$ und $h = 1{,}27$ graphisch zu berechnen (s. Bd. I, Seite 309; Bd. II, Seite 81).

Wir haben zunächst in Fig. 25 nach dem Konstruktionsverfahren der vorigen Aufgabe h^3 konstruiert, $h^3 = \overline{om}$; ferner die gewählte Einheit von m aus in die letzte Konstruktionshilfslinie $\overline{mp}$ eingetragen und deren Endpunkt mit o verbunden, ferner $b = 1{,}76$ von m aus angetragen und durch deren Endpunkt zu $\overline{oq}$ eine Parallele gezogen; die letztere liefert das Produkt $\overline{mn} = bh^3$, der zwölfte Teil dieser Länge, $J = 0{,}3$, ist das fragliche Trägheitsmoment.

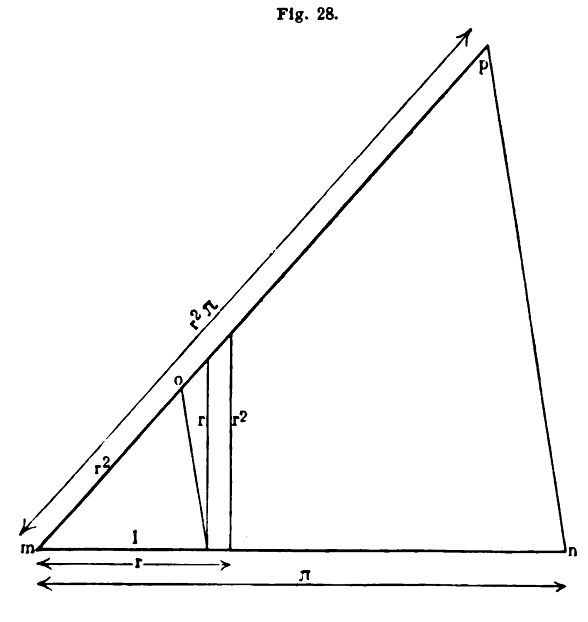
IV. Den Kubikinhalt einer Pyramide von der Höhe $h = 2{,}075^m$ zu berechnen, wenn die Basis quadratisch, zu $a = 1{,}5^m$ Seitenlänge angenommen wird.

Der Kubikinhalt einer Pyramide ist mit Rücksicht auf die gegebenen Zahlen

$$V = {}^1/_3\, a^2 h = {}^1/_3 \cdot 1{,}5^2 \cdot 2{,}075.$$

Die 2. Potenz von a haben wir in den Figuren 26 und 27 nach der in Fig. 15 gezeichneten Konstruktion entwickelt. Rechtwinkelig zur Einheit $\overline{mn} = 1$ wurde $a = 1{,}5 = \overline{ns}$ angetragen, ebenso auf die Verlängerung der Einheit nach $\overline{mo}$. Der Schnitt der Senkrechten $\overline{ot}$ und der Hilfslinie $\overline{mt}$ ist der Endpunkt von a^2. Überträgt man die Einheit nach $\overline{op}$ und verbindet p mit dem Endpunkt von ${}^1/_3\, a^2$, zieht ferner die Parallele $\overline{qr}$ zu $\overline{pp_1}$, dann ist, $oq = h$ angenommen, $\overline{or} = V = 1{,}56^{cbm}$, der fragliche Inhalt.

Fig. 28.



V. Es soll, Fig. 28, der Flächeninhalt eines Kreises vom Halbmesser $r = 1{,}13^m$ arithmographisch berechnet werden.

Man konstruiert zunächst das Quadrat des gegebenen Halbmessers, wir haben in der Figur die Konstruktion der Fig. 15 eingeschlagen; überträgt das Quadrat nach $\overline{mo} = r^2$, sowie $\pi = 3{,}14$ nach $\overline{mn}$. Die Parallele $\overline{np}$ zu der Verbindungslinie von o mit dem Endpunkt der Einheit giebt die Multiplikation

mit π, sie schneidet das Produkt $r^2\pi$ als Länge $\overline{mp}$ ab. Die Zeichnung liefert annähernd 4 □^{m}.

VI. Den gleichen Kreisinhalt erhält man nach der Formel $\frac{\pi d^2}{4}$, wenn

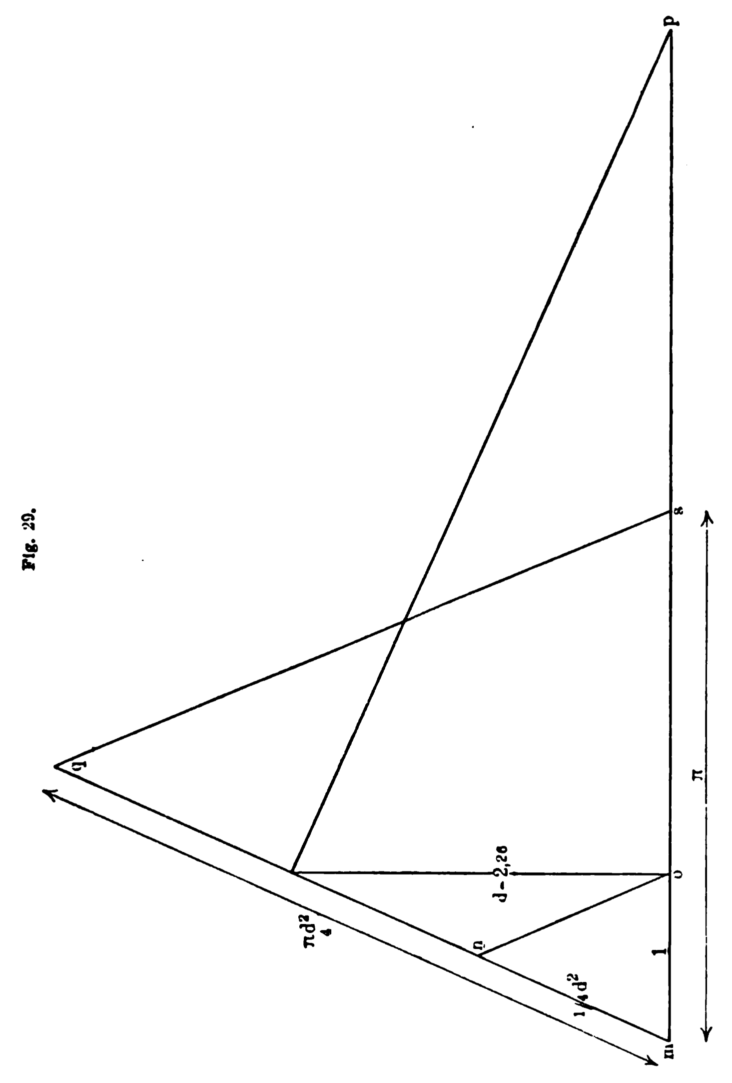


Fig. 29.

$d = 2{,}26^m$. Nach beistehender Konstruktion ist unter Zugrundlegung der Einheit $\overline{mo} = 1$, $\overline{op} = d^2$. Überträgt man den vierten Teil dieser Länge nach $\overline{mn}$, den Wert $\pi = 3{,}14$ nach $\overline{ms}$ und führt die graphische

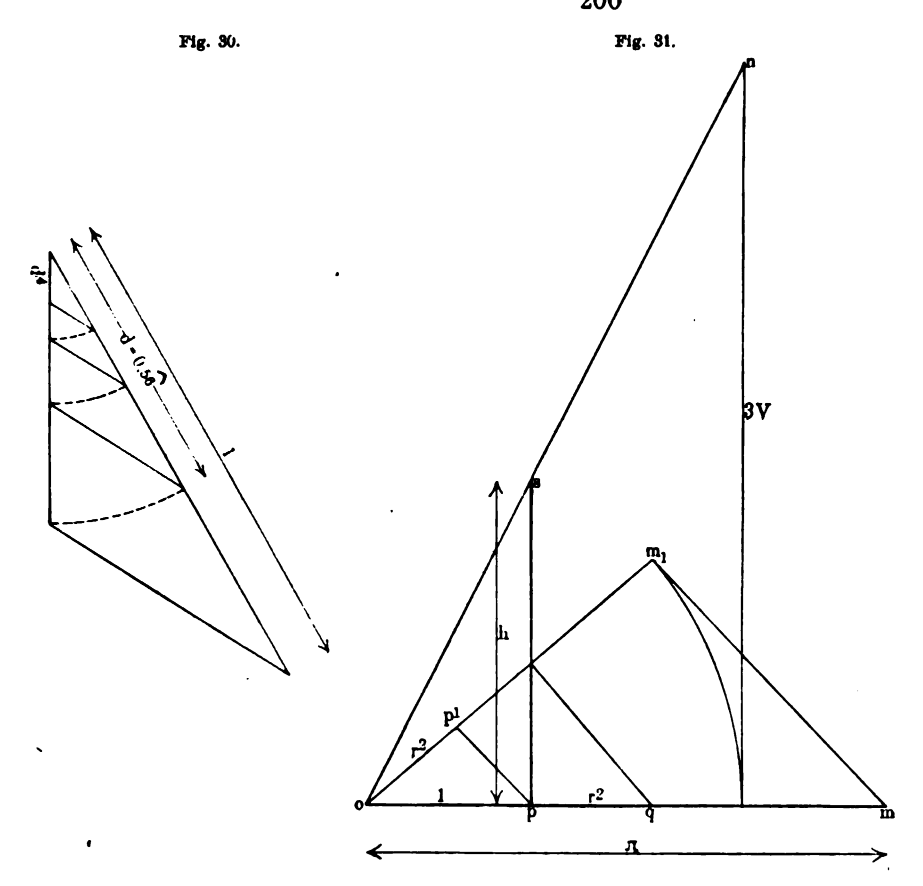
Multiplikation $3{,}14 \cdot \frac{d^2}{4}$ aus, indem man $\overline{sq}$ parallel zu $\overline{on}$ zieht, so liefert $\overline{mq}$ durch den Schnittpunkt q dasselbe Resultat wie im vorigen Beispiel.

VII. Das äquatoriale Trägheitsmoment eines Kreises ist (s. Bd. I, Seite 313),

$$J = \frac{\pi}{64} d^4, \text{ abg. } \frac{1}{20} d^4.$$

Die 4. Potenz von $d = 0{,}56$, Fig. 30, liefert nach der Konstrukt. Fig. 16 ausgeführt, $d^4 = 0{,}1$, wonach $J = \frac{1}{200} = 0{,}005$.

Fig. 30. Fig. 31.



VIII. Das Volumen eines geraden Kegels ist $V = \frac{1}{3} r^2 \pi h$, wenn h die Höhe und r der Halbmesser der kreisförmigen Grundfläche.

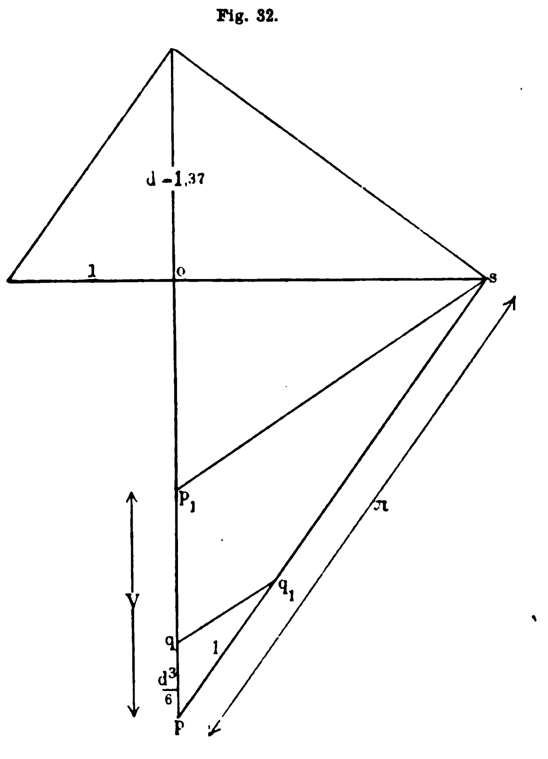
Es sei $V = 1{,}483^{\text{cubm}}$, $r = 0{,}85^{\text{m}}$ und soll die Höhe h auf graphischem Wege gefunden werden.

In Fig. 31 haben wir zunächst das Produkt $r^2 \pi$ gebildet, indem wir für $\overline{op} = 1$, $\overline{pq} = r^2$ fanden (s. die Konstr. in Fig. 19 für b^2), dieses nach $\overline{op^1}$ übertrugen und arithmographisch mit π multiplizierten. Die Länge $\overline{om_1}$ giebt dann das Produkt $r^2 \pi$, den Inhalt des Grundkreises. Da nun $h = \frac{3\,V}{r^2 \pi}$, so erfordert diese Formel eine Division; zu dem Ende schlägt man $\overline{om_1}$ in die Linie om und trägt $3\,V = 4{,}45$ nach n, zieht die Parallele oder Senkrechte zu 3 V durch p, der Einheit, und findet die fragliche Höhe $h = \overline{ps} = 1{,}925^{\text{m}}$.

IX. Der Inhalt einer Kugel vom Durchmesser d ist $V = \frac{\pi}{6}\,d^3$. Die graphische Darstellung dieser Formel soll Fig. 32 erläutern. Nach bekannter Konstruktion ist $\overline{op} = d^3$ und $\overline{pq} = \frac{d^3}{6}$. Die Multiplikation mit π lässt sich dadurch erreichen, dass man die Einheit auf die letzte Hilfslinie der 3. Potenz nach $\overline{pq_1}$ überträgt, ebenso auch $\pi = \overline{ps}$; zieht man dann schliesslich $\overline{p_1 s}$ parallel $\overline{qq_1}$, so ist $\overline{pp_1} = V$ das gesuchte Kugelvolumen.

Aus der Figur folgt für $d = 1{,}37^{\text{m}}$, $V = 1{,}24$ cbm.

Fig. 32.



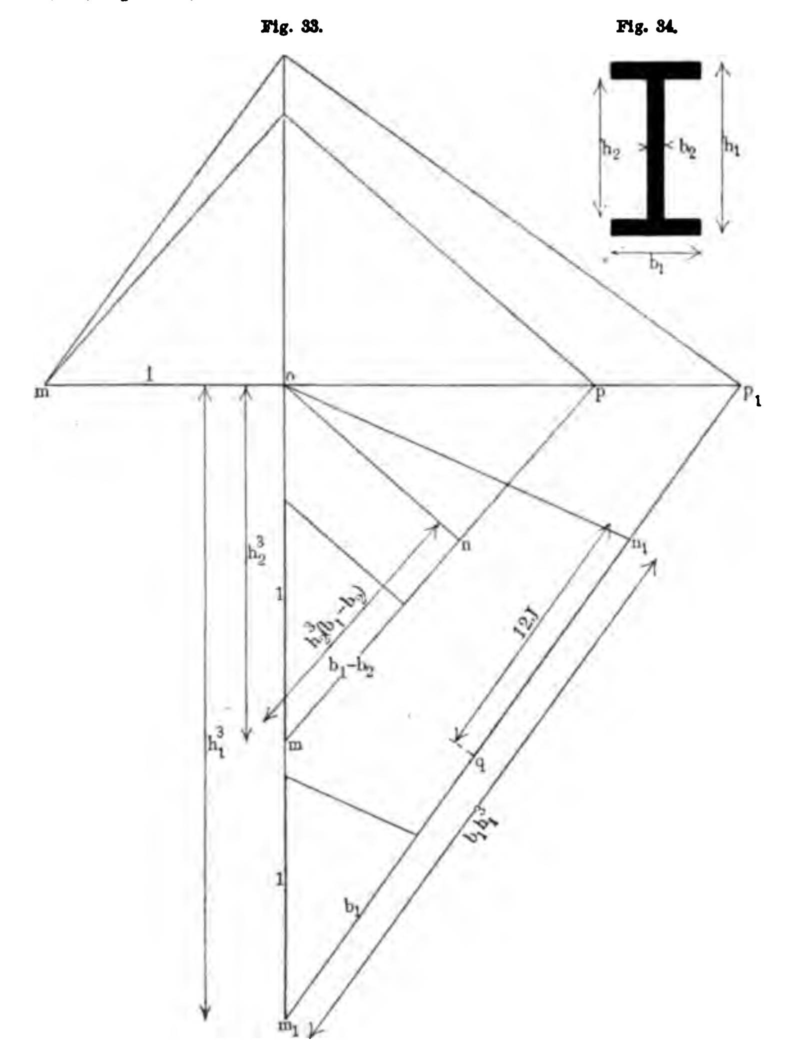
X. Es soll das Trägheitsmoment des in Fig. 33 gezeichneten Querschnitts graphisch entwickelt und auf die Schwerpunktsachse bezogen werden.

Nach den in der Figur eingeführten Bezeichnungen ist das Trägheitsmoment (s. Bd. I, S. 324; Bd. II, S. 82).

$$J = \frac{1}{12}[b_1 h_1{}^3 - (b_1 - b_2)\, h_2{}^3)$$

Die gegebenen Zahlenwerte sind in Dezimetern: $h_1 = 1{,}38$, $h_2 = 1{,}14$, $b_1 = 0{,}94$, $b_2 = 0{,}18$.

Fig. 33. Fig. 34.

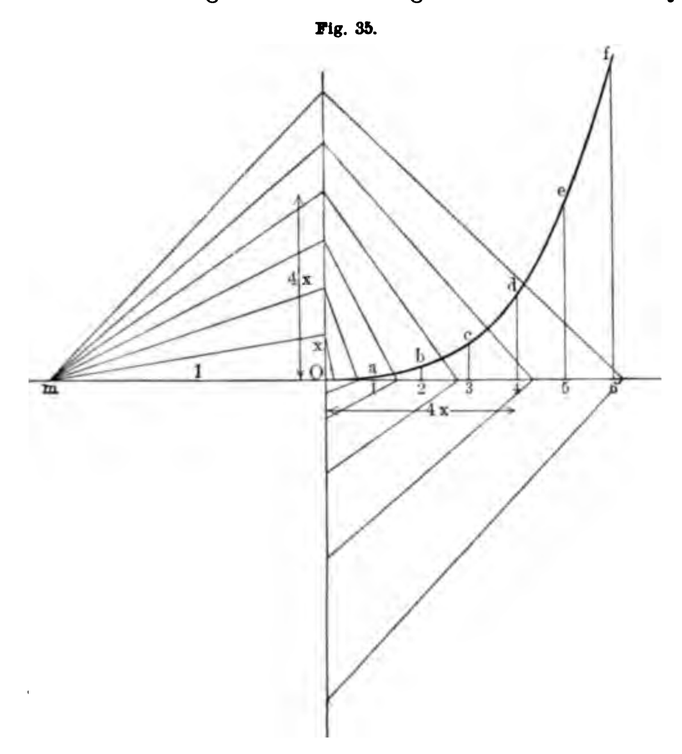


Die graphische Rechnung, Fig. 33, lässt sich am besten in Dezimetern durchführen, da die Figuren in Millimetern oder Centimetern zu viel Raum beanspruchen. Man stellt zunächst die beiden 3. Potenzen dar, die Einheit sei $\overline{mo} = 1$; als $h_2{}^3$ resultiert die Länge $\overline{om}$ auf om, auf derselben Linie

ist $om_1 = h_1^3$; weiter überträgt man die Einheit von den Endpunkten m und m_1 aus nach o. Die nun erforderlichen graph. Multiplikationen lassen sich durch Auftragen der bezüglichen Faktoren b_1 und $b_1 - b_2$ auf die Hilfslinien $\overline{m_1 p_1}$ und $\overline{mp}$ in bekannter Weise ausführen. Verbindet man die Endpunkte dieser Faktorenlinien mit den jeweiligen Einheiten, so sind $\overline{mn} = (b_1 - b_2) h_2^3$ und $\overline{m_1 n_1} = b_1 h_1^3$ die Produkte; die Differenz beider, $\overline{qn_1}$ auf $\overline{m_1 p_1}$ ausgeführt, liefert 12 J, die Figur giebt dann in Dezimetern J = 0,113, in Millimetern J = 11300000; denn das Produkt der 1. mit der 3. Potenz giebt die 4. Potenz, und da 100 mm = 1 dcm, so ist 0,113 mit 100^4 zu multiplizieren. Die Rechnung giebt J = 11333333.

XI. Es soll die allgemeine Gleichung konstruiert werden $y = ax^n$.

Fig. 35.



Die Konstruktion der Gleichung*) wird vereinfacht dadurch, dass wir $a = 1$ setzen, um die jedesmalige Multiplikation mit a, welches $\gtreqless 1$ sein kann, zu vermeiden; die Übersicht der Kurve wird dadurch nicht

*) Die Umkehrung d. Gl. ist $y = \sqrt[n]{bx}$, bezw. $y = \sqrt[n]{x}$ für $b = 1$.

beeinträchtigt. Setzen wir $n = 3$, legen also eine kubische Parabel zu Grunde, deren Gleichung $y = x^3$.

Wir tragen an eine Einheit $\overline{mo} = 1$ senkrecht eine beliebige Länge für x an und konstruieren die 3. (oder nte) Potenz, welche wir senkrecht an $oi = x$ antragen; es resultiert der Punkt a. Hierauf suchen wir von $2x$ die 3. (allgemein nte) Potenz und tragen sie senkrecht an $o2 = 2x$, erhalten den Punkt b, ferner konstruieren wir dieselben Potenzen der Längen $3x$, $4x$ u. s. w. und tragen das jedesmalige Ergebnis an o3, o4 ... senkrecht an; die Punkte o, a, b, c, d ..... verbunden, ergeben die gesuchte Kurve, deren Gleichung also hier $y = x^3$, weil sie aus dieser entstanden ist.

4. Die Radizierung bezw. graphische Darstellung der Wurzeln.

Unter Wurzelausziehen, Radizieren, versteht man, eine Zahl, Grundzahl, in eine gegebene Anzahl gleicher Faktoren zu zerlegen, welche wieder mit sich selbst multipliziert als Produkt die Grundzahl liefern müssen; radizieren oder wurzelausziehen ist sonach, um den Ausdruck zu gebrauchen, die umgekehrte Operation der Potenzierung. Während man den Grad der Potenzierung durch eine kleine Zahl oberhalb der Grundzahl darstellt, man bezeichnet die umgekehrte Operation, das Wurzelausziehen, durch die oberhalb der Grundzahl gestellte Reciproke (den umgekehrten Wert) der obigen Zahl.

Wenn $a^n = b$, so muss auch $a^{n \cdot \frac{1}{n}} = b^{\frac{1}{n}}$ sein, somit $a^1 = a = b^{\frac{1}{n}}$. Man nennt die so entstandene gebrochene Potenz die nte Wurzel aus b. Der Ausdruck hat hier (wie so mancher in der Mathematik und Mechanik) mit der Operation, welche man vornehmen will, nichts zu thun, er ist für dieselbe nichts weniger als bezeichnend, erklärend.

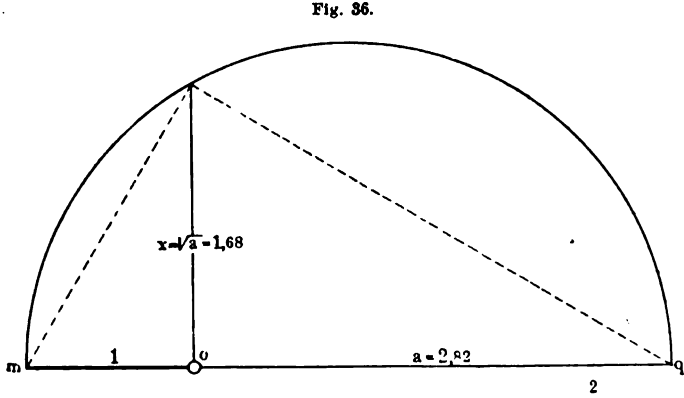
Man nennt die math. Ausführung hier Radizierung (von radix = Wurzel) oder Wurzelausziehen und bezeichnete sie früher mit rad, später mit r, wodurch das jetzt übliche Zeichen, ein verzerrtes $r = \sqrt{}$ entstand; den Grad der Operation, den Wurzelexponenten setzt man oberhalb des Zeichens: $\sqrt[2]{} = \sqrt{}$, $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$ etc.; es ist hiernach in Bezug auf die Bezeichnung vollständig gleichgiltig, ob man schreibt $6^{\frac{1}{n}}$ oder $\sqrt[n]{6}$; $6^{1/2}$ oder $\sqrt{6} = \sqrt[2]{6}$; $\sqrt[4]{8^3}$ oder $8^{3/4}$, $\sqrt[3]{m^6}$ oder $m^{6/3} = m^2$, $\sqrt[3+2n]{a+d} = (a+d)^{\frac{1}{3+2n}}$ u. s. w.

Die auf Seite 13 unten angedeutete Potenzrechnung lässt sich sofort auf eine solche mit Wurzelgrössen anwenden, wenn man nur die Wurzelbezeichnung in eine Potenzbezeichnung umsetzt, oder von dem Grundsatz ausgeht, dass ein gebrochener Exponent sich durch eine $\sqrt{}$ bezeichnen lässt. $9^{1/2} = \sqrt[2]{9} = \sqrt{9} = 3$, weil $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$; $8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = 4$, weil $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ oder $(2^3)^2 = 2^6 = 64$ etc.

Kommen wir nach dieser kurzen Abschweifung auf die graphische Darstellung des Ausdruckes $\sqrt[n]{b}$ zurück, so zeigt uns das umgekehrte Verfahren der Potenzierung, die mittlere geometrische Proportionale den Weg, allerdings nur für diejenigen Wurzeln, deren Wurzelexponent eine Potenz von 2 ist; $\sqrt{b}$, $\sqrt[4]{b}$, $\sqrt[8]{b}$ etc. $= \sqrt[2]{b}$, $\sqrt[2]{\sqrt[2]{b}}$, $\sqrt{\sqrt{\sqrt{b}}}$ etc.; alle andern Wurzeln können wir nur mit Hilfe der graphischen Logarithmen oder näherungsweise graphisch ermitteln; auf die logarithmische Lösung kommen wir weiter unten zurück.

In beistehender Figur ist nach Fig. 18 aufgezeichnet, $\overline{oq}$ die zweite Potenz der Grundzahl $\overline{op}$ (in der Fig. 36 ist der Buchstabe p im Halb-

Fig. 36.



kreis zu ersetzen), es ist also $oq = \overline{op}^2$, sonach $op = \sqrt[2]{\overline{oq}}$; oder weil nach den eingeschriebenen Bezeichnungen

$$1 : x = x : a, \text{ so folgt } x^2 = a \text{ und } x = \sqrt{a} \quad . \; . \; . \quad (6)$$

Will man die zweite oder Quadratwurzel ausziehen, so trägt man neben der Einheit die Grundzahl auf einer Linie auf und konstruiert zu dieser Länge $\overline{mo} + \overline{oq} = \overline{mq}$ den Halbkreis mpq; die senkrechte Linie

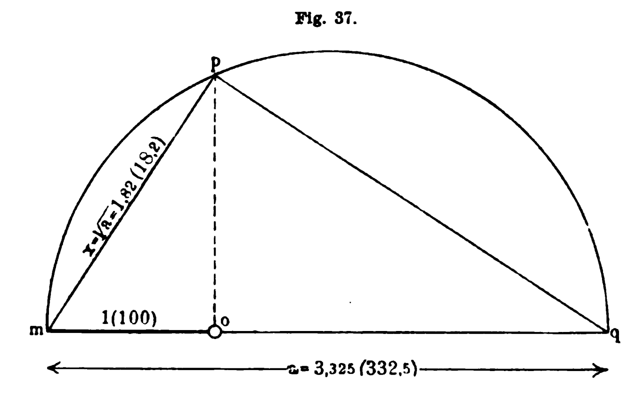
in o schneidet die gesuchte Länge $\overline{op}$, die Quadrat- oder zweite Wurzel aus der gegebenen Zahl durch Schnitt mit dem Kreisbogen ab. Dieselbe Konstruktion ergiebt sich natürlich auch umgekehrt aus den Fig. 18 u. 19.

In der Figur wurde $a = 2,82$ gewählt; man findet

$$\sqrt{2,82} = 1,68; \text{ denn es ist } 1,68 \cdot 1,68 = 2,82.$$

Zieht man die Ähnlichkeit der Dreiecke $\triangle\, mop \sim opq \sim mpq$ noch weiter in Betracht, so findet man aus den folgenden Figuren noch andere Konstruktionsverfahren der zweiten Wurzel.

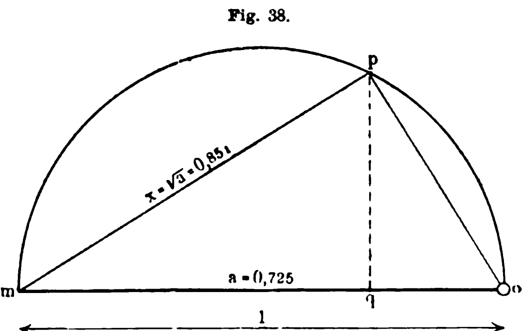
Fig. 37.



In Fig. 37 verhält sich $\overline{mo} : \overline{mp} = \overline{mp} : \overline{mq}$ oder $1 : x = x : a$, woraus wieder $\overline{mp} = x = \sqrt{a}$.

Dieselbe Proportion erhält man für die Einheit als Kreisdurchmesser, Fig. 38

Fig. 38.

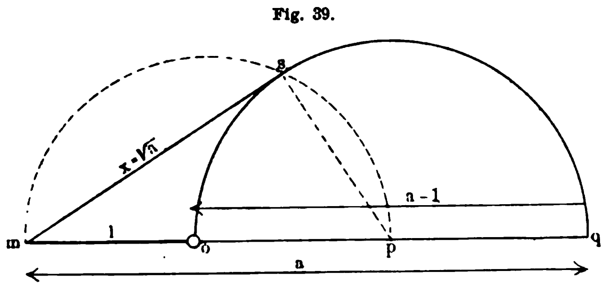


$\overline{mq} : \overline{mp} = \overline{mp} : \overline{mo}$ oder $a : x = x : 1$, also auch $x^2 = a$ und $x = \sqrt{a}$.

In der letzten Figur ist die Einheit grösser als die gegebene Zahl oder $a < 1$.

Nach der Konstruktion in Fig. 39 ist die Tangente ms an den Halbkreis osq für mo = 1 die Quadratwurzel aus der gegebenen Länge mq = a.

Fig. 39.



Es ist $\overline{ms}^2 + \overline{sp}^2 = (\overline{om} + \overline{op})^2$, und weil sp = op, so folgt

$$\overline{ms}^2 = (\overline{om} + \overline{op})^2 - \overline{op}^2 = \overline{om}^2 + 2 \cdot \overline{op} \cdot \overline{om};$$

für $\overline{om}$ als Einheit ergiebt sich $\overline{ms}^2 = 1 + 2\,\overline{op}$.

Nun ist aus der Figur entnommen $2 \cdot \overline{op} + \overline{om} = a$, sonach für $\overline{om} = 1$, $\overline{op} = \frac{a-1}{2}$ und folglich in $\overline{ms}^2$ eingesetzt, $\overline{ms}^2 = a$, $\overline{ms} = x = \sqrt{a}$.

Mit Hilfe der sämtlichen vorstehenden Konstruktionen ist es nur möglich eine Quadratwurzel auf graphischem Wege auszuziehen; durch Wiederholung der Konstruktion erhält man, wie schon angedeutet, die 4., 8., 16. . . . . Wurzel.

Um die n-Wurzel aus einer Zahl a auf graphischem Wege auszuziehen, können wir aber noch ein Näherungsverfahren einschlagen, indem wir a so in zwei Summanden a = u + v zerlegen, dass der erste derselben die der Zahl a möglichst nahe liegende nte Potenz einer ganzen Zahl ist. Beispielsweise würde man $\sqrt[5]{56}$, für a = 56, n = 5 als 5te Wurzel der Summwerte u = 32 und v = 24 auffassen, $\sqrt[3]{56} = \sqrt[5]{32 + 24}$, weil $\sqrt[5]{32} = 2$ eine ganze Zahl liefert; ebenso $\sqrt{146} = \sqrt{121 + 25}$, besser $\sqrt{114 + 2}$; weil $\sqrt{121} = 11$ eine ganze Zahl als Resultat der verlangten Quadratwurzel liefert; ferner $\sqrt[3]{325} = \sqrt[3]{125 + 200}$, weil $5^3 = 125$, bezw. $\sqrt[3]{125} = 5$ wieder 5 eine ganze Zahl ist, die in der verlangten Wurzel $\sqrt[3]{325}$ enthalten sein muss.

Zerlegt man jetzt mit Zuhilfenahme des binomischen Lehrsatzes*) den Ausdruck $(u+v)^m$ in

$$(u+v)^m = u^m + m u^{m-1} v + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2} u^{m-2} v^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3} u^{m-3} v^3 + \ldots\ldots$$

und setzt $m = \frac{1}{n}$, dann erhält man für die ersten beiden Glieder genau genug als nte Wurzel:

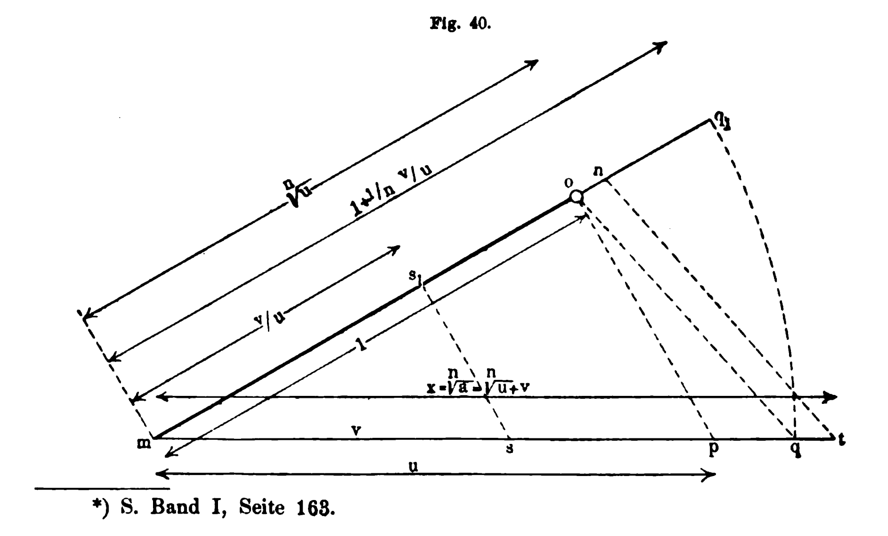
$$(u+v)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{u+v} = u^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} u^{\frac{1}{n}-1} v, \text{ das ist}$$

$$\sqrt[n]{u+v} = \sqrt[n]{u}\left(1 + \frac{v}{nu}\right) \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

Diese Formel giebt uns ein allgemeines Resultat, also auch noch eine Annäherungslösung für die 2., 4., 8. . . . Wurzel, sie setzt aber, wie schon angedeutet, bereits die $\sqrt[n]{u}$ voraus. Graphisch bilden wir für irgend eine passende Einheit $\frac{v}{u}$, und zählen zum nten Teil dieser Länge $\frac{v}{u}$ die Einheit zu, tragen $\sqrt[n]{u}$ auf und multiplizieren schliesslich $1 + \frac{1}{n}\frac{v}{u}$ mit $\sqrt[n]{u}$.

Wir haben in den Fig. 40 und 41 zwei Fälle unterschieden: in

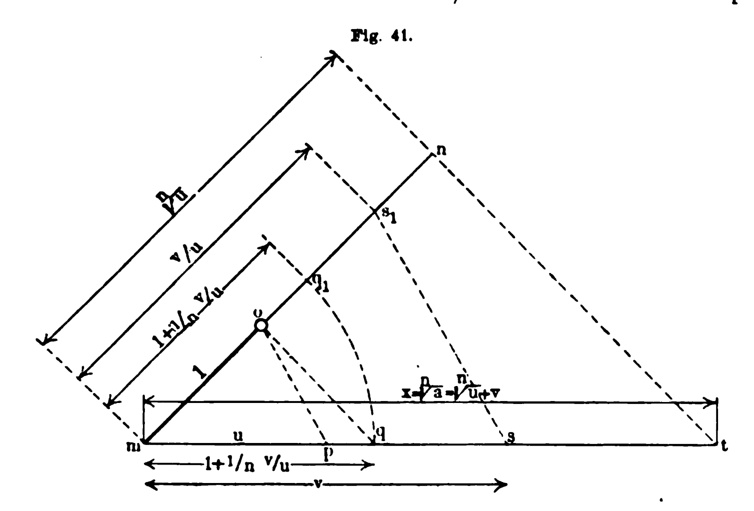
Fig. 40.



*) S. Band I, Seite 163.

Fig. 40 ist $\frac{v}{u}$ grösser als die Einheit, in Fig. 41 ist $\frac{v}{u} < 1$. Man trägt auf einen Winkelschenkel $\overline{mo} = 1$ auf, auf den andern $\overline{mp} = u$

Fig. 41.



und $\overline{ms} = v$, verbindet p mit o und zieht $\overline{ss_1}$ parallel dieser Linie, so wird $\overline{ms_1} = \frac{v}{u}$, denn es ist $1 : u = \frac{v}{u} : v$.

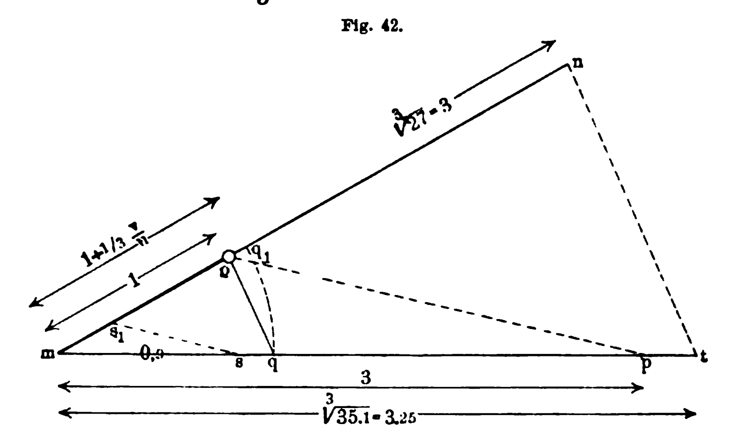
Ferner trägt man von m nach q_1 die Länge $1 + \frac{1}{n}\frac{v}{u}$ auf u. überträgt sie durch Kreisbogen nach $\overline{mq}$, ebenso wird $\sqrt[n]{u}$ nach $\overline{mn}$ übertragen; um nun die Multiplikation $\left(1 + \frac{1}{n}\frac{v}{u}\right)\sqrt[n]{u}$ auszuführen, verbindet man q mit o und zieht zu $\overline{oq}$ die Parallele $\overline{nt}$, so wird $\overline{mt}$ das Produkt $x = \sqrt[n]{u + v}$.

Beispiele.

I. Es soll graphisch ausgeführt werden $\sqrt[3]{35,1}$, Fig. 42. Man zerlegt 35,1 in $u + v = 27 + 8,1$, erhält demnach $\sqrt[3]{35,1} = \sqrt[3]{27 + 8,1}$ oder $\sqrt[3]{35,1} = \sqrt[3]{27\left(1 + \frac{8,1}{27}\right)}$, das ist aber nach Gl. 7 $\sqrt[3]{27}\left(1 + \frac{8,1}{3 \cdot 27}\right)$ oder $\sqrt[3]{27}\left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{0,9}{3}\right)$. Die graphische Rechnung ist nach

Fig. 40 durchgeführt. Der Endpunkt der Einheit o ist mit p, dem Endpunkt des Divisors 3 in $\frac{0,9}{3}$ verbunden, während 0,9 nach $\overline{ms}$ übertragen

Fig. 42.



wurde, durch s eine Parallele zu op gezogen, erhält man $\overline{ms_1} = \frac{0,9}{3}$; der 3. Teil dieser Länge zu $1 = \overline{mo}$ addiert, giebt $\overline{mq_1} = \overline{mq}$. Die Multiplikation von $1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{0,9}{3}$ mit $\overline{mn} = \sqrt[3]{27} = 3$ liefert dann das Resultat $\overline{mt} = 3,25$ 3,27.

II. Um die 6. Wurzel aus 136,8 auf graphischem Wege zu berechnen, zerlegen wir die Grundzahl in 64 + 72,8; es ist dann

$$\sqrt[6]{136,8} = \sqrt[6]{64 + 72,8} = \sqrt[6]{64\left(1 + \frac{72,8}{64}\right)};$$

nach Gl. 7 lässt sich dann genau genug setzen

$$\sqrt[6]{136,8} = \sqrt[6]{64}\left(1 + \frac{1}{6} \cdot \frac{72,8}{64}\right) = \sqrt[6]{64}\left(1 + \frac{1}{6}\,\frac{5,6}{4,92}\right), \text{ worin}$$

$$\sqrt[6]{64} = 2.$$

In Figur 43 sind dieselben Buchstaben wie in den obigen zu Grunde gelegt, wir erhalten sonach durch $\overline{ms_1}$ wieder $\frac{v}{u} = \frac{5,6}{4,92}$, $\overline{mq} = 1 + \frac{1}{6}\,\frac{v}{u}$ und durch $\overline{mt} = 2,35$ das Resultat, (genau ist $\sqrt[6]{136,8} = 2,27$).

II. Es sei die 3. Wurzel (Fig. 44) aus 99,5 graphisch zu be-
en. Wir haben u = 64 und v = 35,5 gesetzt, so dass

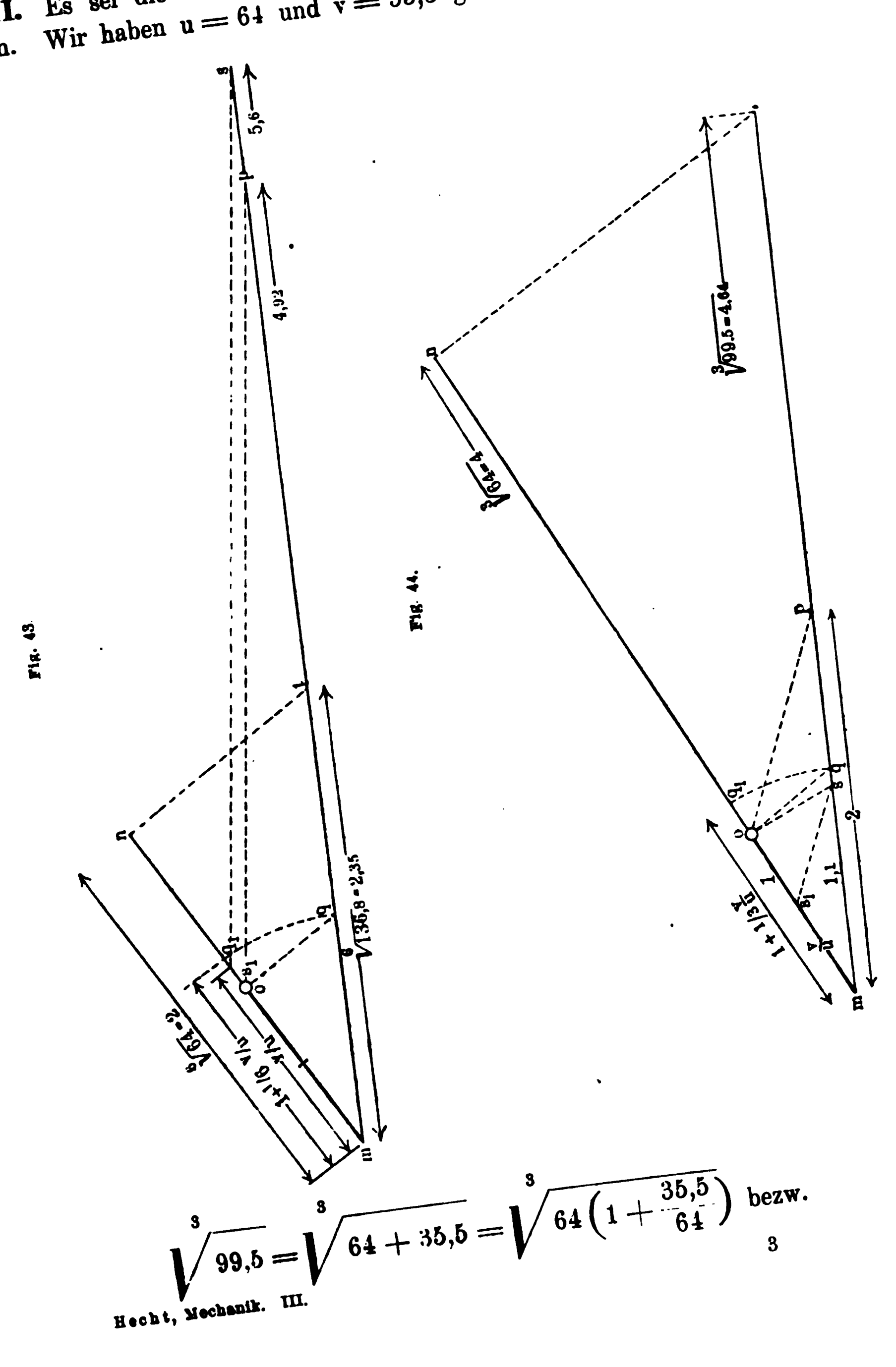


Fig. 43.
Fig. 44.

$$\sqrt[3]{99,5} = \sqrt[3]{64 + 35,5} = \sqrt[3]{64\left(1 + \frac{35,5}{64}\right)} \text{ bezw.}$$

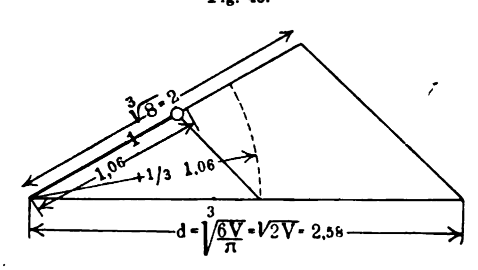
$$\sqrt[3]{99{,}5} = \sqrt[3]{64\left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1{,}10}{2}\right)} \text{ wird.}$$

Man erhält durch $\overline{m s_1} = \frac{v}{u} = \frac{1{,}1}{2}$ und es wird $\overline{mq} = 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1{,}1}{2}$, die graphische Multiplikation mit $\sqrt[3]{64} = 4$ liefert $\overline{mt} = 4{,}64$.

IV. Das Volumen einer Kugel sei V = 8,24 cbm; es soll der Durchmesser $d = \sqrt[3]{\frac{6\,V}{\pi}}$ auf graphischem Wege gefunden werden.

Die vorstehende Formel, aus $V = \frac{\pi}{6}\, d^3$ entnommen, lässt sich

Fig. 45.



näherungsweise schreiben $d = \sqrt[3]{2\,V} = \sqrt[3]{16{,}48}$, wenn V eingesetzt wird. Zerlegt man 16,48 in u = 8, v = 8,48, dann wird $\sqrt[3]{16{,}48} = \sqrt[3]{8}\left(1 + \frac{1}{3}\, 1 \cdot 06\right)$. Wir haben in Fig. 45 neben der Einheit 1,06 aufgetragen und $1 + \frac{1}{3} \cdot 1{,}06$ mit $\sqrt[3]{8} = 2$ multipliziert, erhalten 2,71 (gegenüber dem genaueren Wert 2,51) als Resultat.

V. Der Inhalt eines ringförmigen Querschnitts ist $F = \pi\,(R^2 - r^2)$, wenn R und r die bezügl. Kreishalbmesser. Um die Formel graphisch darzustellen, betrachten wir $\frac{F}{\pi} = R^2 - r^2$ als die Differenz zweier Quadrate, trägt man $R = \overline{oq}$ und $r = \overline{pq}$ als Hypotenuse und Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks, Fig. 46, auf, so ist die andere Kathete $\overline{op}$ dann offenbar $\sqrt{\frac{F}{\pi}}$. Quadriert man die Länge, so ergiebt sich $\overline{nn_1}$ als $\frac{F}{\pi}$; eine graphische Multiplikation mit π, indem man $\frac{F}{\pi}$ von o nach

s und π auf die verlängerte Einheit von m aus anträgt, führt zu der Länge o_1t, das ist die fragliche Fläche.

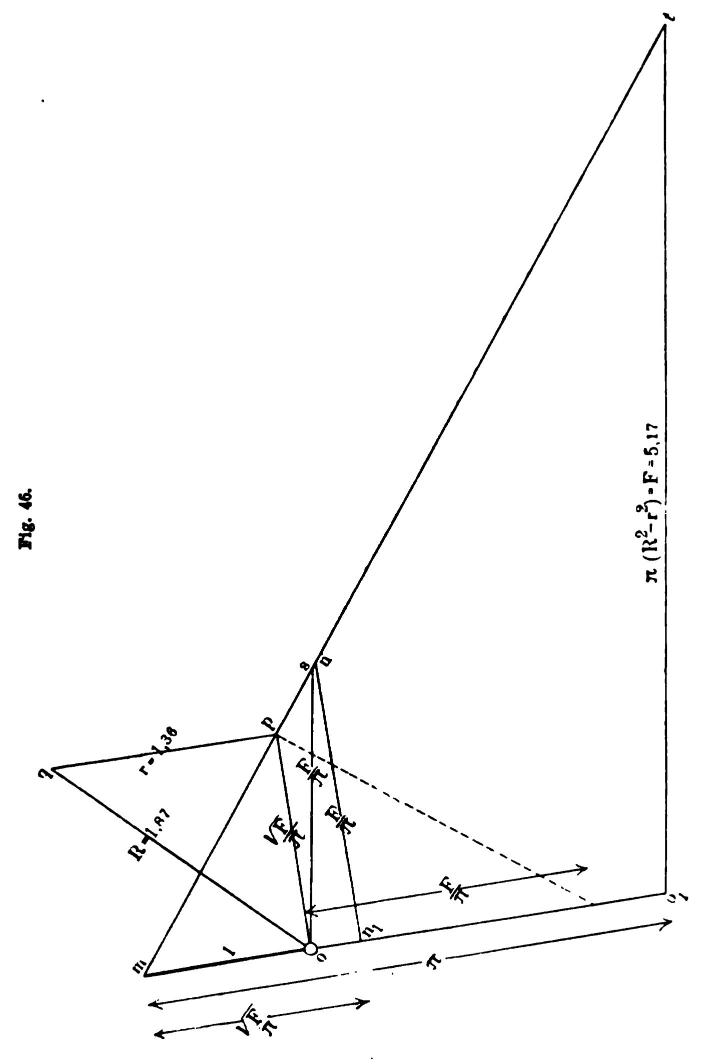


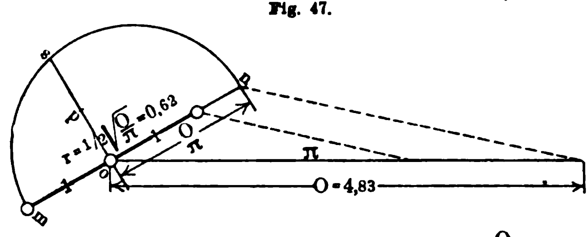
Fig. 46.

Die Radien R und r sind in der Fig. $1{,}87^{m}$ und $1{,}36^{m}$ angenommen, man bekommt aus derselben $5{,}17^{qm}$ als Ringquerschnitt.

VI. Es sei, Fig. 47, $O = 4{,}83^{qm}$ die Oberfläche einer Kugel gegeben; man soll graphisch den Kugelhalbmesser ermitteln.

Bekanntermassen ist $O = 4\, r^2 \pi$, mithin $r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{O}{\pi}}$.

Fig. 47.



Führen wir zunächst eine graphische Division $\frac{O}{\pi}$ aus, so erhalten wir durch $\overline{on}$ das hierauf bezügl. Resultat, die Hälfte der Wurzel aus $\frac{O}{\pi}$, die Länge $op = \frac{1}{2}\overline{os}$, bezw. $r = 0{,}62$ giebt das gesuchte Resultat.

VII. Wir haben im II. Band bei Gelegenheit der Anwendungen

Fig. 48.

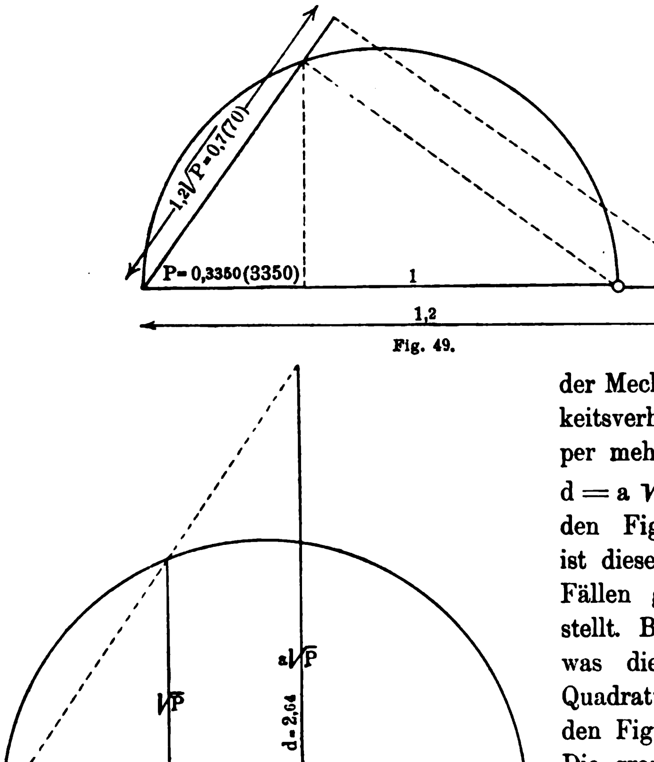


Fig. 49.

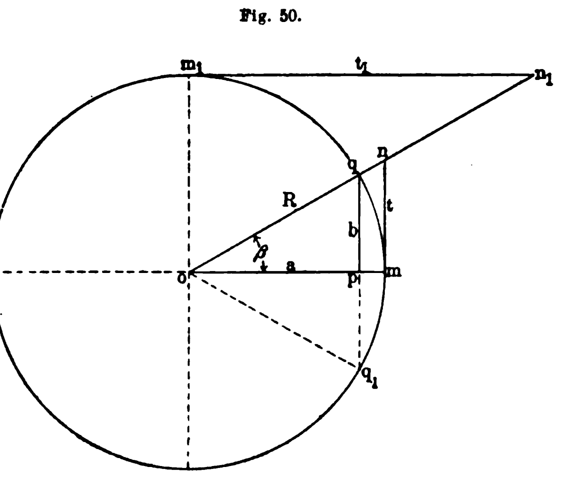
der Mechanik auf Festigkeitsverhältnisse der Körper mehrfach die Formel $d = a\sqrt{P}$ angewandt, in den Figuren 48 und 49 ist diese Formel in zwei Fällen graphisch dargestellt. Beide entsprechen, was die Auflösung der Quadratwurzel anlangt, den Figuren 36 und 37. Die graph. Multiplikationen sind der betr. Einheit unmittelbar angereiht.

In Fig. 48 wurde $1{,}2\sqrt{3350}$, in Fig. 49 $1{,}8\sqrt{215}$ ausgeführt, beide Figuren liefern 70, bezw. $d = 2{,}64$ (26,4).

5. Die graphische Darstellung der trigonometrischen Funktionen.

Bekanntlich sind die trigonometrischen Funktionen bestimmte Verhältnisse zwischen Katheten und Hypotenuse und Katheten unter sich in einem rechtwinkeligen Dreieck. Denken wir uns ein solches o p q, Fig. 50, in einen Kreis, dessen Halbmesser $\overline{oq} = R$, eingezeichnet, so ist b die halbe Sehne, $b = \frac{1}{2}\,\overline{qq_1}$, indem $\overline{qq_1}$ die ganze den Winkel 2β stützende Linie (Sehne, Winkelstütze = sinus, lat.) ist. Man nennt das Verhältnis der halben Sehne zum Halbmesser $\frac{b}{R}$ das Sinusverhältnis oder kurzweg den Sinus des Winkels β; weil nun die Linie a, die Projektion des Halbmessers auch abhängig von derselben Winkelweite, der Sehne koordinierend, zugehörend, ist, so nennt man das Verhältnis $\frac{a}{R}$ das koordinierende Sinus- oder abgekürzt das Kosinusverhältnis, den Kosinus des Winkels β; $\sin\beta = \frac{b}{R}$, $\cos\beta = \frac{a}{R}$.

Fig. 50.



Errichtet man eine Tangente in m, so steht deren Länge t, von $< \beta$ abhängig, in demselben Verhältnis zum Halbmesser $\overline{om} = R$, wie b zur Linie a; man nennt darum das Verhältnis $\frac{b}{a}$ das Sinus-Kosinus- oder Tangentenverhältnis, so dass $\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{b}{a} = \operatorname{tang}\beta$. Ferner ist die Länge der Linie $m_1 n_1$ wieder zugehörend, koordinierend zur Tangentenlänge $\overline{mn}$, und zwar verhält sich $\overline{m_1 n_1} : \overline{om_1} = a : b$ oder $\frac{t_1}{R} = \frac{a}{b}$, man

Fig. 51.

Fig. 52.

nennt darum dieses Verhältnis das Kotangentenverhältnis zum Winkel β mit der Bezeichnung cotang $\beta = \frac{a}{b} = \frac{\cos\beta}{\sin\beta}$.

Bei Veränderungen des Winkels β zwischen 0° und 90°, und 0° und 360° kann man leicht das Wachstum und die Abnahme der uns besonders interessierenden Linien a, b, t und t_1 und hiermit den Verlauf der trigonometrischen Funktionen erkennen, aber auch, dass das Bogenverhältnis $\overset{\frown}{qm} : R$ zwischen dem Sinus b und der Tangente t liegt; für ganz kleine Winkel ist $\sin\beta = \overset{\frown}{\beta} = \text{tang}\,\beta$. Trägt man in einem Viertelkreis vom Halbmesser $R = 1000^{mm} = 1^{m}$ sämtliche Winkel von 0° bis 90° ein, so geben die Abmessungen der fraglichen Linien a, b, t, t_1 die trigonometrischen Verhältnisse unmittelbar*), für $\beta = 30°$ würde $b = 0{,}5^{m} = 500^{mm}$, $a = 866^{mm} = 0{,}866^{m}$, $t = 577^{mm} = 0{,}577^{m}$, $t_1 = 1{,}732^{m}$ und die Bogenlänge $\overset{\frown}{mq} = 0{,}524^{m}$ sein.

Die beistehenden Figuren 51 und 52 sind eine Erweiterung der Fig. 20 und 21, der Winkel bei m ist mit φ bezeichnet.

Man erkennt, dass $\frac{\overline{mo}}{a} = \cos\varphi$, d. i. $\frac{1}{a} = \cos\varphi$, also $a = \frac{1}{\cos\varphi}$ ist, ganz ebenso ist $\frac{\overline{mn}}{\overline{mo}}$ oder $\frac{c_1}{\overline{mo}} = \cos\varphi$, d. i. $c_1 = \overline{mo}\cos\varphi = \cos\varphi$.

Da nun $c_1 = \frac{1}{a}$, $c_2 = \frac{1}{a^2}$, $c_3 = \frac{1}{a^3}$, $c_4 = \frac{1}{a^4}\ldots$, so ergiebt sich für die beliebige Zahl a, bezogen auf die Einheit $\overline{mo} = 1$,

$$c_1 = \cos\varphi,\ c_2 = \frac{1}{a^2} = \cos^2\varphi,\ c_3 = \frac{1}{a^3} = \cos^3\varphi,\ c_4 = \frac{1}{a^4} = \cos^4\varphi \quad (8)$$

In dem Dreieck mno Fig. 51 ist ferner $\frac{\overline{no}}{\overline{mo}} = \sin\varphi$, hiernach ist $\frac{s_1}{1} = \sin\varphi$ also $s_1 = \sin\varphi$. Da nun $s_2 = s_1 \sin\varphi$, $s_3 = s_2 \sin\varphi$, $s_4 = s_3 \sin\varphi$, so entwickeln sich die Potenzen des Sinus als Längeneinheiten für $\overline{mo} = 1$ aus

$$s_1 = \sin\varphi,\ s_2 = \sin^2\varphi,\ s_3 = \sin^3\varphi,\ s_4 = \sin^4\varphi \quad . \quad . \quad (9)$$

Eine weitere Vergleichung mit Fig. 20 führt zu $\overline{md} = a^2 = \frac{1}{\cos^2\varphi}$,

*) S. d. Tab. im Anhang.

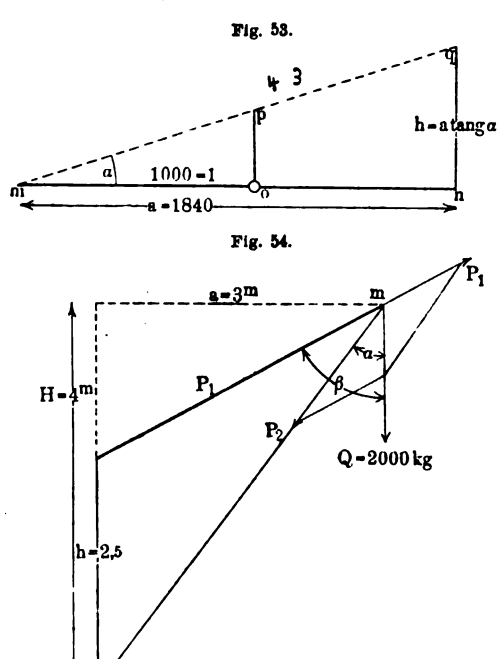
$\overline{me} = a^3 = \frac{1}{\cos^3 \varphi} \ldots,$ ferner weil $\frac{\overline{mo}}{mf} = \sin \varphi$, so folgt $\frac{1}{s_0} = \sin \varphi$, demnach $s_0 = \frac{1}{\sin \varphi}$ u. s. w., endlich kann man in Bezug auf die Längen t_1 und t_0 weiter schliessen, da $\frac{t_1}{\overline{md}} = \sin \varphi$ und $t_1 = t_0 \cos \varphi$, dass $t_1 = \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{\operatorname{tang} \varphi}{\cos \varphi}$, $t_0 = \frac{t_1}{\cos \varphi} = \frac{\operatorname{tang} \varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{\sin \varphi}{\cos^3 \varphi}$ u. s. w.

Entwickelt man die positiven und negativen Potenzen im Sinne der Fig. 18 bezw. 19, so stellt man für die Einheit $\overline{mo} = 1$ gleichzeitig die Potenzen von tang φ und cotang φ dar. Figur 52 liefert unmittelbar aus

$$\frac{t}{1} = \operatorname{tang} \varphi,\ t = \operatorname{tang} \varphi,\ t^2 = \operatorname{tg}^2 \varphi,\ t^3 = \operatorname{tg}^3 \varphi,\ \frac{1}{t} = \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} = \operatorname{cotg} \varphi \text{ etc.} \qquad (10)$$

Beispiele.

I. Es soll die Höhe eines Turmes auf graphischem Wege berechnet werden. Den Elevationswinkel, Fig. 53, fand man in der Entfernung $a = 1840^m$ zu $\alpha = 17° 50'$, die Höhe ist dann $h = a \operatorname{tang} \alpha$. Trägt man an die Einheit $\overline{mo} = 1$ den Winkel α an, dann folgt durch graphische Multiplikation $1 : \overline{op} = a : \overline{nq}$, das ist $1 : \operatorname{tang} \alpha = a : h$, woraus $h = a \operatorname{tang} \alpha = 590^m$.



II. Es ist Fig. 54 ein Krahnausleger von $a = 3^m$ Ausladung und $H = 4$, bezw. $h = 2{,}5^m$ Säulenhöhe gegeben, in m wirkt eine Last von $Q = 2000$ kg. Wie lassen sich die durch die Zerlegung bei m resultierenden trigonometrischen Ausdrücke für P_1 und P_2 arithmographisch berechnen?

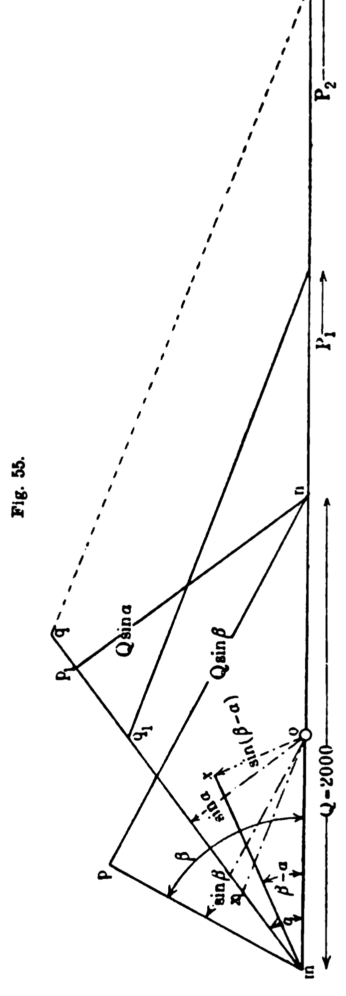
Betrachtet man Q als Resultierende der Teilkräfte P_1 P_2, so findet sich aus der Proportion (s. Bd. I, S. 70).

$P_1 : \sin\alpha = Q : \sin(\beta - \alpha)$, $P_1 = Q \frac{\sin\alpha}{\sin(\beta - \alpha)}$, und aus $P_2 : \sin[180 - (\alpha + \beta - \alpha)] = Q : \sin(\beta - \alpha)$,

$$P_2 = Q \frac{\sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)}.$$

P_1 ist Zug- und P_2 Druckkraft.

Um die Formeln für P_1 und P_2 graphisch darzustellen, haben wir in Fig. 55 $Q \sin\alpha$ und $Q \sin\beta$ entwickelt. $\overline{om}$ ist die Einheit für 1000 kg, die Grösse $\overset{\frown}{mn} = 2$ ist sonach dem Wert Q gleich. Man überträgt aus Fig. 54 die beiden Winkel α und β und fällt von dem Endpunkt der Kraft Q, von n, die Senkrechten np und np_1 auf die übertragenen Winkelschenkel; die Längen $\overline{np}$ und $\overline{np_1}$ sind dann die Produkte $Q \sin\alpha$ und $Q \sin\beta$. Die Senkrechten von o aus auf $\overline{mp}$ und $\overline{mp_1}$ sind die sin der Winkel α und β. Zur Darstellung des Nenners $\sin(\beta - \alpha)$ trägt man $\angle \beta - \alpha$ an $\overline{om}$ an und fällt die Senkrechte $\overline{ox} = \sin(\beta - \alpha)$; die letztere, sowie die Längen $\overline{np}$ und $\overline{np_1}$ der obigen Produkte werden nun auf $\overline{mq}$ übertragen, so dass $\overline{ox} = \overline{mx_1}$, $\overline{mq} = \overline{np}$, $\overline{mq_1} = \overline{np_1}$.



Verbindet man o mit x_1 und zieht durch q und q_1 Parallele zu dieser Verbindungslinie, so schneiden diese auf der verlängerten Einheit P_1 und P_2 ab; denn es verhält sich $\overline{mx_1} : \overline{mo} = \overline{mq_1} : P_1$ und $\overline{mx_1} : \overline{mo} = \overline{mq} : P_2$, somit

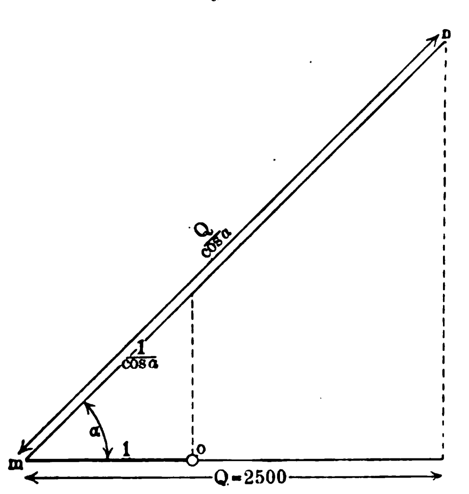
$$P_1 = \frac{\overline{mo} \cdot \overline{mq_1}}{\overline{mx_1}} = \frac{Q \sin\alpha}{\sin(\beta - a)}, \quad P_2 = \frac{\overline{mo} \cdot \overline{mq}}{\overline{mx_1}} = \frac{Q \sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)}.$$

Die Zeichnung ergiebt als Zugkraft $P_1 = 2900$ kg und für $P_2 = 4100$ kg.

III. Ist in Fig. 54 der Winkel $\beta = 90°$, also die obere Zugstange horizontal, dann ist die Kraft in der Druckstrebe $P_2 = \frac{Q}{\cos \alpha}$; aus der letzten Formel des vorigen Beispieles folgt $P_2 = \frac{Q}{\sin(90 - \alpha)} = \frac{Q}{\cos \alpha}$.

In Fig. 56 haben wir für $Q = 2500$ kg und $\alpha = 45°$ P_2 graphisch berechnet. Errichtet man am Endpunkt einer Einheit $\overline{mo}$ in o eine

Fig. 56.



Senkrechte und schneidet diese mit dem Winkelschenkel unter 45°, so ist die Hypotenuse die Reciproke des Kosinus. Trägt man von m an die Gegebene $Q = 2500$ (2,5 als Längenmass) an, so führt die graphische Multiplikation zu $\overline{mn} = \frac{Q}{\cos \alpha}$.

Bezogen auf die Einheit $\overline{mo}$ erhält man aus der Figur das Resultat 3,54, das sind 3540 kg Druckkraft.

Die Zugkraft in der horizontalen Strebe wird $P_1 = \frac{Q \sin \alpha}{\sin(90 - \alpha)}$ oder $P_1 = Q \operatorname{tang} \alpha$, welche Formel nach dem Verfahren Fig. 53 arithmographisch ausgeführt werden kann.

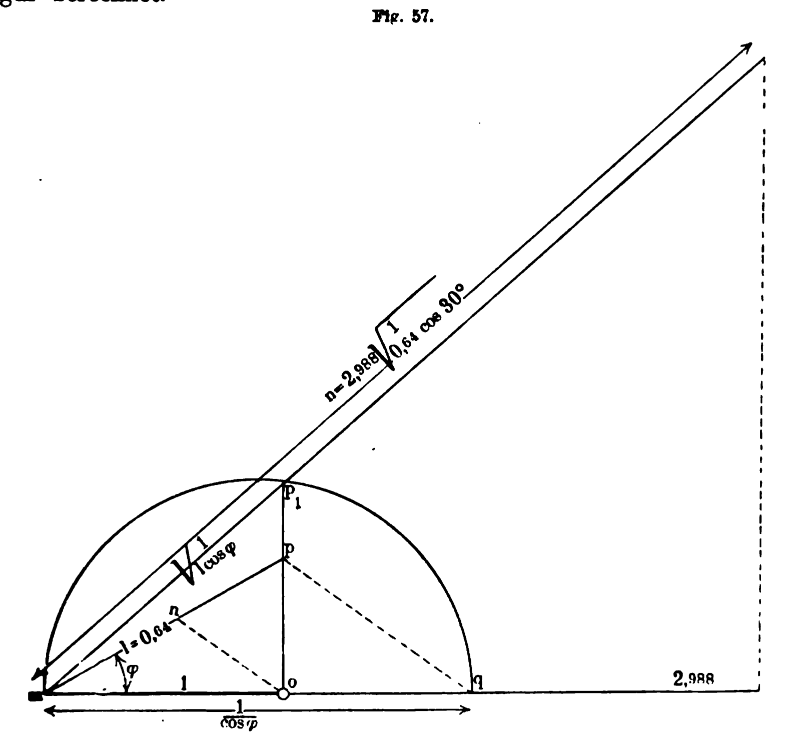
IV. Ist l die Pendellänge eines sog. Watt'schen Centrifugalpendel-

regulators (s. Bd. I, S. 363), der Ausschlagwinkel $\varphi = 30°$, dann sind die Umdrehungen pro Minute nach der Formel zu berechnen

$$n = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{g}{l \cos \varphi}} = 29{,}88 \sqrt{\frac{1}{l \cos \varphi}} = 10 \cdot 2{,}988 \sqrt{\frac{1}{l \cos \varphi}}.$$

Wir haben für $l = 0{,}64^m$ und $\varphi = 30°$, n graphisch in beistehender Figur berechnet.

Fig. 57.



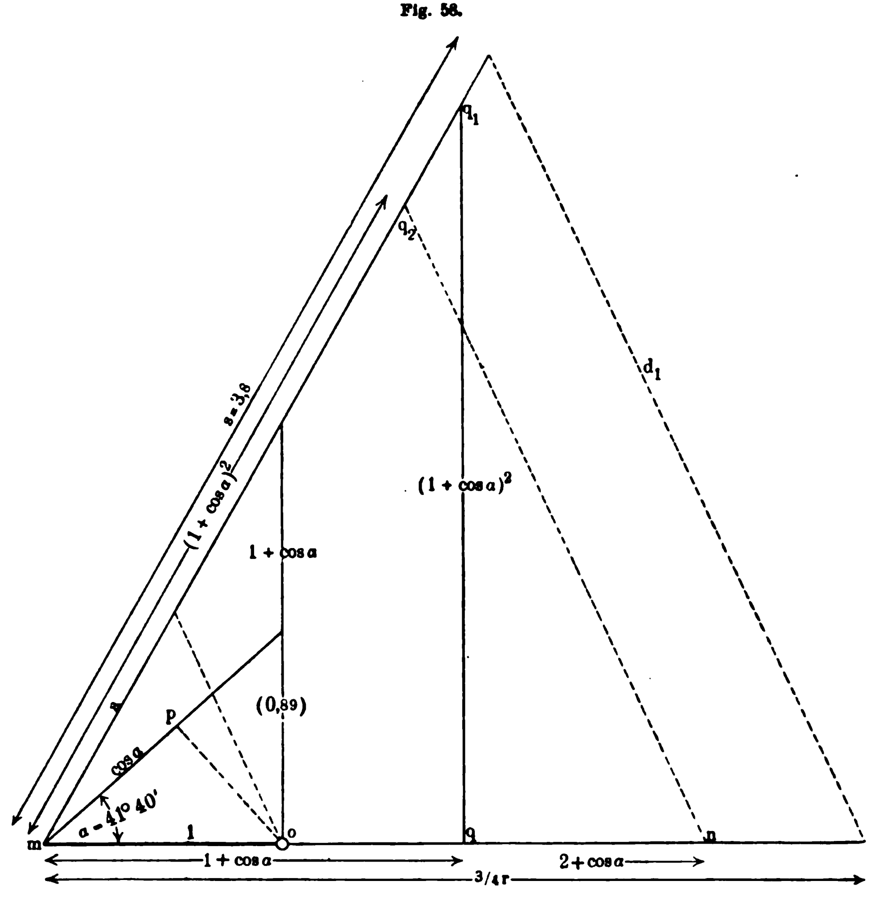
Man trägt zunächst an $\overline{mo} = 1$ den Winkel $\varphi = 30°$ an, es ist dann im rechtw. Dreieck mop, weil $\frac{\overline{mo}}{\overline{mp}} = \cos \varphi$, $\overline{mp} = \frac{1}{\cos \varphi}$. Trägt man ferner von m aus $l = 0{,}64$ auf $\overline{mp}$ ab, und verbindet den Endpunkt mit o, so verhält sich $\overline{mn} : 1 = \overline{mp} : \overline{mq}$, woraus $\overline{mq} = \frac{\overline{mp}}{\overline{mn}} = \frac{1}{l \cos \varphi}$.

Konstruiert man auf $\overline{mq}$ einen Halbkreis und verlängert $\overline{op}$ bis p_1, dann ist, wie uns bekannt, $\overline{mp_1}$ die Quadratwurzel aus $\overline{mq}$, somit

$\overline{mp_1} = \sqrt{\frac{1}{1 \cos \varphi}}$. Die graphische Multiplikation mit 2,988 ergiebt 40 Umdrehungen.

V. Der Schwerpunktsabstand vom zugehörigen Kugelmittelpunkt eines Kugelsegmentes ist (s. Bd. I, S. 94) $s = \frac{3}{4} r \frac{(1 + \cos \alpha)^2}{2 + \cos \alpha}$. Wir haben

Fig. 58.



in Fig. 58 für $\alpha = 41° 40'$ und dem Kugelhalbmesser $r = 4{,}564^m$, s graphisch berechnet; der Winkel α umfasst hierbei die halbe Schnittbogenlänge des Segmentes.

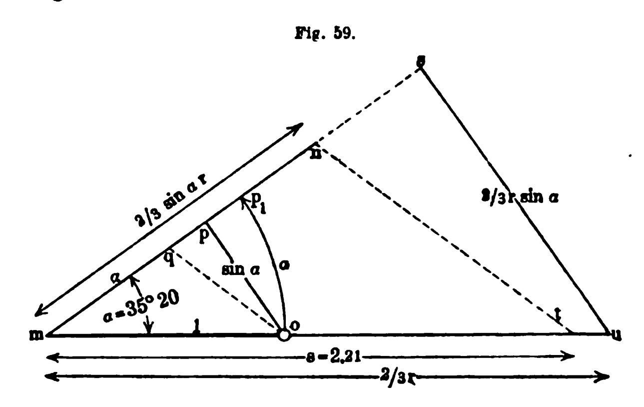
Der Schwerpunkt dieses Kugelabschnittes liegt, wie die Konstruktion der Fig. ergiebt, in $s = 3{,}8^m$ Entfernung vom Mittelpunkt des Kugelmittels, von welcher das Segment abgeschnitten wurde.

Die trigonometrische Tangente des gegebenen Winkels ist tang 41° 40 = 0,89*), trägt man an die Einheit $\overline{mo} = 1$ eine Senkrechte von der Länge 0,89, dann ist der Winkel von 41° 40′ durch den Schnitt der Hypotenuse mit der Senkrechten konstruktiv bestimmt. Die Senkrechte $\overline{po}$ auf die Letztere schneidet den Kosinus ab; $\overline{mq}$ ist dann $1 + \cos\alpha$ und diese Länge senkrecht zur Einheit in o errichtet, ergiebt nach bekannter Konstruktion $(1 + \cos\alpha)^2 = \overline{qq_1}$.

Wir haben nun $\overline{qq_1}$ nach $\overline{mq_2}$ und $2 + \cos\alpha$ nach $\overline{mn}$ übertragen, q_2 mit n verbunden und durch o (der Einheit) eine Parallele gezogen, man erhält dann die Division $a = \frac{(1 + \cos\alpha)^2}{2 + \cos\alpha}$. Um endlich die Multiplikation mit $^3/_4\, r$ auszuführen, trägt man $^3/_4\, r$ von m aus auf die untere horizontale Linie und zieht, wie bekannt, d_1 parallel zu nq_2, welche auf der Verlängerung von $\overline{mq_1}$ $s = 3{,}8$ abschneidet; denn es verhält sich $a : 1 = s : {^3/_4}\, r$.

VI. Der Schwerpunkt eines Kreisausschnittes liegt vom Mittelpunkt des Kreises in der Entfernung $s = {^2/_3}\, r\, \frac{\sin\alpha}{\alpha}$. Der halbe Bogenwinkel sei $\alpha = 35°\, 20'$, der Radius $r = 3{,}543^m$. An die Einheit $\overline{mo}$, Fig. 59, tragen wir den Winkel α an und fällen von o aus auf den

Fig. 59.



Schenkel $\overline{ms}$ die Senkrechte $\overline{op}$ und schlagen von m den Bogen $\overline{op_1}$ mit dem Radius als Einheit; es ist dann $\overline{op}$ der $\sin\alpha$ und $\overline{op_1} = \widehat{\alpha}$. Trägt man $^2/_3\, r = \overline{mu}$ von m nach u, und zieht su parallel zu op, dann verhält sich $1 : \sin\alpha = {^2/_3}\, r : \overline{su}$, woraus $\overline{su} = {^2/_3}\, r \sin\alpha$.

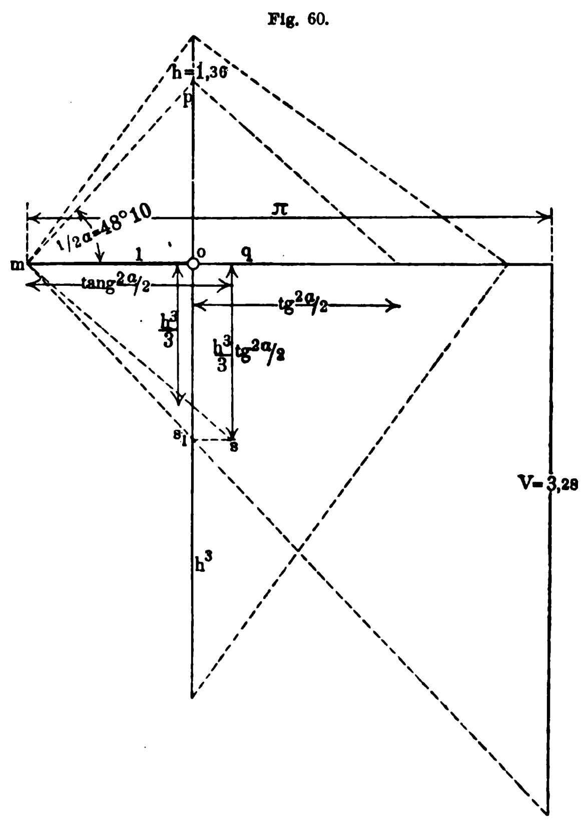
*) S. d. Tab. im Anhang.

Überträgt man op_1 nach mq und $\overline{su}$ nach $\overline{mn}$, zieht $\overline{nt}$ parallel zu $\overline{oq}$, so haben wir eine graphische Division ausgeführt und erhalten $s = 2{,}21^m$, denn es gilt die Proportion $\alpha : 1 = \overline{mn} : \overline{mt}$, woraus

$$\overline{mt} = \frac{mn}{\alpha} = {}^2/_3 \frac{r \sin \alpha}{\alpha} = s.$$

VII. Es soll der Inhalt eines geraden Kegels graphisch berechnet werden, wenn die Höhe $h = 1{,}36$ und der Winkel an der Spitze $\alpha = 96^\circ\ 20'$ gegeben sind.

Fig. 60.



Die Grundfläche ist $f = r^2 \pi$, oder weil $r = h \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2}$,

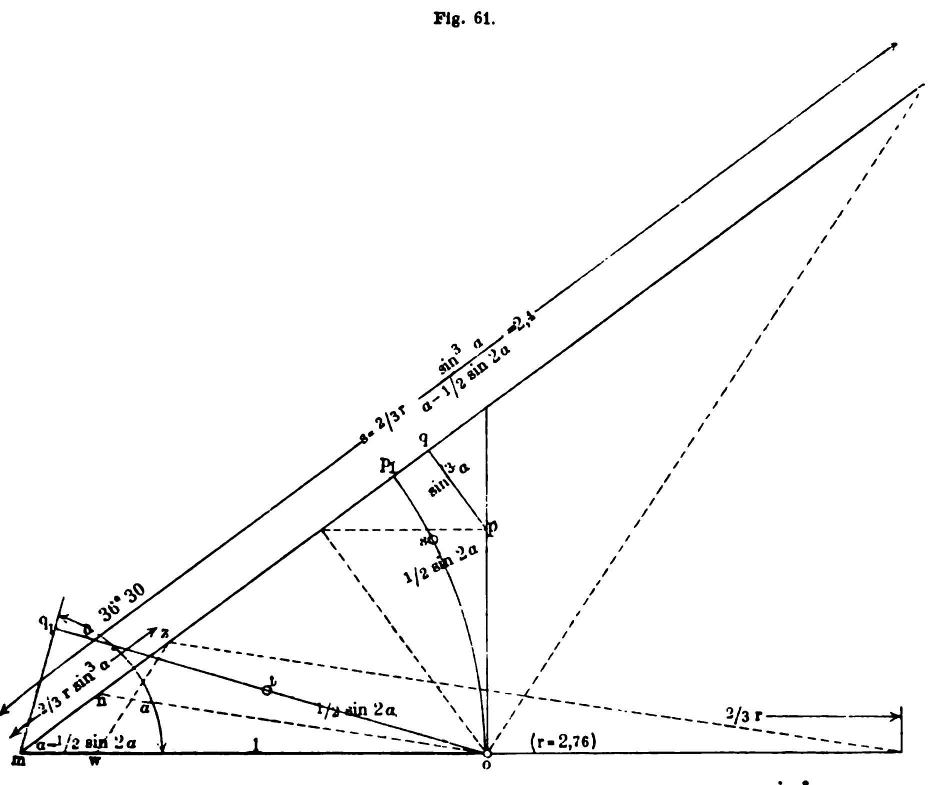
$$f = \pi\, h^2 \operatorname{tang}^2 \frac{\alpha}{2}; \text{ der Inhalt } V = {}^1/_3\, r^2 \pi\, h = {}^1/_3\, \pi\, h^3 \operatorname{tang}^2 \frac{\alpha}{2}.$$

In Fig. 60 haben wir an die Einheit $\overline{mo} = 1$ den Winkel $\frac{\alpha}{2} = 48^\circ\ 10'$ und die Senkrechte in o, $h = 1{,}36$ aufgetragen, und nach be-

kannter Konstruktion $\tang^2 \frac{\alpha}{2}$ und h^3 ermittelt, $\tang \frac{\alpha}{2}$ findet sich unmittelbar durch den Schnittpunkt p; $\overline{op} = \tang \frac{\alpha}{2}$. Das Produkt $\frac{h^3}{3} \tang^2 \frac{\alpha}{2}$ stellt die Linie $\overline{qs}$ dar, denn es verhält sich $1 : \frac{h^3}{3} = \overline{mq} : \overline{qs}$, womit $\overline{qs} = \frac{h^3}{3} \overline{mq} = \frac{h^3}{3} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$. Überträgt man s nach s_1 und den Wert $\pi = 3{,}14$ von m in die Horizontale, so erhält man durch eine weitere graphische Multiplikation $V = 3{,}28$ cbm.

VIII. Es soll der Schwerpunkt eines Kreisabschnittes graphisch bestimmt werden, Fig. 61.

Fig. 61.



Der Schwerpunkt liegt in der Entfernung $s = {}^2/_3\, r \frac{\sin^3 \alpha}{\alpha - {}^1/_2 \sin 2\alpha}$ vom Kreismittelpunkt (s. Band I, Seite 97). In dieser Formel ist r der Halbmesser und α der den Abschnitt einschliessende Centriwinkel, $\alpha = 36^\circ\ 30'$. Wir tragen diesen Winkel an die

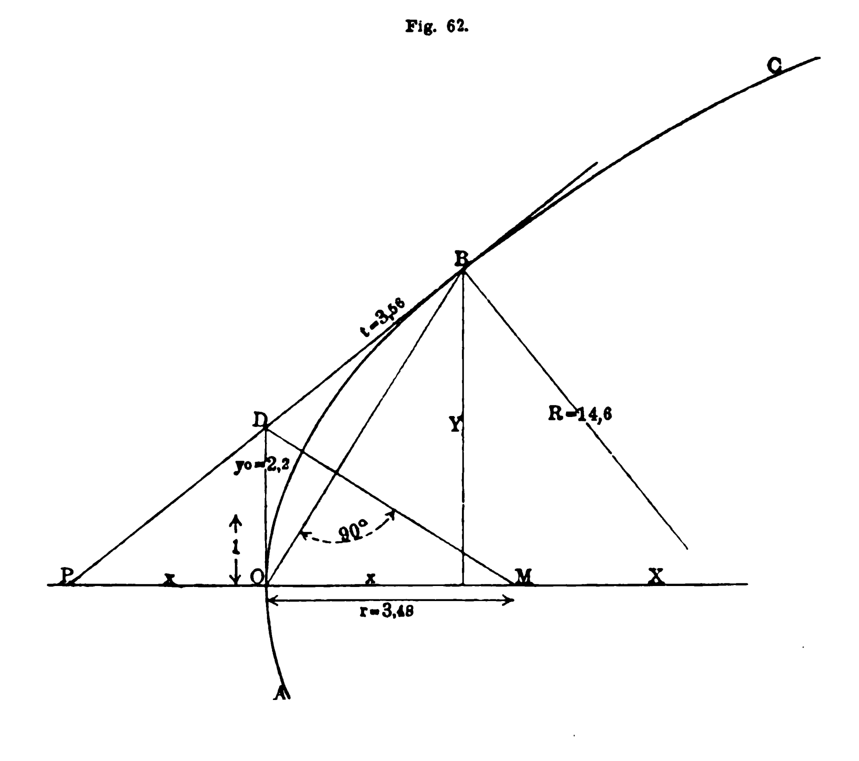
Einheit $\overline{mo} = 1$ an und suchen zunächst $\sin^3 \alpha = \overline{pq}$; durch Antragen des doppelten Winkels ergiebt sich ferner $\sin 2\alpha = \overline{oq_1}$. Schlagen wir jetzt den Bogen $\widehat{op_1} = \alpha$ und ziehen von diesem die halbe Länge $\overline{oq_1}$ ab, so bleibt, $\widehat{os} = \overline{ot}$ gemacht, als Differenz $\overline{p_1 s} = \alpha - {}^1/_2 \sin 2\alpha$. Zur Ausführung der graphischen Multiplikation ${}^2/_3\, r \cdot \sin^3 \alpha$ übertragen wir $\overline{pq}$ nach mn, verbinden n mit o und ziehen durch den Endpunkt der aufgetragenen ${}^2/_3\, r$ eine Parallele hierzu, dann ist $\overline{mz}$ das fragliche Produkt, der Zähler des Bruches $\dfrac{{}^2/_3\, r \sin^3 \alpha}{\alpha - {}^1/_2 \sin 2\alpha}$. Den Nenner $\overline{p_1 s}$ tragen wir nach $\overline{mw}$, verbinden w mit z und ziehen durch o hierzu eine Parallele, welche auf der Verlängerung von $\overline{mq}$ die Schwerpunktsentfernung s abschneidet; die letzte Division erklärt sich durch die Proportion

$$\overline{mw} : \overline{mz} = 1 : s, \text{ woraus } s = \frac{\overline{mz}}{\overline{mw}} = \frac{{}^2/_3\, r \sin^3 \alpha}{p_1 s} = \frac{{}^2/_3\, r \sin^3 \alpha}{\alpha - {}^1/_2 \sin 2\alpha}.$$

Die Zeichnung ergiebt die Länge $s = 2{,}4$.

IX. In nachstehender Zeichnung, Fig. 62, sei AOBC ein Kegelschnitt, eine Parabel, Ellipse, Hyperbel oder auch ein Kreis.

Fig. 62.



BP eine Tangente am Berührungspunkt B. Verbindet man B mit dem Scheitel der Kurve O, und errichtet in O die Senkrechte OD auf die Achse der Kurve OX, so schneidet eine Senkrechte auf OB durch D auf OX die Länge OM ab. Es lässt sich nun der Nachweis liefern*), dass OM der kleinste Krümmungsradius r ist, d. h. ein mit diesem Halbmesser durch den Scheitel O gehender Kreis ersetzt einen Teil der Kurve nahezu oder bildet mit dem Kegelschnitt eine Berührung II. Grades. Misst man ferner $DB = t$ und die Senkrechte $OD = y_0$, so findet man den Krümmungsradius R im Berührungspunkt B aus der Beziehung

$$R = r\left(\frac{t}{y_0}\right)^3 \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

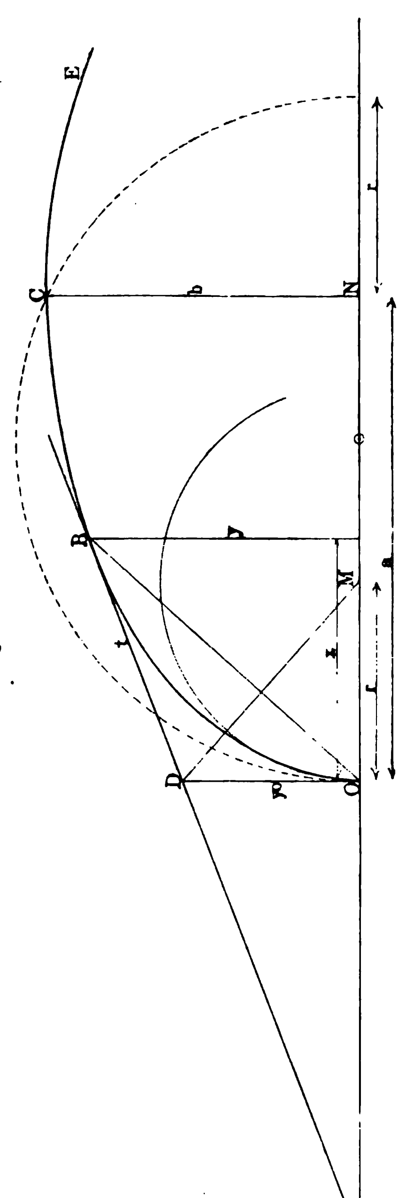


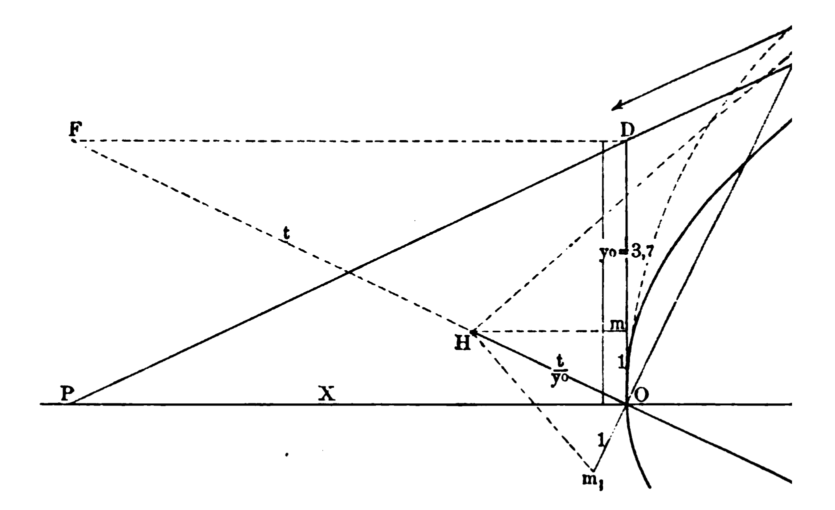
Fig. 63.

In der Figur haben wir eine parabolische Kurve zu Grunde gelegt, die Tangente PB findet sich, indem man die Abscisse x nach OP überträgt und P mit B verbindet, ferner ist $t = 3{,}56$, $y_0 = 2{,}2$; $r = 3{,}48$ nach der in der Fig. verwendeten Einheit; man erhält dann $R = 3{,}48\left(\frac{3{,}56}{2{,}20}\right)^3 = 14{,}6$. Eine genaue Rechnung**) ergiebt 14,66; der Parameter, das ist die Senkrechte auf die Achse durch den Brennpunkt der Parabel ist $p = 2\,r = 6{,}96$.

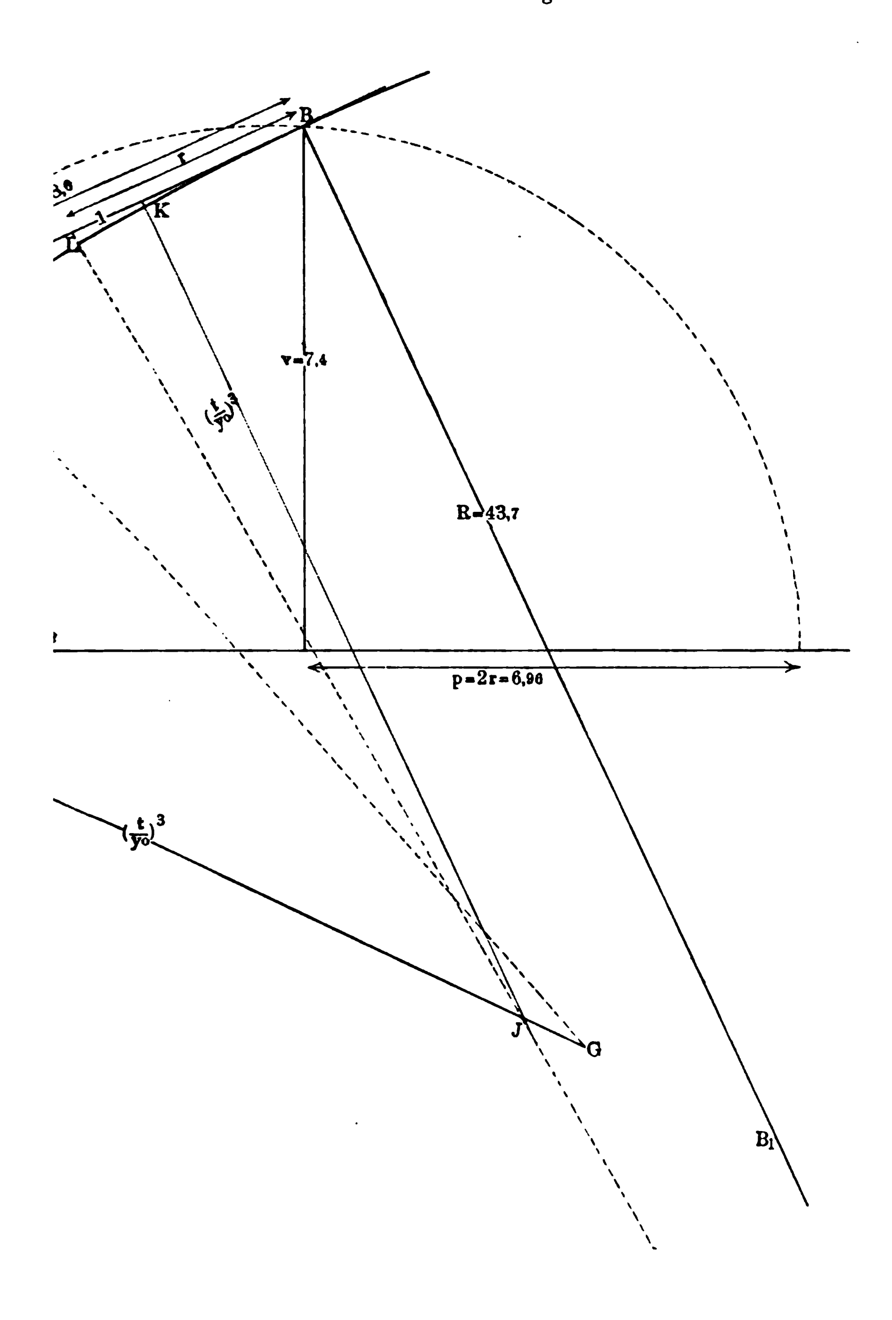
Als weiteres Beispiel haben wir, Fig. 63, eine Ellipse gewählt, OBCE.

*) S. Hecht, Hand- u. Hülfsbuch für Absteckung von Kurven, Verwertung der Kegelschnitte S. 101. Kühtmann, Dresden.

**) Der 1. und 2. Differentialquotient der Gl. der Parabel $y = \sqrt{px}$, $\frac{dy}{dx} =$



F
D
t
$y_0 = 3{,}7$
m
H
1
$\frac{t}{y_0}$
P
X
O
1
m_1


B
r
l
K
L
v=7,4
$(\frac{t}{y_0})^3$
R=43,7
p=2r=6,96
J
G
B_1

Der Krümmungshalbmesser in O ist, wenn a und b die beiden Achsen sind, $r = \frac{b^2}{a}$, der in C, am Ende der kleinen Achse $r_1 = \frac{a^2}{b}$. Legen wir durch die Punkte O und C einen Halbkreis, dessen Mittelpunkt in die Achse fällt, so schneidet dieser die Länge r vom Mittelpunkt der Ellipse N nach rechts ab; denn es verhält sich $a : b = b : r$, woraus $r = \frac{b^2}{a}$. Überträgt man r nach OM, verbindet O mit B, einem beliebigen Bogenpunkt, und errichtet eine Senkrechte in O auf ON, ebenso eine in M auf OB, so ergiebt sich der Tangentenschnittpunkt D; t und y_0 abgemessen, findet man durch Rechnung das Verhältnis der Krümmungsradien in O und B, $\frac{R}{r} = \left(\frac{t}{y_0}\right)^3$.

In den Figuren 64 und 65 haben wir R graphisch bestimmt.

Die Parabel in Fig. 64 ist die gleiche wie in Fig. 62; um die Konstruktion anschaulicher zu machen, haben wir den Berührungspunkt B mehr nach rechts verlegt, der Krümmungshalbmesser dieses Punktes wird allerdings dann so gross, dass der Krümmungskreismittelpunkt nicht mehr in der Zeichnung erreicht werden konnte.

Man trägt zunächst eine Einheit auf OD, $Om = 1$ ab, errichtet in D eine Senkrechte $DF \perp OD$ und macht $OF = t = DB$; die Senkrechte in m schneidet in H das Verhältnis $\frac{t}{y_0}$ ab, denn es verhält sich $1 : y_0 = \overline{OH} : \overline{OF}$, woraus $OH = \frac{OF}{y_0} = \frac{t}{y_0}$.

Errichtet man ferner eine Senkrechte auf OH durch O und überträgt die Einheit nach Om_1, so findet man nach bekannter Konstruktion durch OG die 3. Potenz von OH; es ist dann $OG = \left(\frac{t}{y_0}\right)^3$. Den kleinsten Krümmungsradius r, in O, kann man jetzt gleichlautend mit Fig. 62 bestimmen oder auch, wie in Fig. 64 geschehen, durch Konstruktion einer mittleren geometrischen Proportionale; denn es ist $y = \sqrt{px}$ und

$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x}}$ und $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{p}{x^3}}$ in die Formel für den Krümmungshalbmesser $\rho = \sqrt{\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}{\frac{d^2y}{dx^2}}}$ eingesetzt, erhält man $\rho = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(p+4x)^3}{p}}$; für $x = 2{,}8$ aus der Figur und $p = 6{,}96$ erhält man $\rho = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{18{,}16^3}{6{,}96}} = 14{,}66$.

$p = 2\,r$. Ein Halbkreis durch OB gehend, dessen Mittelpunkt in der Achse liegt, schneidet $p = 6{,}96$ ab, wonach $r = \frac{p}{2} = 3{,}48$, wie in

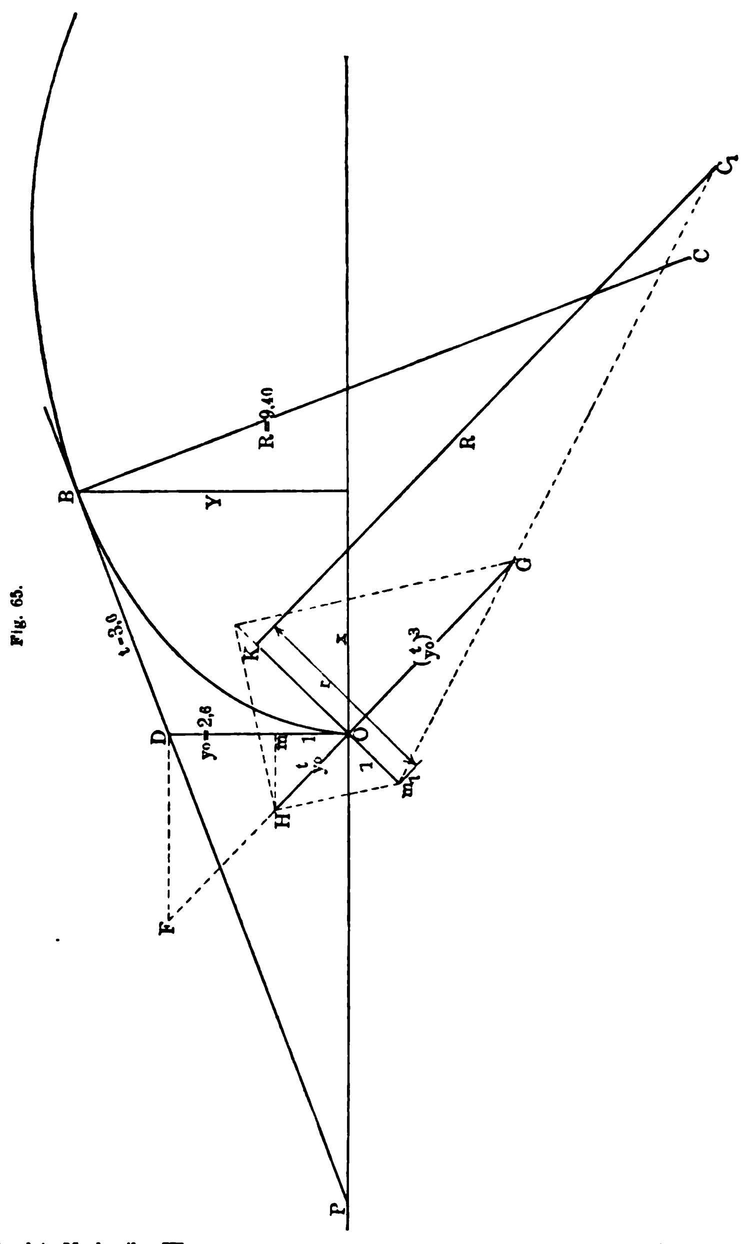


Fig. 63.

Fig. 62. Man trägt nun r nach BL, macht $LK = 1$, $KJ = OG = \left(\frac{t}{y_0}\right)^3$, errichtet ferner in B eine Senkrechte oder Normale, BB_1, welche mit dem Krümmungshalbmesser zusammenfällt, und zieht endlich LJ, welche Linie auf der Normalen BB_1 $R = 43{,}7$ abschneidet. Die Abscisse des Punktes B ist $x = 7{,}82$; durch Rechnung ergiebt sich nahe dasselbe Resultat, die Differenz liegt nur in der Ungenauigkeit der Zeichnung.

In Fig. 65 haben wir den Krümmungshalbmesser des elliptischen Bogenpunktes B bestimmt. Die Konstruktion ist die nämliche wie in Fig. 64, nur ist die graphische Multiplikation $r \cdot \left(\frac{t}{y_0}\right)^3$ etwas abweichend durchgeführt; indem wir die Längen $Om_1 = 1$ und $OG = \left(\frac{t}{y_0}\right)^3$ gleich unmittelbar verwendet haben. Aus der Proportion $\overline{Om_1} : \overline{Km_1} = \overline{OG} : \overline{KC_1}$ ergiebt sich $KC_1 = R = \frac{\overline{Km_1}\, OG}{Om_1} = r\left(\frac{t}{y_0}\right)^3$, welche Länge nach BC übertragen wurde. Die Rechnung und Zeichnung ergeben hier beide $R = 9{,}4$.

6. Die graphische Darstellung der Logarithmen.

Die oben angeführten Potenzgesetze lehren uns, dass Potenzen von gleichen Grundzahlen multipliziert werden durch Addition der Exponenten, dass sie dividiert werden durch Subtraktion derselben, und dass sie potenziert werden, indem man die Exponenten miteinander multipliziert. In Beziehung auf die Exponenten lässt sich hiernach eine Multiplikation auf eine Addition, die Division auf eine Subtraktion und die Potenzierung auf eine Multiplikation zurückführen; es bleibt sich hierbei gleich, ob der Exponent eine ganze oder gebrochene Zahl ist, im letzteren Fall würde bei der Potenzierung von Potenzen eine Multiplikation einer Division mit dem Nenner in den Zähler des betr. Bruches gleich kommen.

Wählt man nun als Grundzahl die Zahl 10 für eine Reihe von Potenzen und stellt man sich die aufeinander folgenden Potenzen mit Hinweglassung der Zwischenwerte tabellarisch zusammen, so erhält man für einige Zahlen folgende Übersicht:

Tabelle I.

$$10^0 = 1$$
$$10^{1/4} = \sqrt[4]{10} = 1{,}78$$
$$10^{1/3} = \sqrt[3]{10} = 2{,}15$$
$$10^{1/2} = \sqrt{10} = 3{,}16$$
$$10^{2/3} = \sqrt[3]{10^2} = 4{,}64$$
$$10^{3/4} = \sqrt[4]{10^3} = 5{,}63$$
$$10^1 = 10$$
$$10^2 = 100$$
$$10^3 = 1000$$
$$10^4 = 10000$$

In dieser Tabelle wollen wir jetzt die Grundzahl 10 weglassen und eine neue Zusammenstellung geben, welche nur die Exponenten und daneben die betr. Zahlen zur Grundzahl 10 gehörend, enthält; in der Weise wie Tab. II.

Tabelle II.

Exponenten	Zahlen
0,00	1,00
$^1/_4$ = 0,25	1,78
$^1/_3$ = 0,33	2,15
$^1/_2$ = 0,50	3,16
$^2/_3$ = 0,67	4,64
$^3/_4$ = 0,75	5,63
1,00	10,00
2,00	100,00
3,00	1000,00

Tabelle III.

Num.	Log.
1,00	0,00
1,78	0,25
2,00	0,30
2,15	0,33 . .
3,00	0,48
3,16	0,50
4,00	0,60
4,64	0,66 . . .
5,00	0,70
5,63	0,75
8,00	0,90
10,00	1,00
50,00	1,70
100	2,00
1000	3,00
10000	4,00

Aus dieser entsteht nun eine sogenannte Logarithmentafel, Tabelle III, wenn wir in der äusseren Rubrik die Zahlen (Nummern,

Numerus lat. = Zahl) mit Num. überschreiben und zuerst stellen, und die Rubrik der Exponenten mit log. (Logos, griech. = Wort, Verhältnis; arithmos = Zahl) überschreiben, die Reihenfolge aber von den Zahlen abhängig machen.

Die Exponenten nennt man in einer solchen Art Zusammenstellung Logarithmen, die Zahlen ihrer Dezimalbrüche Mantissen (mantissa, lat. = Anhang, Zugabe), die ganzen Zahlen Kennziffern. Die letzteren lässt man in grösseren Tabellen ganz hinweg, da man leicht behalten kann, dass die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 10 zwischen 0 und 1,00; die von 10 bis 100 zwischen 1 und 2, die von 100 bis 1000 zwischen 2 und 3 u. s. w. liegen müssen. Diese Hinweglassung der sich doch nur reihenweise wiederholenden Ganzen stört die Übersicht durchaus nicht. Die Logarithmen der Brüche sind negativ, weil die Exponenten derselben $\frac{1}{10} = 10^{-1}$, $\frac{1}{100} = 100^{-2}$ etc. negativ sind. Die Schreibweise endlich ist log 3,16 = 0,5, denn $10^{0,5} = 3,16$, oder $\sqrt{10} = 3,16$; oder wenn log 3 = 0,48, so ist num log 0,48 = 3, d. h. die Zahl des Logarithmus 0,48 ist 3.

Allgemein sei $\log z = x$, weil $10^x = z$ bezw. $\log (10^x) = \log z$ oder $x \log 10 = \log z$; da nun $\log 10 = 1$, so folgt $x = \log z$.

Ausser diesen sogenannten gemeinen Logarithmen mit der Grundzahl 10, werden in der höheren Mathematik Logarithmen verwendet, welche zur Basis die Zahl e = 2,7183 .... haben, man nennt sie aus Gründen, die hier zu erörtern, nicht der Ort ist, natürliche Logarithmen.

Die Rechnung mit denselben ist die gleiche. Auch hier muss wieder log nat e = log nat 2,7183 .... = 1 sein, da sonst das ganze System nicht in derselben Weise aufgebaut werden könnte. Beispielsweise ist hier

$$\log \text{nat } 28 = 3,33, \text{ weil } e^{3,33} = 2,7183^{3^1/_3} = 2,718^{10/_3} = \sqrt[3]{2,718^{10}} = 28.$$

Mit Hilfe einer solchen Logarithmen-Tabelle lassen sich nun thatsächlich Multiplikationen durch Addition, Potenzierungen durch Multiplikationen, und Divisionen durch Subtraktionen ausführen.

Beispiele. I. Es soll 1,78 zur dritten Potenz erhoben werden, $1,78^3$. Der Logarithmus von 1,78 ist nach Tab. III 0,25, mit 3 multipliziert, ergiebt 0,75, neben dem Logarithmus 0,75 findet man die Zahl in der Tab. III 5,63, es ist also $1,78^3 = 5,63$; denn es ist $1,78 = 10^{0.25}$ und $(1,78)^3 = (10^{0,25})^3 = 10^{0,25 \cdot 3} = 10^{0,75} = \sqrt[4]{10^3} = 5,63$.

II. Es soll $\sqrt[4]{1000}$ logarithmisch berechnet werden. Neben 1000 steht 3,00, dieser Logarithmus durch 4 dividiert oder mit $^1/_4$ multipliziert, ergiebt $^3/_4 = 0,75$, neben 0,75 findet sich wieder 5,63, somit ist $\sqrt[4]{1000} = 5,63$; denn es ist wieder $1000 = 10^3$ und $\sqrt[4]{1000} = (10^3)^{1/4} = 10^{3/4} = 10^{0,75} = 5,63$.

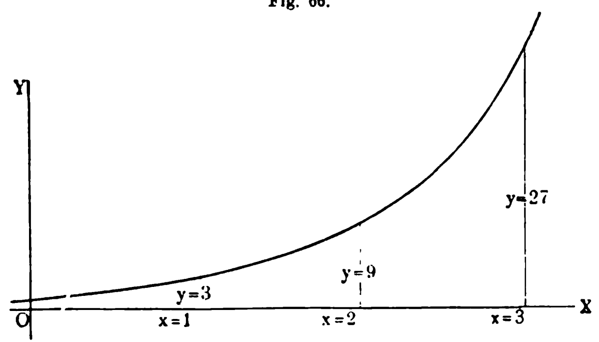
III. $\sqrt{4,64}$ findet man aus Tab. III, indem man den log 4,64, das ist 0,66 .. mit $^1/_2$ multipliziert oder durch 2 dividiert, $\frac{0,66}{2} = 0,33$, neben diesem Logarithmus steht der Numerus 2,15, somit ist $\sqrt{4,64} = 2,15$. Es ist $4,64 = 10^{2/3}$, hieraus die zweite $\sqrt{}$, giebt $\sqrt{10^{2/3}} = (10^{2/3})^{1/2} = 10^{2/3 \cdot 1/2} = 10^{1/3} = \sqrt[3]{10} = 2,15$.

IV. Die $\sqrt[3]{10}$ lässt sich aus der Tabelle durch Division des $\log 10 = 1$ durch 3 finden, man findet $^1/_3 \log 10 = 0,33 \ldots$, die zugehörige Zahl ist 2,15.

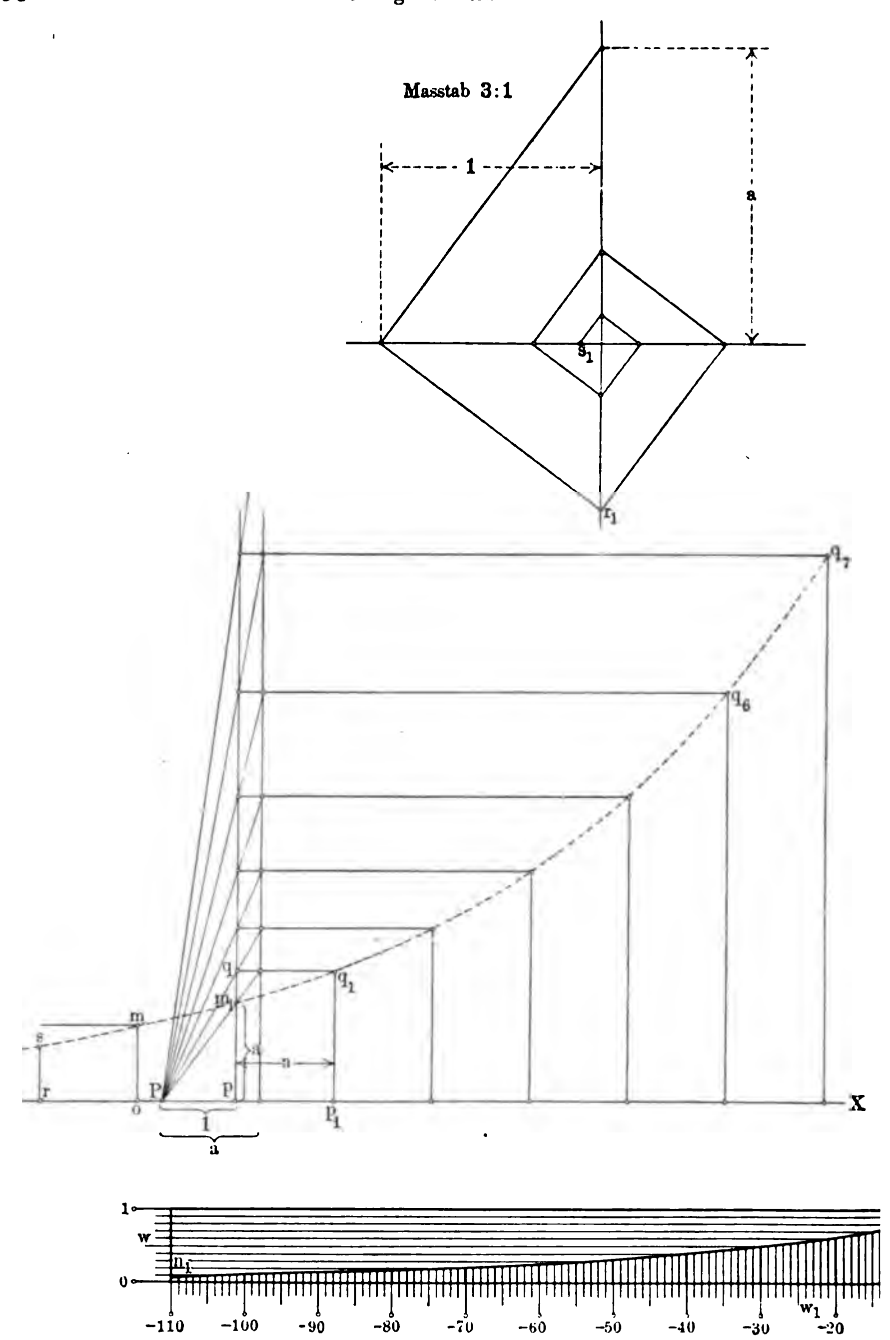
V. Es ist $3,16^6 = 1000$, denn nach Tab. III ist $\log 3,16 = 0,5$ und $0,5 \cdot 6 = 3$, neben diesem Logarithmus findet man als Numerus 1000. Es ist $3,16 = 10^{1/2}$, beiderseitig zur 6. Potenz erhoben $(3,16)^6 = (10^{1/2})^6 = 10^{1/2 \cdot 6} = 10^3 = 1000$.

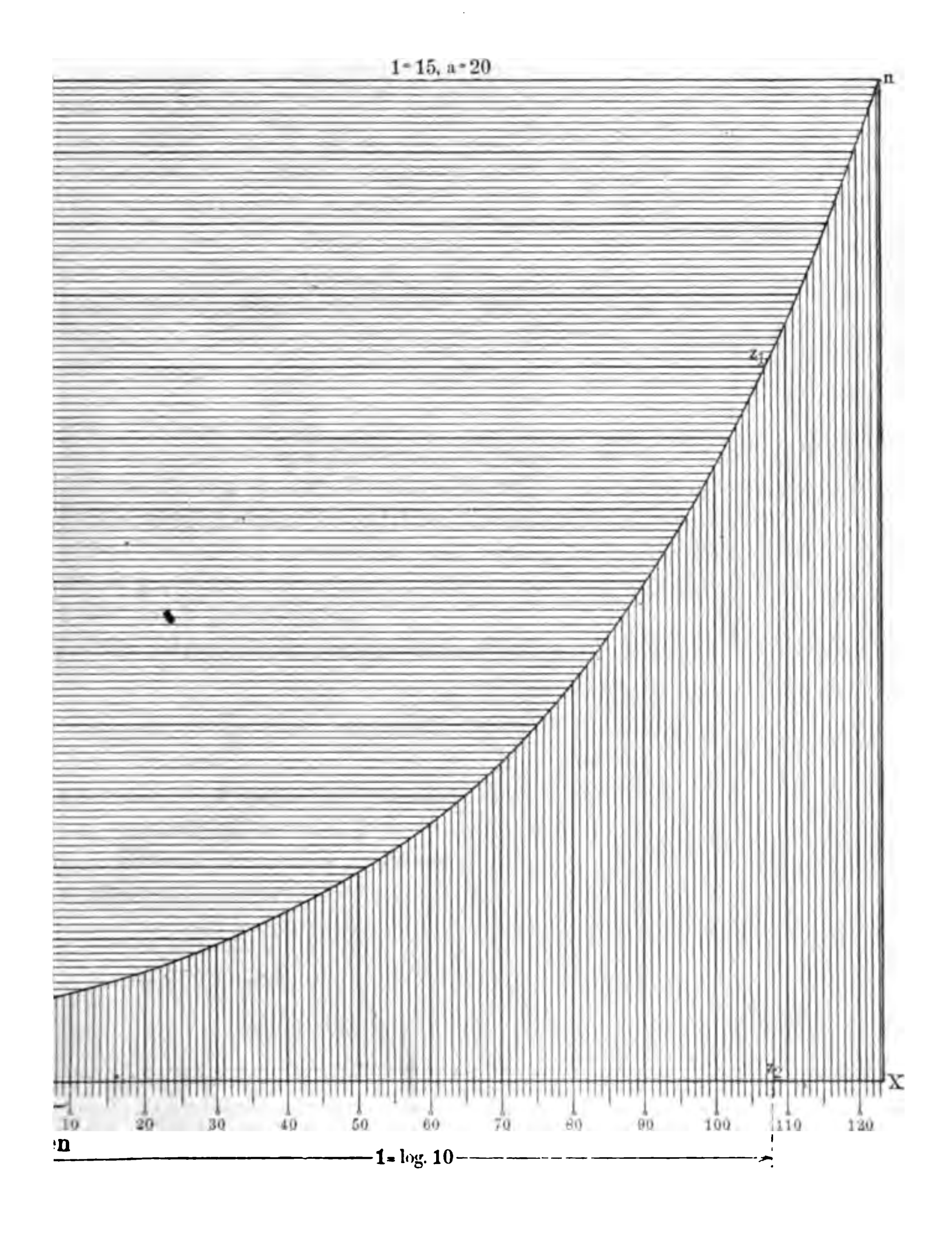
Zu einer graphischen Darstellung der Exponenten, also der Logarithmen, gelangen wir nach den vorauf gegangenen Erörterungen am einfachsten dadurch, dass wir eine Kurve aufzeichnen, welche die

Fig. 66.



sämtlichen Potenzen für die Grundzahl 10 enthält. Diese Kurve müssen wir dann gerade so verwerten, wie die obigen Tabellen. Eine


Masstab 3:1
1
a
s_1
r_1
q_7
q_6
q
q_1
m_1
m
s
a
n
r
P
p
o
P_1
1
a
X
1
w
n_1
0
w_1
-110
-100
-90
-80
-70
-60
-50
-40
-30
-20


1 = 15, a = 20
n
z_1
z_2
X
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120
en
1 = log. 10

solche Kurve kann aber unmittelbar durch die beiden Gleichungen gekennzeichnet werden

$$y = a^x \text{ oder } \rho = b^\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11).$$

In der ersteren dieser Gleichungen ist x eine beliebige Zahl, es stellt also y stets eine Potenz dar. Man wählt hierbei für x der Reihenfolge nach verschiedene Werte unter einer bestimmten Annahme von a als Konstante, trägt sie auf eine horizontale Linie OX auf, Fig. 66, errichtet in jedem Punkt eine Senkrechte und giebt jeder derselben die betreffende nach obiger Gleichung berechnete Länge y. Ist z. B. $a = 3$, so würde für $x = 0$, $y = 1$, für $x = 1$, $y = 3$, für $x = 2$, $y = 3^2 = 9$, für $x = 3$, $y = 3^3 = 27$ .... sein. Da nun $\log y = \log (a^x) = x \log a$, so ist es nur nötig, log a der Einheit gleich zu nehmen oder $a = 10$ zu setzen, dann stellt die jedesmalige horizontale Länge (Abscisse) x den Logarithmus der zugehörigen Vertikalen (Ordinate) dar,

$$x = \log y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12).$$

In den Figuren 67 bis 70 sind die Konstruktionen solcher logarithmischen Linien durchgeführt, die resultierenden Kurven $n_1 m n$ vermitteln das graphische Rechnen mit Exponenten, bezw. Logarithmen zunächst durch Abscissen und Ordinaten.

Für eine beliebige Einheit, in Fig. 67 ursprünglich 15^{mm} und für die Konstante 20^{mm}, also für $a = \frac{20}{15} = 1\,{}^1/_3$, haben wir die verschiedenen aufeinanderfolgenden Potenzen nach Fig. 15 gebildet, $\overline{pm_1} = a^1$, $\overline{pq} = a^2 = \overline{p_1 q_1}$ u. s. w. Ferner haben wir die Konstante nach $\overline{po}$ übertragen. Da die senkrechten Längen bis zum Kurvenschnitt im Abscissenpunkt p der ersten Potenz, in p_1 der zweiten Potenz von a gleich kommen, so müssen wir in 0 die nullte Potenz von a erhalten, nämlich $a^0 = 1$; die Ordinate in 0 wird der Einheit gleich. Die reciproken oder negativen Potenzen rs u. s. w. sind aus der oberen Fig. übertragen, welche, nebenbei bemerkt, in einem grösseren Massstab ausgeführt wurde. Nach dieser Fig. ist, entsprechend der Konstruktion in Fig. 19 beispielsweise $r_1 s_1 = a^{-1} = \frac{1}{a}$, welche Länge der Ordinate $\overline{rs}$, Fig. 67, gleich sein muss.

Man verbindet jetzt die so gefundenen Punkte s, m, m_1, q_1 .... q_6, q_7 zu einer Kurve; aus den jetzt in der Abscissenachse gemessenen Einheiten folgt dann schliesslich für $\overline{op}$ als Einheit, $y = \overline{pm_1} = a^1$,

für $\overline{op_1} = 2$ Einheiten $y = p_1 q_1 = a^2 \ldots$, allgemein für einen beliebigen Kurvenpunkt $y = a^x$.

Da nun $x \log a = \log y$ sein muss, so werden die auf OX aufgetragenen Längen mit den Vertikalen im Sinne dieser Gleichung übereinstimmen, das heisst die Horizontalen werden die Logarithmen der vertikalen Einheiten sein, wenn $\log a = 1$. Wir hatten aber Fig. 67 $om = a^0 = 1$ angenommen, haben demnach nur nötig, die Einheit om, welche durch die letzte Beziehung abhängig ist von a, von O auf eine vertikale und horizontale Linie X und Y zu übertragen, um eine graphische Logarithmentafel zu erhalten. Die letztere, Fig. 68, genügt thatsächlich, soweit es die Einteilung zulässt und es die Genauigkeit gestattet, logarithmische Rechnungen durchzuführen.

Die auf der Horizontalen OX eingeschriebenen Zahlen als Längeneinheiten, sind jedoch für uns relative Werte der Logarithmen im Vergleich zur Grundzahl 10. Um sie auf diese zu reduzieren, beachten wir, dass der Logarithmus von 10 Einheiten der Einheit gleich sein muss, von 100 zwei Einheiten u. s. w., $\underset{\smile}{\overset{10}{\log}}\, 10 = 1$, $\overset{10}{\log}\, 100 = 2 \ldots$, weil $10^1 = 10$, $10^2 = 100 \ldots$. Die Zahl 10 fällt in der Vertikalen oY nach z, sie liefert auf der Kurve den Punkt z_1 und die logarithmische Länge, um den Ausdruck zu gebrauchen, OZ_2; diese ist aber log 10, also für die Basis 10, der Einheit gleich. Teilt man jetzt die Abscissenachse OX nach dieser Längeneinheit ein, so sind die Teilpunkte die gemeinen oder Brigg'schen Logarithmen der auf OY eingetragenen Zahlen (s. Fig. 69). Die Grundzahl der in Fig. 68 enthaltenen Logarithmen ist nach den in der Figur eingetragenen Zahlenbezeichnungen 1,0216; denn der Logarithmus der Zahl 10 ($\overline{oz}$) ist $oz_2 = 107{,}8$ abg. 108, sonach ist $A^{108} = 10$, woraus $A = \sqrt[108]{10} = 1{,}0216$.

Der log der Zahl 4 ist 65 (64,8), wonach $A = \sqrt[65]{4} = 1{,}0216$, ferner ist $\sqrt[91]{7} = 1{,}0216$ u. s. w., es muss also immer dieselbe Grundzahl resultieren.

Einige Logarithmen der graph. Tafel, Fig. 68, sind beispielsweise

$$\log 7 = 91;\ \log 2 = 32{,}4;\ \log 3 = 51{,}4;\ \log 12 = 116{,}2;$$
$$\log 0{,}6 = -24^{*}).$$

---

*) In der Taf. nicht genau, besser nach $\log \frac{6}{10} = \log 6 - \log 10 = 83{,}8 - 107{,}8 = -24$.

Die einfachen logarithmischen Operationen liefern hieraus

$$\log (2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3 = 32{,}4 + 51{,}4 = 83{,}8$$

$$\log \left(\frac{12}{2}\right) = \log 12 - \log 2 = 116{,}2 - 32{,}4 = 83{,}8,$$

zu beiden Werten liefert die Kurve die Zahl 6.

Die Brigg'schen Logarithmen hingegen sind nach den Tab. im Anhang

$$\log \overbrace{7}^{10} = 0{,}845; \ \log \overbrace{2}^{10} = 0{,}301; \ \log \overbrace{3}^{10} = 0{,}477; \ \log \overbrace{12}^{10} = 1{,}079;$$

$$\log \overbrace{0{,}6}^{10} = 0{,}778 - 1 = -0{,}222.$$

Wollen wir durch Rechnung eine Verwandlung der relativen, Fig. 68, in die gemeinen Logarithmen vornehmen, so sei a eine beliebige Zahl, x der Logarithmus für die Grundzahl 10, m der für unsere Grundzahl 1,0216, dann ergiebt sich aus $\log \overbrace{a}^{10} = x$ und $\log \overbrace{a}^{1{,}0216} = m$, $10^x = a$ und $1{,}026^m = a$ oder $10^x = 1{,}0216^m$, sonach $x = m \log \overbrace{1{,}0216}^{10} = 0{,}009281\,m$.

Nach unserer graphischen Tafel z. B. ist für $a = 7$, $m = 91$ und $\log \overbrace{7}^{10} = 91 \cdot 0{,}009281 = 0{,}845$; für $a = 12$ erhält man aus Fig. 68 $m = \log \overbrace{12}^{1{,}0216} = 116{,}2$, es wird danach $\log \overbrace{12}^{10} = 0{,}009281 \cdot 116{,}2 = 1{,}079$ u. s. w.

Umgekehrt ist, wenn z. B. $\log \overbrace{3}^{10} = 0{,}477$, $m = \log \overbrace{3}^{1{,}0216} = \dfrac{0{,}477}{0{,}009281} = 51{,}4$ u. s. w.

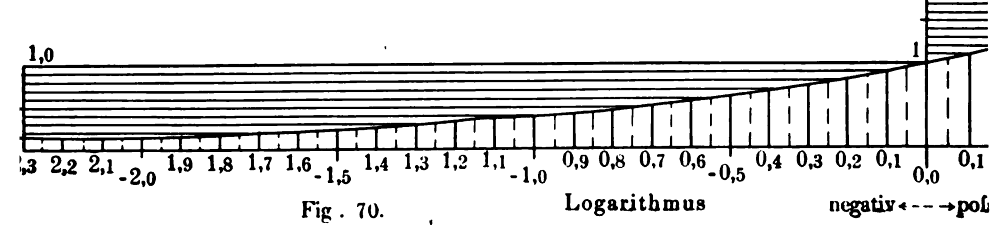
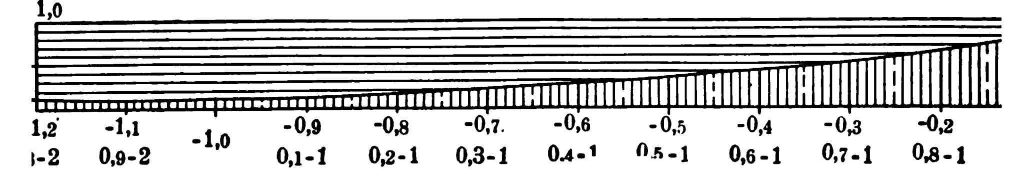


Fig. 70.

Gemeine Logarithmen

Grundzahl 10.





ːCHE LOGARITHMENTAFELN

ːENTWORFEN VOM VERFASSER

Fig. 69.

atürliche Logarithmen

Grundzahl 2,7183..

hmus.

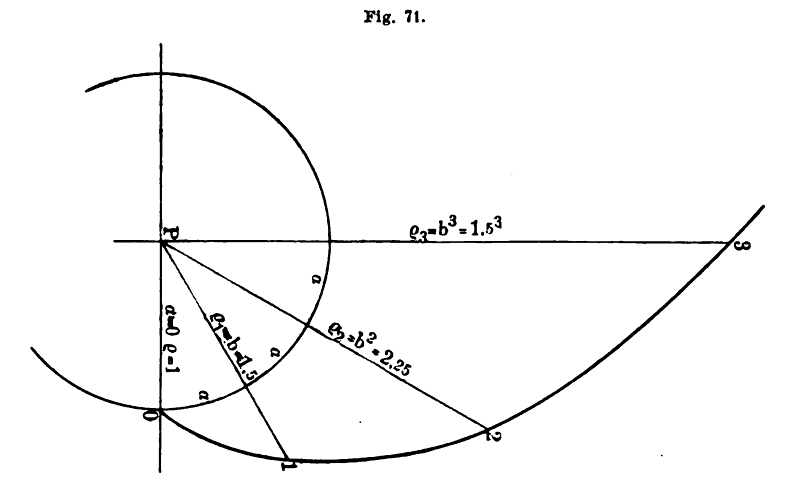
Aus der in Fig. 68 konstruierten Logarithmentafel können wir uns für jede Grundzahl ein Logarithmensystem konstruieren. Die Figuren 69 und 70 stellen die gebräuchlichsten, das Brigg'sche und das natürliche Logarithmensystem, dar. Die Grundzahl des letzteren ist $e = 2{,}7183\ldots$ Nach Fig. 68 erhält man ziemlich genau $\log 2{,}7183 = 46$, teilt man die dieser Zahl entsprechende Länge $0 - 46$, in 10 Teile, so kann man mit dieser Teilung dieselbe Kurve, Fig. 68, verwenden, wie auch in Fig. 70 geschehen ist; aus dieser graphischen Logarithmentafel ergeben sich die natürlichen Logarithmen unmittelbar. Man findet beispielsweise

$$\log \text{nat}\, 6 = 1{,}8;\ \log \text{nat}\, 4 = 1{,}4;\ \log \text{nat}\, 0{,}5 = -0{,}7 \text{ u. s. f.}$$

In den Fig. 69 und 70 sind die Bezeichnungen übrigens gleichlautend mit denen der angeschlossenen Tabellen im Anhang eingetragen. —

In der zweiten Formel der Gl. 11, $\rho = b^{\alpha}$, erkennen wir äusserlich dasselbe Potenzialgesetz wie in der soeben besprochenen Gleichung. Unter α ist aber hier eine gewisse Bogenlänge eines Kreises oder besser gesagt, ein Stück Umfang eines Kreises, verstanden, dessen Halbmesser einer Einheit gleich ist; ρ nach obiger Formel berechnet, ist die radiale

Fig. 71.



Länge vom Mittelpunkt des Kreises durch den zugehörigen Bogenpunkt gehend, der jedesmalige Endpunkt dieses sogenannten Leitstrahles (radius vector) ist Kurvenpunkt. Man nennt ein solches von einem Kreise ausgehendes System, um eine Kurve zu konstruieren, im Gegensatz zu dem obigen rechtwinkligen Koordinatensystem, ein Polarkoordinatensystem, den Mittelpunkt, den Polanfang.

Wir konstruieren, Fig. 71, mit dem Radius $= 1$, hier ursprünglich 3^{cm}, einen

Kreis und teilen diesen in gleiche Bogenlängen $\widehat{\alpha} = \frac{1}{12}$ des Umfanges oder $\alpha^\circ = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$. Diese bilden für uns die veränderlichen Exponentiallängen; die erste liefert, wenn $\alpha = 1$, $\rho = b^1 = b$, welche wir, der Einheit entsprechend, beliebig annehmen können; in der Fig. 71 haben wir $b = 1{,}5$ zu Grunde gelegt, die zweite Länge für $\alpha = 2$ ergiebt $\rho = 1{,}5^2 = 2{,}25 = \overline{P\,2}$, der dritte Leitstrahl erhält die Länge $\rho = 1{,}5^3 = 3{,}38 = \overline{P\,3}$, u. s. w. Die Endpunkte 0, 1, 2, 3 ... verbunden, resultiert eine spiralartige Kurve, eine logarithmische Spirale, aus welcher man arithmographisch dieselben Beziehungen entnehmen kann, wie durch Vermittlung der Kurve in Fig. 68. Es folgt auch hier $\log \rho = \alpha \log b$ und $\log b = 1$ gesetzt, das heisst, die Linie b als Basis eines Logarithmensystems betrachtet,

$$\alpha = \log \rho \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12a);$$

es sind hiernach die **Bogenlängen** die Logarithmen der zugehörigen **Leitstrahlen**.

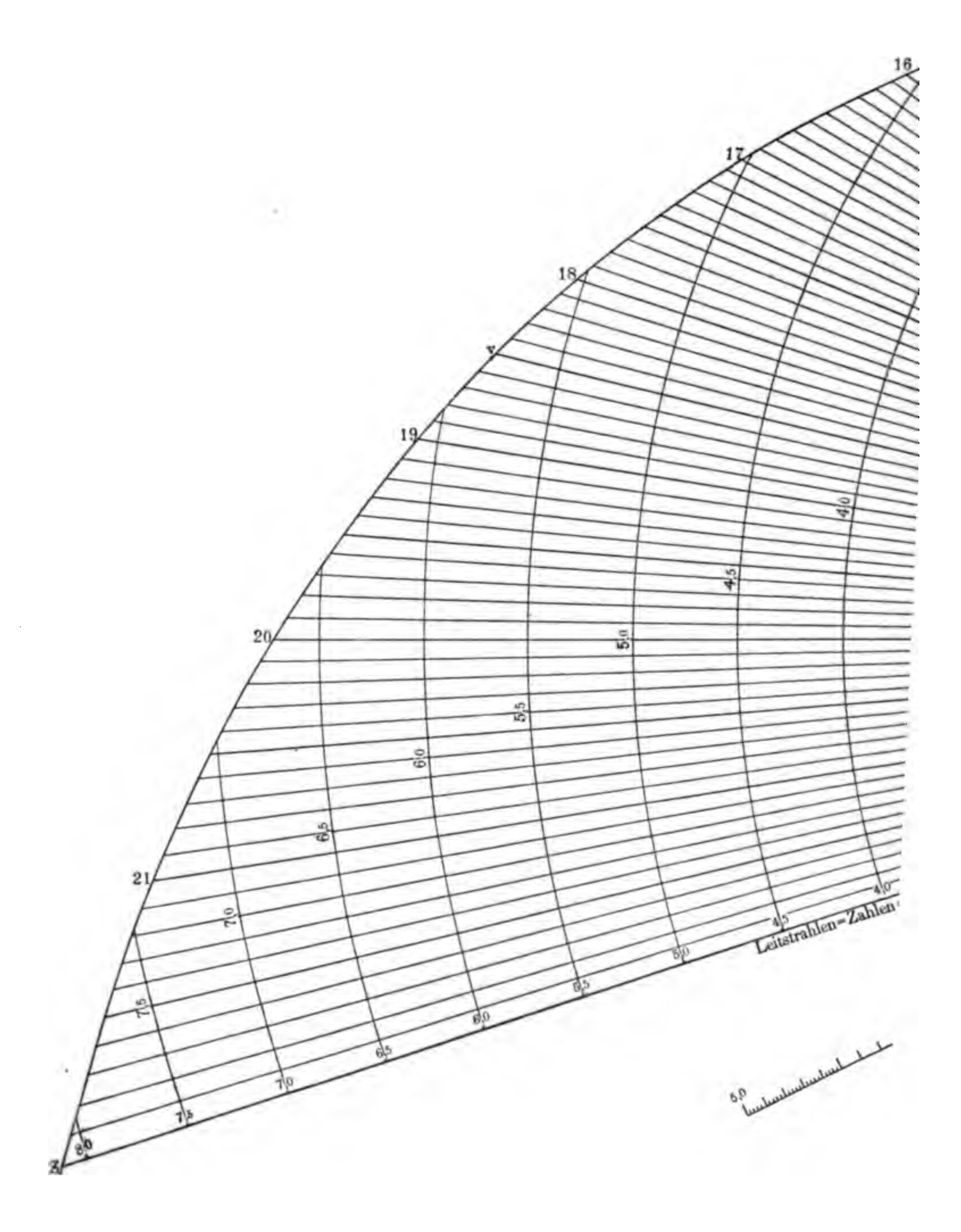
In den Figuren 72 und 73 wurde die Konstruktion einer solchen Kurve durchgeführt. —

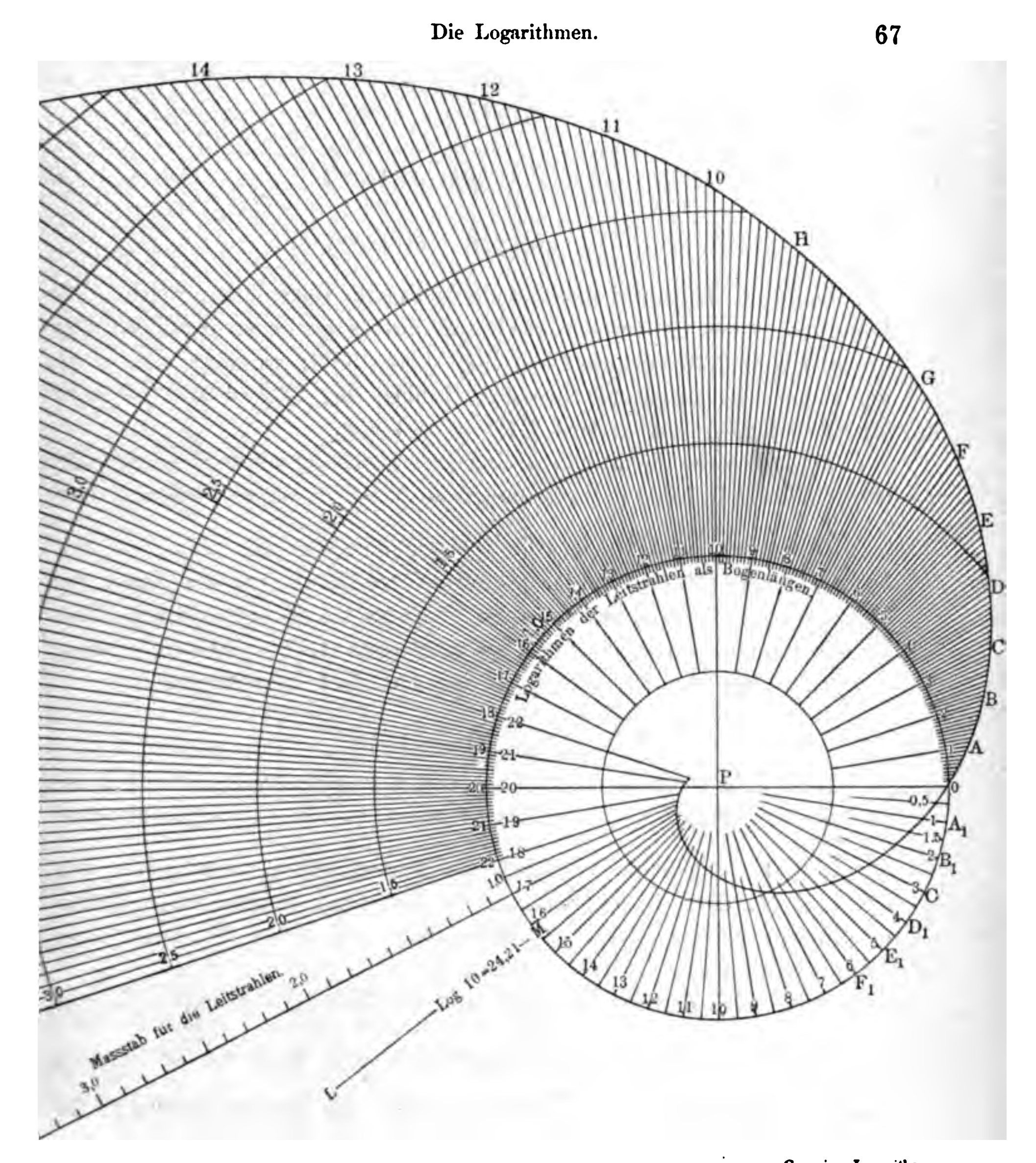
P ist Polpunkt, also zugleich Mittelpunkt des mit dem Halbmesser $R = \overline{P\,o} = 1$ (hier ursprünglich 50^{mm}) gezeichneten Kreises, dessen Umfang wir in 40 Teile geteilt haben, 0 1 2 3 4 ....., jeder dieser enthält 10 Zwischenteile.

Der erste Leitstrahl $PA = b$ ist, damit die Kurve nicht gleich allzustark ansteigt, $^1/_{10}$ grösser als die Einheit angenommen, $PA = 1{,}1$ (55^{mm}), das heisst für die erste Bogenlänge $0\,1 = \alpha = 1$ wird $\rho_1 = b^1 = PA = 1{,}1$. Für die zweite Bogenlänge, also $\alpha = 0\,2 = 2$ wird $\rho_2 = PB = b^2 = 1{,}1^2 = 1{,}21$ ($60{,}5^{mm}$); wenn $\alpha = 0\,3 = 3$, wird $\rho_3 = PC = b^3 = 1{,}1^3 = 1{,}331$ ($66{,}55^{mm}$). Ferner sind die Leitstrahlen

$$\rho_4 = PD = 1{,}1^4 = 1{,}4641$$
$$\rho_5 = PE = 1{,}1^5 = 1{,}61051$$
$$\rho_6 = PF = 1{,}1^6 = 1{,}771561$$
$$\rho_7 = PG = 1{,}1^7 = 1{,}9487171$$
$$\rho_{22} = PZ = 1{,}1^{22} = 8{,}14027 \ (407{,}014^{mm}).$$

Unterhalb des Radius Po werden die Leitstrahlen für $\alpha = -1$, ρ_{-1} bei PA_1 $1{,}1^{-1} = \frac{1}{1{,}1} = 0{,}9091$ ($45{,}46^{mm}$); ρ_{-2} bei PB_1 $1{,}1^{-2} = \frac{1}{1{,}1^2} = \frac{1}{1{,}21} = 0{,}82645$;


16
17
18
19
20
21
4,0
4,5
5,0
5,5
6,0
6,5
7,0
7,5
8,0
Leitstrahlen=Zahlen



Gemeine Logarithmen.

log 10 0,9 0,8 0,7 0,6 0,5 0,4 0,3 0,2 0,1 0,0

23 22 21 20 19 18 17 16 15 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

Abgewickelte Bogenlängen-Logarithmen der Leitstrahlen der Spirale

bei PC_1, $\frac{1}{1{,}1^3} = 0{,}75132$,

bei PD_1, $\frac{1}{1{,}1^4} = 0{,}68301$ (34,15 mm)

$\rho_{-22} = \frac{1}{1{,}1^{22}} = 0{,}12284$ (6,142 mm).

Zu jedem Leitstrahl gehört eine bestimmte Bogenlänge, welche den Logarithmus des Leitstrahles als lineare Grösse im Bogen darstellt. Der Länge PH = 2,36 entspricht die Bogenlänge 9,00; es wäre also nach der dieser Fig. zu Grunde liegenden Einheit log 2,36 = 9,00. Ferner log PZ = log 8,14 = 22, weil $1{,}1^{22} = 8{,}14$ abg.

In der unteren Fig. 73 haben wir zur Vergleichung mit den Logarithmen zur Grundzahl 10 beide nebeneinander gezeichnet. Es ist uns bekannt, dass $\log \underset{}{\overset{10}{\smile}} 10 = 1{,}00$, weil $10^1 = 10$. Da wir nun die Fig. nicht bis zur Leitstrahllänge PL = 10, Fig. 72, ausgeführt haben, um die hierzu gehörende Bogenlänge α gewinnen zu können, so müssen wir uns diese für die Grundzahl 1,1 berechnen, es muss dann $1{,}1^x = 10$ sein, woraus $x \log 1{,}1 = \log 10$ folgt, oder nach den gemeinen Logarithmen

$$x = \frac{\log 10}{\log 1{,}1} = \frac{1}{0{,}04139} = 24{,}21.$$

Diese Zahl stellt die Bogenlänge OM dar, gleichzeitig aber auch die Einheit des gemeinen Logarithmus; denn es ist $1{,}1^{24{,}21} = 10$ und $\log \overset{10}{\smile} 10 = 1$. Die Fig. 73 enthält die abgewickelten Bogenlängen von 0 bis 24,21, diese ist oberhalb in 10 Teile und entsprechende Unterabteilungen geteilt; die obern Skalenwerte sind daher die gemeinen Logarithmen der Leitstrahllängen.

Dem Strich der Bogenlänge 9, also dem log PH, steht auf der oberen Skala, Fig. 73, die Masslänge 0,37 gegenüber, es ist somit $\log \overset{10}{\smile} 2{,}36 = 0{,}37$, hingegen nach Fig. 72 $\log \overset{1,1}{\smile} 2{,}36 = 9$; weil, wie gesagt, $10^{0{,}37} = 2{,}36$ bezw. $1{,}1^9 = 2{,}36$, abg.*).

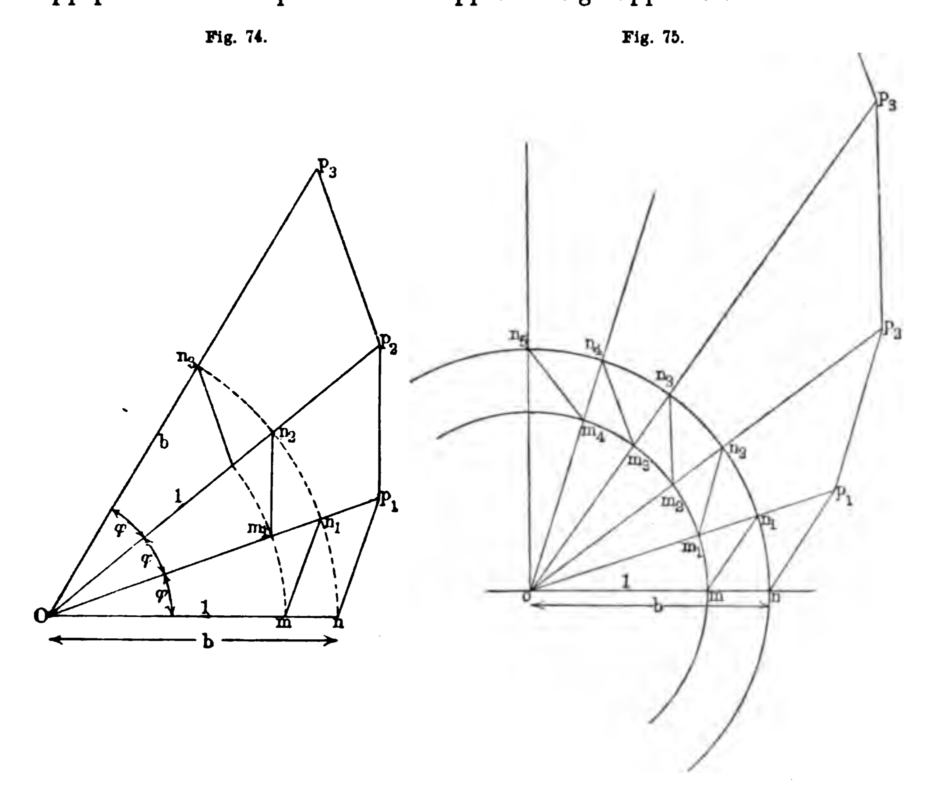
Die Bogenlänge des Leitstrahles 4,5 ist (Fig. 72) 15,8, sonach $\log \overset{1,1}{\smile} 4{,}5 = 15{,}8$, in gemeine Logarithmen übertragen nach Fig. 73 0,65, das heisst $\log \overset{10}{\smile} 4{,}5 = 0{,}65$; indem die Bogenlänge 15,8 mit 0,65 abschliesst. —

Auf dem Wege der graphischen Multiplikation können wir analog

*) S. die Logarithm. in Tab. I, Anhang.

der Fig. 67 zu demselben Ziele gelangen, wenn wir (wie in Fig. 17) $\overline{om} = 1$ und $\overline{on} = b$ auftragen (Fig. 74), $\overline{on}$ nach $\overline{on_1}$ schlagen, wobei der Winkel φ beliebig gross sein kann; es verhält sich dann, wenn $n\,p_1$ parallel zu $m\,n_1$: $1 : b = b : \overline{op_1}$ und folgt $\overline{op_1} = b^2$.

Fig. 74. Fig. 75.



Überträgt man die Einheit nach $\overline{om_1}$, b nach $\overline{on_2}$, verbindet m_1 mit n_2 und zieht die Parallele $\overline{p_1 p_2}$, dann verhält sich weiter

$$\overline{om_1} : \overline{on_2} = \overline{op_1} : \overline{op_2}, \text{ woraus}$$

$$\overline{op^2} = \frac{on_2 \cdot op_1}{om_1} = \frac{b \cdot b^2}{1} = b^3.$$

Fährt man in diesem Sinne unter Beibehaltung desselben Winkels φ fort, dann erkennt man, dass die Winkel in einer einfachen (arithmetischen) Reihe, hingegen die jedesmaligen Strahlen $\overline{op_1}$ $\overline{op_2}$ ... nach Potenzen zunehmen. Das Verfahren lässt sich wie in Fig. 75 geschehen, dadurch erleichtern, dass man mit der Einheit $m\,o = 1$ und der Konstanten als Radius zwei konzentrische Kreise aufzeichnet, diese in gleiche Centri-

winkel teilt und die Punkte mn_1, m_1n_2, m_2n_3 .... miteinander verbindet; hierauf zieht man die Parallelen $np_1 \parallel mn_1$; $p_1p_2 \parallel m_1n_2$; $p_2p_3 \parallel m_2n_3$ ..... Die Punkte $np_1\, p_2\, p_3$ ... sind Kurvenpunkte; je kleiner die Einteilung der Kreise, um so näher rücken die Punkte aneinander. Die Länge eines beliebigen Strahles op ist dann wieder $\rho = b^{\varphi}$.

Beispiele. I. $x = \sqrt[3]{5{,}8}$ findet man, wenn man beiderseitig logarithmiert, $\log x = \lg(5{,}8^{1/3}) = \frac{1}{3}\log 5{,}8$, und die Zahl sucht.

Nach Fig. 68 ist $\log 5{,}8 = 82$, somit $\frac{1}{3}\, 82 = 27{,}3$. Die Zahl 5,8 auf der Vertikalen OY weist auf (nahe) 82 in der Horizontalen OX; die Länge 0 — 82 in 3 Teile geteilt oder mit der Zirkelöffnung den 3. Teil, 27,3 abgegriffen, liefert die Kurve am Endpunkt von 27,3 den Numerus 1,81, die zweite horizontale Linie vor 2 in der Vertikalen OY gemessen.

Nimmt man auf dem Massstab für die Leitstrahlen Fig. 72 0,8 der Einheit im Zirkel und setzt diese Länge an 5,0 (oder 0,3 an 5,5), so gelangt man zu dem Kurvenpunkt v, welcher, wie sich leicht taxieren lässt, zwischen 18,4 und 18,5 der Bogenlänge fällt, auf 18,44. Da nun $\frac{18{,}44}{3} = 6{,}15$ und dieser Logarithmus dem Leitstrahl, nach dem ersten Teilpunkt nach F 1,81 entspricht, so ist auch hier $x = 1{,}81$. Der dem Logarithmus 5,8 bezw. 18,44 entsprechende gemeine Log. ist 0,76, wie die Fig. 73 ergiebt.

II. Es soll $\sqrt[65]{4}$ logarithm.-graph. berechnet werden.

Die Zahl 4 (Numerus) in der vertikalen Linie OY, Fig. 67, zeigt auf den Kurvenpunkt, welcher in der Entfernung 65 von O auf der horizontalen Linie OX abschliesst; es ist also $\log 4 = 65$; da nun $\frac{1}{65}\log 4 = \frac{65}{65} = 1$, so folgt die Zahl, der Numerus, aus der Figur entnommen (nach dem Augenmass taxiert) 1,02. Der erste vertikale Strich neben om zeigt auf den ersten Kurvenpunkt und dieser liegt in der Höhe zwischen den Zahlen 1 und 1,1.

In Fig. 72 zeigt die Zahl (Leitstrahl) 4 auf die Bogenlänge 14,55, der 65. Teil derselben ist 0,223, diesem Logarithmus entspricht die Leitstrahllänge 1,02. Der zweite Teilpunkt auf dem Kreis oberhalb Po zwischen o und A liefert diese Länge.

III. Es soll $x = \sqrt{0{,}6}$ logarithmographisch berechnet werden.

Nach Fig. 67 ist $\log 0{,}6 = -23$, wir haben diese Werte durch die

Buchstaben w w_1 markiert, $\log \overline{n_1 w} = \overline{o w_1}$. Die Hälfte von — 23 ist — 11,5, die Zahl des Logarithm. von — 10 ist nahezu 0,8, die von — 11,5, wie man sich durch Verfolgung der Linien mit einem Bleistift oder Zirkel leicht überzeugen kann, ist 0,77; so dass also $x = \sqrt{0,6} = 0,6^{1/2} = 0,77$.

Nach Fig. 72 ist $\log 0,6 = 5,5$ und da zu der Hälfte dieser Bogenlänge 2,75 die Leitstrahllänge, zwischen PB_1 und PC_1 gelegen, 0,77 gehört, so ist auch hiernach $x = 0,77 = \sqrt{0,6}$.

IV. Man soll berechnen

$$x_1 = \sqrt{6,72};\ x_2 = \sqrt[4]{67,2};\ x_3 = \sqrt[8]{672}.$$

Mit Zuhilfenahme der Fig. 72 entspricht der Leitstrahllänge 6.72 die Bogenlänge 20, es ist also hier $\log 6,72 = 20$.

Da uns nun in der genannten Figur nur die Zahlen bis 8,22 zur Verfügung stehen, und wir noch nachträglich den $\log 10 = 24,21$ eingetragen haben, bei M, so sind wir genötigt, alle Logarithmen grösserer Zahlen zusammenzusetzen.

Es ist nämlich

$$x_2 = \sqrt[4]{67,2} = \sqrt[4]{10 \cdot 6,72} \text{ und } x_3 = \sqrt[8]{672} = \sqrt[8]{10 \cdot 10 \cdot 6,72},$$

folglich, weil $\log 6,72 = 20$, wird $\log 67,2 = \log 10 + \log 7,72$, das ist aber $24,21 + 20 = 44,21$ und $\log 672 = \log 10 + \log 10 + \log 6,72$ oder $\log 672 = 24,21 + 24,21 + 20 = 68,41$.

Die Wurzeln der gebrochenen Exponenten $1/2$, $1/4$, $1/8$ bedingen eine Division mit den Nennern 2, 4 resp. 8.

Es folgt hiernach

$$\log x_1 = \log \sqrt{6,72} = 1/2\ 20 = 10.$$

$$\log x_2 = \log \sqrt[4]{67,2} = 1/4\ 44,21 = 11,05.$$

$$\log x_3 = \log \sqrt[8]{672} = 1/8\ 68.41 = 8,55.$$

Die diesen Bogenlängen entsprechenden Leitstrahlen sind aus der Figur zugleich die Resultate

$$x_1 = \text{num} \log x_1 = \text{num} \log 10 = 2,6\ (2,59)$$

$$x_2 = \text{num} \log x_2 = \text{num} \log 11,05 = 2,86$$

$$x_3 = \text{num} \log x_3 = \text{num} \log 8,55 = 2,25.$$

Die zu den gemeinen Logarithmen gehörigen Zahlen wachsen, wie uns bekannt, mit den ganzen Zahlen $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000 \ldots$, also mit 1, 2, 3 ..., wir brauchen also hier den Logarithmus von 6,72 nur mit einer um 1 wachsenden Kennziffer ein-

zustellen, um den von 67,2 zu erhalten, der von 672 ist wieder um 1 grösser u. s. w., umgekehrt haben wir nur nötig, die Mantissen (Dezimalstellen) nur einmal von 6,72, 672 oder 67,2 zu bestimmen, es ist dann nach Fig. 70: $\log \overbrace{6,72}^{10} = 0,827$, die abgewickelten Bogenlängen Fig. 73 ergeben oberhalb bei 20 auch 0,827, somit ist

$$\log \overbrace{67,2}^{10} = 1,827 \text{ und } \log \overbrace{672}^{10} = 2,827.$$

Weiter ist nun $^1/_2 \cdot 0,827 = 0,4135$; $^1/_4 \cdot 1,827 = 0,457$ und $^1/_8$ $2,827 = 0,353$. Diese 3 Zahlen ergeben die gleichen obigen Bogenlängen der Fig. 73 bei 10, 11,05 und 8,55.

Die graphische Darstellung der Fig. 68 giebt natürlich dieselben Resultate.

Es ist hier $\log 6,72 = 88,5$, und weil $\log 10 = 107,8$ (Seite 61), so folgt $\log 672 = \log 10 \cdot 10 \cdot 6,72 = \log 10 + \log 10 + \log 6,72 = 107,8 + 107,8 + 88,5 = 304,1$; der 8. Teil ist $\frac{304,1}{8} = 38$ abg.

Der horizontalen Länge, diesem Logarithmus 38 in OX, kommt aber der Kurvenpunkt, in OY gemessen, 2,25 zu, wonach $\sqrt[8]{672} = 2,25$.

V. Aus einem rechtwinkeligen Dreieck folgt $h = 12,28 \operatorname{tang} 15^\circ\, 40$ und es soll für $\operatorname{tang} 15^\circ\, 40 = 0,28$, h logarithmisch berechnet werden. Man erhält zunächst $\log h = \log 12,28 + \log 0,28$.

Nach dem in Fig. 68 zu Grunde gelegten Logarithmensystem folgt für $\log 12,28 = 117$; den Logarithmus von 0,28 findet man aus dem linken Teil der Kurve; weil 0,28 ein Bruch ist, so wird der Logarithmus negativ, $\log 0,28 = -55$, danach wird

$$\log h = 117 - 55 = 61,$$

die diesem Logarithmus entsprechende Zahl ist $3,68 = h$.

VI. Man soll nach Fig. 72 $x = \sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ log.-graph. berechnen. Es ist $\log x = \log \left(\sqrt[3]{\frac{1}{8}}\right) = \log \left(\frac{1}{8}\right)^{1/3}$ und $^1/_3 \log \left(\frac{1}{8}\right) = {}^1/_3 (\log 1 - \log 8)$. Da nun $\log 1 = 0$ und $\log 8 = 21,84$, der Kreis 8 schneidet in der Nähe von Z bei der Bogenlänge 21,84 ein, so folgt $\log x = \frac{1}{3}(0 - 21,84) = \frac{1}{3} \cdot -21,84 = -7,28$. Die Bogenlänge 7,28 zeigt auf

den Leitstrahl 2, da aber log x negativ, so ist x als Zahl ein Bruch, nämlich $\frac{1}{2}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

VII. Zählt man zur Bogenlänge 7,28 (Zahl 2) die Bogenlänge 11,55 (Zahl 3, Fig. 72), so giebt die Summe 18,83; dieser kommt aber die Leitstrahllänge 6 zu, daher $2 . 3 = 6$.

VIII. Ein Kapital von C = 1000 Mark steht n = 40 Jahre zu a = 5% auf Zinseszins, wie gross ist nach Verlauf dieser Frist das Endkapital, Kapital + Zinsen?

Dasselbe ist $E = C\left(1 + \frac{a}{100}\right)^n = 1000\,(1 + 0{,}05)^{40}$ oder $E = 1000 \cdot 1{,}05^{40}$.

Aus Fig. 72 findet man log 1,05 = 0,51 (0,5125 als Bogenlänge zum Leitstrahl 1,05), da nun $40 \cdot 0{,}5125 = 20{,}48$ und dieser Bogenlänge der Leitstrahl 7,04 entspricht, so folgt $1{,}05^{40} = 7{,}04$, sonach E = 7040 Mark.

IX. Man soll $1{,}5^5$ log.-graph. berechnen. Aus Fig. 68 ergiebt sich log 1,5 = 19; diesen Wert mit 5 multipliziert, folgt 5 log 1,5 = 5.19 = 95. Dieser Logarithmus auf OX zeigt durch Vermittlung der Kurve auf die Zahl 7,67; sonach ist $1{,}5^5 = 7{,}67$ und $1{,}5 = \sqrt[5]{7{,}67}$.

X. In dem Ausdruck $12^x = 6{,}44$ (Exponentialgleichung) soll x berechnet werden. Zunächst ist x log 12 = log 6,44, hieraus $x = \frac{\log 6{,}44}{\log 12}$; entnimmt man nach Fig. 68 die beiden Logarithmen log 6,44 = 86,7 und log 12 = 115,7, so erhält man $x = \frac{86{,}7}{115{,}7} = 0{,}75$, abg. $^3/_4$, wonach $12^{3/4} = 6{,}44$ oder $\sqrt[4]{12^3} = 6{,}44$.

XI. Die Verwertung der graphischen Logarithmentafeln, Fig. 69 und 70, dürfte nach dem Vorhergehenden wohl keine Schwierigkeiten bereiten. Der log 5,6 nach Fig. 70, bei dem Kurvenschnittpunkt von a und b, ist 0,748; log 560 = 2,748; log 0,56 = 0,748 — 1 oder, wie auch aus dem Num. zwischen 0,5 und 1 zu ersehen,

log 0,56 = — 0,252; log 5600 = 3,748 u. s. w.

Ferner ist die dem Logarithmus 0,437 entsprechende Zahl, Num log 0,437 = 2,74, c und e Fig. 70, folglich auch Num log 2,437 = 274, und weiter auch log 0,0274 = 0,437 — 2.

Um die Zahl zu finden, deren Logarithmus 2,66, suchen wir zu-

nächst die Zahl, Num, zu 0,66 bei f, Fig. 70, diese liegt zwischen 4 und 5 bei g und ist 4,58, somit ist Num log 2,66 = 458.

Es ist log 14 = 1,15, log 1,4 = 0,15, beide haben gleiche Mantissen, wie auch aus der Fig. 68 für den Num 14 und Num zwischen 1 und 2 zu entnehmen ist.

Ebenso ergiebt sich log 4 = 0,6 und log 0,4 = — 0,4 = 0,6 — 1 abg.

Die natürlichen Logarithmen zwischen 0 und 0,1, zwischen 1 und 13 sind unmittelbar aus Fig. 69 abzulesen, die grösseren Zahlen müssen nach der graph. Tafel zusammengesetzt werden, da der natürl. log der Zahl 10 der Einheit nicht gleich ist.

Es ergiebt sich log nat 5,6 = 1,72, a_1, b_1, Fig. 69; ferner nat log 0,56 = — 0,6, beide Logarithmen lassen sich unmittelbar ablesen, log nat 56 hingegen muss zusammengesetzt werden aus log nat (10 · 5,6) = log nat 10 + log 5,6 = 2,3 + 1,72 = 4,02; ferner ist log nat 560 = log nat 100 · 5,6 = log nat 10 + log nat 10 + log nat 5,6 = 2 · 2,3 + 1,72 = 6,32.

Ferner findet man unmittelbar nat log 0,8 = — 0,22, zur Kontrolle kann man diesen Logarithmus auch durch Subtraktion finden, indem log nat 0,8 = log nat $^4/_5$ = log nat 4 — log nat 5 oder log nat 0,8 = 1,39 — 1,61 = — 0,22 ist.

Weiter ergiebt sich aus Fig. 69 log nat 12 = 2,5 (2,48) und log nat $\frac{12}{10}$ = log nat $\frac{6}{5}$ = log nat 6 — log nat 5 = 1,79 — 1,61 = 0,18; diesen Wert kann man aus der graph. Tab. unmittelbar finden; zwischen Num 1 und Num 1,5 liefert log nat 1,2 einen Kurvenwert, welcher zwischen 0,15 und 0,2 fällt; er lässt sich auch leicht nach dem Augenmass feststellen.

XII. Es soll $\sqrt[4]{56}$ berechnet werden.

Nach Fig. 70 findet sich bei a und b, log 56 = 1,748. In Fig. 69 bei a_1, b_1, bezw. bei d log nat 56 = log nat 10 · 5,6 = 2,3 + 1,72 = 4,02.

Teilt man nun $\overline{ob}$ in 4 Teile, oder berechnet $^1/_4$ · 1,748 = 0,437, so entspricht dieser Länge $\overline{oc}$, Fig. 70, die Zahl 2,74, welchen Num man bei e findet.

Der natürl. Log. 4,02 ergiebt als vierten Teil nahe $\frac{4,02}{4} = 1$, die zugehörige Zahl bei e, Fig. 69, ist wieder 2,74.

XIII. Es soll $\sqrt{12,8}$ ausgeführt werden. Aus Fig. 70 findet sich unmittelbar log 12,8 = 1,107; da nun $^1/_2$ 1,107 = 0,554, so folgt num log 0,554 = 3,58 als Resultat; $\sqrt{12,8}$ = 3,58.

Will man $\sqrt[2]{12{,}8^3}$ log.-graph. finden, so hat man den obigen Log. mit $\frac{3}{2}$ zu multiplizieren $\frac{3}{2} \cdot 1{,}107 = 1{,}66$. Die Zahl, der Num zu 0,66 ist 4,58, sonach folgt wegen der Kennziffer 1, $\sqrt[2]{12{,}8^3} = 45{,}8$.

XIV. Zur analytischen Berechnung einer Dampfmaschine, Berechnung des Kolbenquerschnittes, ergiebt sich der Expansionskoeffizient aus (s. Bd. II S. 350) $k = e + (m + e) \log \text{nat} \frac{1 + m}{e + m}$, wenn m der Koeffizient des schädlichen Raumes, gewöhnlich $\frac{1}{20}$, e der Expansionsgrad ist. Es soll nun für $e = 0{,}5$, Expansion auf dem halben Kolbenweg, k berechnet werden. Es ergiebt sich $k = 0{,}5 + (0{,}05 + 0{,}5) \log \text{nat} \frac{1 + 0{,}05}{0{,}55} = 0{,}5 + 0{,}55 \log \text{nat}\, 1{,}9$. Log nat 1,9 kann man unmittelbar aus Fig. 69 finden, 0,64, sonach folgt $k = 0{,}5 + 0{,}55 \cdot 0{,}64 = 0{,}85$.

7. Die graphische Auflösung der Gleichungen.

Jede Gleichung lässt sich auf die Form bringen

$$a x^n + b x^{n-1} + c x^{n-2} + \ldots . + z = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

Mit dem Buchstaben n bezeichnen wir den beliebigen Grad der Gleichung, nten Grades, und sind a, b, c ... Koeffizienten, Faktoren aus einfachen Zahlen, Buchstaben oder math. Ausdrücken bestehend, die als bekannt vorausgesetzt werden müssen, mit welchen eine beliebige Potenz der Unbekannten multipliziert erscheint. Ausgeschlossen ist hierbei durchaus nicht, dass ein oder der andere dieser Koeffizienten Null ist, dann fällt das eine oder andere Glied mit der betreffenden Potenz von x hinweg.

Die in Gl. 13 angedeutete Ordnung, die äussere Form dieser Gleichung soll weniger als die Reduktion auf 0 für uns massgebend sein, indem es gerade für das graphische Verfahren mehr auf die Reduktion auf 0 als auf die Ordnung der Glieder ankommt.

Ohne die Gleichung 13 zu verändern und ohne Einfluss auf eine dadurch veränderte graph. Darstellung, können wir dieselbe durch a dividieren und erhalten

$$x^n + \frac{b}{a} x^{n-1} + \frac{c}{a} x^{n-2} + \frac{d}{a} x^{n-3} + \ldots + \frac{z}{a} = 0.$$

Die Koeffizienten $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$ ... sind wieder Konstante, welche wir mit A, B, C ... bezeichnen wollen, so dass die vorstehende Gleichung auch geschrieben werden kann

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \ldots + Z = 0 \quad . \quad . \quad (14).$$

Setzen wir die linke Seite der Gleichung gleich y und betrachten in der neuen Gleichung

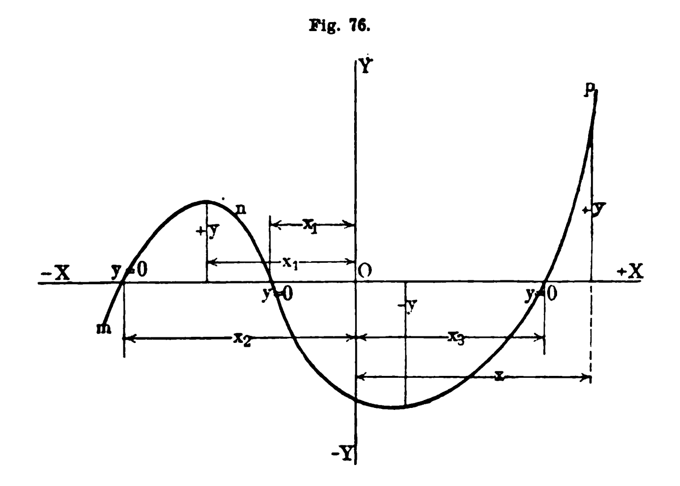
$$y = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \ldots + Z \quad . \quad . \quad (15).$$

x als eine veränderliche, so kann (15) bekanntlich als Gleichung einer Kurve angesehen werden. Man hat nur nötig, für x irgend welche positive oder negative Werte einzusetzen und für jedes x ein y zu berechnen. Trägt man dann das angenommene x, von einem Punkt (Koordinatenanfang) ausgehend, die positiven nach rechts, die negativen nach links, auf, und die berechneten y senkrecht an den Endpunkten der betreffenden x, so hat man nur nötig, die erhaltenen Punkte zu einem Kurvenzug zusammen zu fügen, um eine übersichtliche graphische Darstellung der Gleichung 15 zu erhalten. Die eingesetzten Werte von x nennt man Abscissen (Abschnitte), die berechneten y die Ordinaten (die zu x gehörenden), beide die Koordinaten (die zusammengehörigen Werte). Die erforderlichen Ausgangslinien nennt man Achsen, Abscissen, bezw. Ordinatenachse. Bei der Berechnung der y ist nicht ausgeschlossen, dass y auch negativ wird, wir tragen dann einen solchen Wert unterhalb der Abscissenachse am Endpunkt des zugehörigen x-Wertes an; zwischen einem solchen negativen und dem darauffolgenden positiven Wert y kreuzt aber die Kurve die Achse, d. h. es giebt einen Wert von x, für welchen y zu Null wird. Dieser Wert von x genügt demnach auch der Gleichung (14) und stellt somit eine Lösung (Wurzel) dieser Gleichung dar.

Ein in obigem Sinne aufgetragener Linienzug kann, Fig. 76 und 77, eine krumme oder gerade Linie mnp sein, im letzteren Fall haben wir nur nötig 2 Punkte zu berechnen, ferner kann eine offene oder geschlossene Figur (Fig. 85) resultieren oder es kann y mehrmal die Achse schneiden, dann hat die Gleichung mehrere Auflösungen. Endlich kann auch der Fall eintreten, dass die Kurve die X-Achse nur berührt oder überhaupt nicht trifft (Fig. 81), dann ist keine wirkliche (reelle) Lösung der Gleichung vorhanden, sondern nur eine imaginäre (eine eingebildete, theoretische, mathematische Lösung).

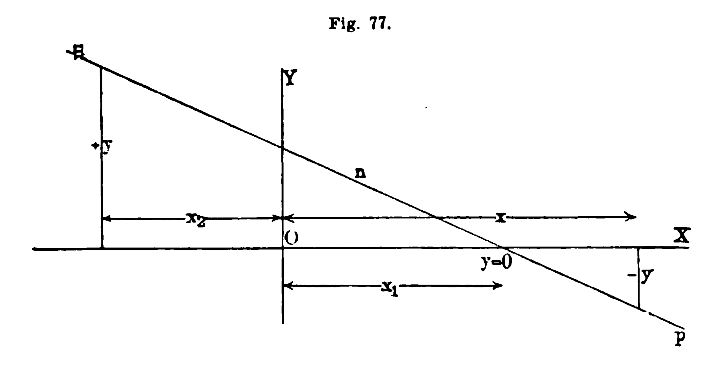
In Fig. 76 wird y am Endpunkte von x positiv, für $-x_4$ auch positiv (in der Fig. ist für das erste $+y$ die Abscisse x_1 in x und für das

Fig. 76.



andere $+y$ die zugehörige Abscisse x in x_4 zu ändern), für $+x_1$, x_2 und x_3 wird y Null. Aus der Figur einen der letzteren Werte entnommen und als positiven, event. negativen in die fragliche Gleichung eingesetzt, wird der Gleichung Genüge geleistet, diese aufgelöst. Die 3 sogenannten Wurzeln der diese Kurve darstellenden Gleichung III. Grades

Fig. 77.



sind also x_1, x_2 und x_3, davon ist also x_3 positiv, die andern sind negativ. Man nennt die eine Gleichung auflösenden Werte darum Wurzel, weil die endgültige Reduktion der Rechnung schliesslich die Form annimmt $x^n = M$, woraus $x = \sqrt[n]{M}$.

In Fig. 77 ist nur eine Lösung der Gleichung vorhanden, denn y

wird nur bei x_1 zu Null. Die Bedingung der Auflösung, abhängig von den Wurzeln $x_1, x_2, x_3 \ldots$ ausgedrückt, kann man auch schreiben

$$(x_1 - \alpha)(x_2 - \beta)(x_3 - \gamma)(x_4 - \delta) \ldots = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (16),$$

woraus $x_1 - \alpha = 0$, $x_1 = \alpha$; $x_2 - \beta = 0$; $x_2 = \beta$, $x_3 = \gamma$ u. s. w., sofern α, β, $\gamma \ldots$ die Wurzeln, die Auflösungen selbst, bedeuten. Grundprincip ist nun auch hier, wie schon früher bemerkt, dass der betreffende Wert x, welcher eine Lösung ergiebt, um so sicherer aus der Zeichnung entnommen werden kann, je genauer diese ausgeführt ist.

Um eine Gleichung graphisch zu lösen, reduzieren wir sie nach dem Vorherigen zunächst auf 0, nehmen für 0 einen Wert y an, setzen für x der Reihe nach Werte ein, und suchen nach der resultierenden Kurve denjenigen Wert x, für welchen y zu 0 wird, die Achse schneidet.

Die analytische Geometrie lehrt uns aber nicht allein die Konstruktion der Kurven nach der Gleichung auszuführen, sondern auch die Bedeutung der Kurve aus der Gleichung zu erkennen, wodurch wir ihren Verlauf schon von vornherein andeuten, und uns demnach die gestellte Aufgabe erleichtern können.

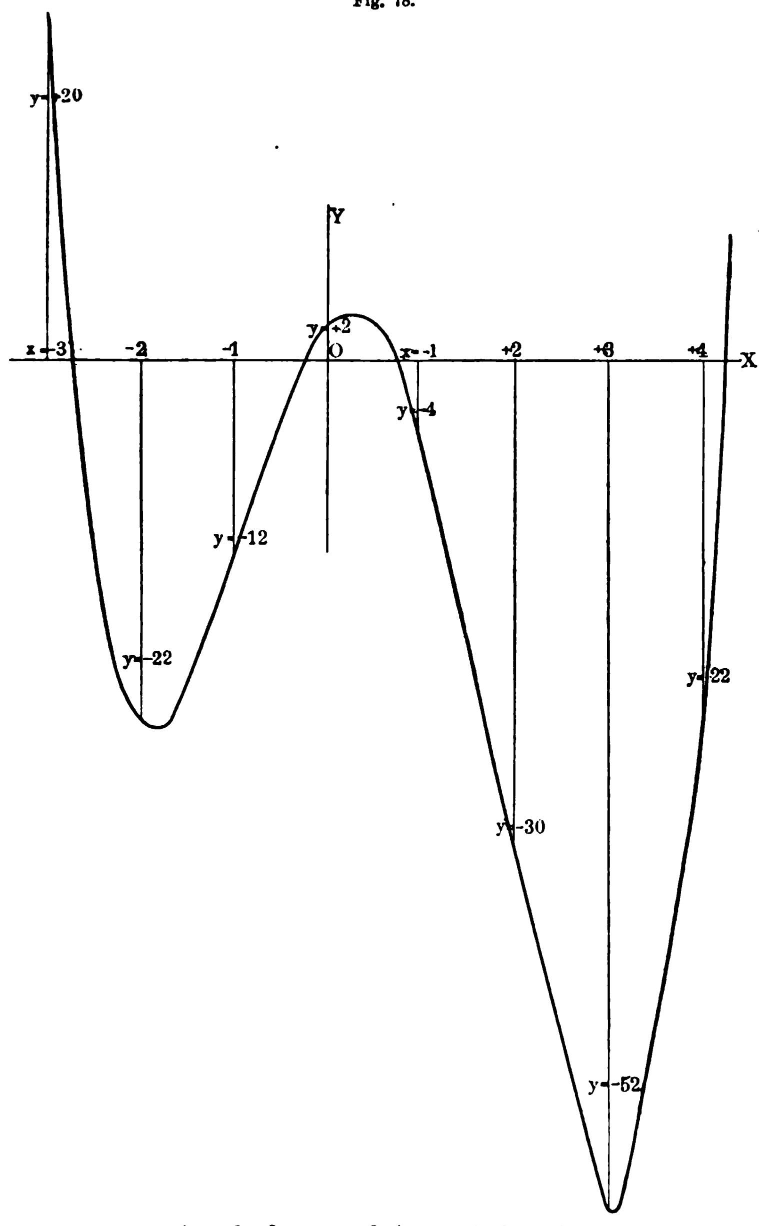
Für die gewöhnlichen Fälle der praktischen Technik genügt es uns zu wissen, dass eine Gleichung I. Grades, in welcher x als 1. Potenz erscheint und in welcher auf y reduziert, keine Produkte xy auftreten, bei einer etwaigen algebraischen Auflösung, eine gerade Linie bedeutet; jede Gleichung II. Grades hingegen einen Kegelschnitt (Kreis, Ellipse, Parabel, Hyperbel). Eine gerade Linie kann nur einmal durch Null gehen, die Achse kreuzen, hat also nur eine Auflösung; ein Kegelschnitt kann so in dem Achsenkreuz gelagert sein, dass entweder, wie schon angedeutet, gar keine Auflösung, Durchkreuzung, oder nur eine Berührung, oder eventuell zwei negative oder positive, oder ein negativer oder positiver Wert resultiert, keinesfalls mehr als zwei. Kreis und Ellipse sind geschlossene, Parabel und Hyperbel sind offene Kurven, deren Äste schliesslich für ein unendliches $\pm x$ im Unendlichen verlaufen. Jede andere höhere Gleichung hat theoretisch so viel Auflösungen, Wurzeln, als der Grad der Gl. angiebt, von denen allerdings je nach der Lage der Kurve ein oder mehrere positiv, negativ, ev. imaginär sein können, welche im letzteren Fall für die Praxis nicht verwertbar sind.

Beispiele. I. Es soll die Gleichung 4. Grades

$$5x^4 + 30x + 10 = 10x^3 + 55x^2$$

graphisch aufgelöst werden. Dividiert man dieselbe durch 5 und reduziert auf Null, so erhält man

Fig. 78.



$$x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 6x + 2 = 0;$$

in die **konstruktive** Form gebracht, Gl. 15, folgt

$$y = x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 6x^2 + 2.$$

Setzt man in diese Gleichung $x = -3$, so erhält man

$$y = 81 + 54 - 99 - 18 + 2 = +20;$$

für $x = -2$ wird

$$y = 16 + 16 - 44 - 12 + 2 = -22;$$

für $x = -1$ folgt

$$y = 1 + 2 - 11 - 6 + 2 = -12;$$

für $x = 0$, folgt $y = +2$;
endlich für $x = +1, +2, +3 \ldots\ldots$ findet man,

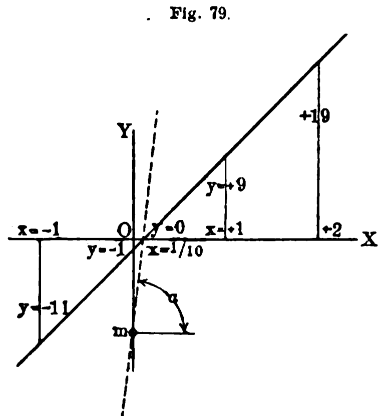
wenn $x = +1$, $y = -4$,
„ $x = +2$, $y = -30$,
„ $x = +3$, $y = -52$,
„ $x = +4$, $y = -22$,
„ $x = +5$, $y = -132$,
„ $x = +6$, $y = -506$.

Für $x = \pm \infty$ folgt in beiden Fällen $y = +\infty$.

Das vorstehende Ergebnis ist in Fig. 78 eingetragen. Die resultierende Kurve kreuzt an vier Stellen die Abscissenachse OX, für $x_1 = +0{,}73$, $x_2 = +4{,}24$, $x_3 = -0{,}24$ und für $x_4 = -2{,}73$. Die gegebene Gleichung hat 4 Wurzeln, zwei positive und zwei negative, jede für sich eingesetzt, genügt der Gleichung. Die erste Auflösung liefert beispielsweise ganz richtig $5 \cdot 0{,}73^4 + 30 \cdot 0{,}73 + 10 = 10 \cdot 0{,}73^3 + 55 \cdot 0{,}73^2$ oder $1{,}420 + 31{,}9 = 3{,}9 + 29{,}32 = 33{,}2$.

Die 3. Wurzel $5 \cdot (-0{,}24)^4 + 30 \cdot (-0{,}24) + 10 = 10 \cdot (-0{,}24)^3 + 55 \cdot (-0{,}24)^2$ oder abg. $+0{,}02 - 7{,}2 + 10 = -0{,}18 + 3{,}1$.

Fig. 79.



II. Es sei die Gleichung zu lösen,

$$(8 - 3x)^2 + (4 - 4x)^2 = (9 - 5x)^2.$$

Auf Null, bezw. y reduziert, folgt

$$y = (8 - 3x)^2 + (4 - 4x)^2 - (9 - 5x)^2.$$

Berechnet man y für $x = -1, 0, +1, 2$, so erhält man

$y = 11^2 + 8^2 - 14^2 = -11$, wenn $x = -1$;
$y = 8^2 + 4^2 - 9^2 = -1$ für $x = 0$;
$y = 5^2 + 0 - 4^2 = +9$ für $x = 1$ und
$y = 19$ für $x = 2$.

Wie aus der Figur zu ersehen, resultiert eine gerade Linie, welche für $x = {}^1/_{10}$ die X-Achse schneidet. Die gegebene Gleichung ist I. Grades, ihre Wurzel ist $x = 0{,}1$; würde

man die Klammern auflösen und die Glieder algebraisch summieren, so müssen sich die, welche die zweite Potenz enthalten, heben, d. h. addiert für sich allein Null geben*).

III. Man soll die Gleichung

$$2 - \frac{5 + x}{7} = 1 - \frac{9 - x}{14}$$

auflösen. Auf 0, bezw. y reduziert, folgt

$$y = \frac{5 + x}{7} - 1 - \frac{9 - x}{14}.$$

Für die graphische Darstellung genügen uns hier zwei, höchstens drei Punkte, da die vorstehende Gl. I. Grades wieder eine gerade Linie liefern muss, Fig. 80.

Für $x = -1$ folgt $y = -\frac{16}{14}$, für $x = 0$, $y = -\frac{13}{14}$ und für $x = 1$ wird $y = -\frac{10}{14}$.

In beistehender Figur haben wir für x und y verschiedene Einheiten gewählt; weil die Ordinaten y alle gleichen Nenner haben, so genügt es, in den betreffenden 3 Punkten die Zähler 16, 13 und 10 aufzutragen (1,6 cm, 1,3 und 1 cm).

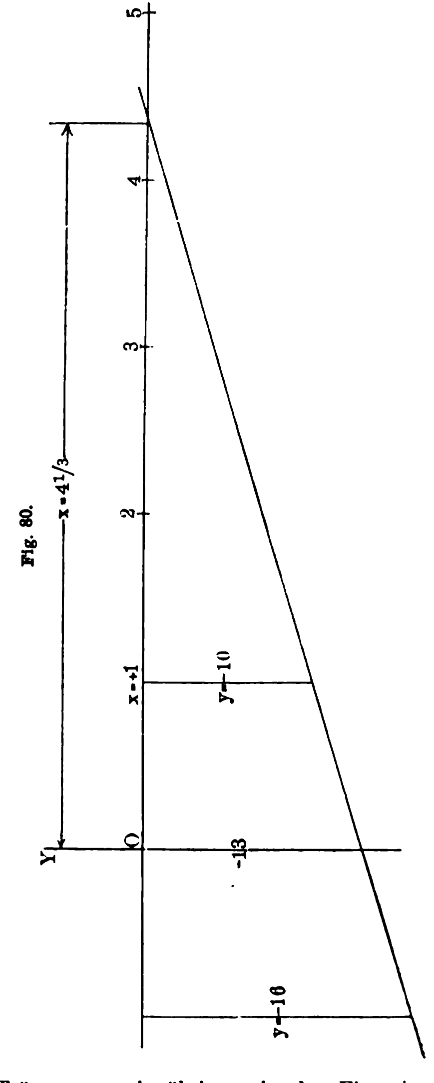
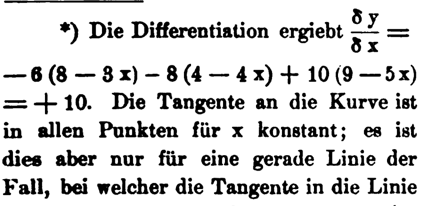


Fig. 80.



*) Die Differentiation ergiebt $\frac{\delta y}{\delta x} = -6(8 - 3x) - 8(4 - 4x) + 10(9 - 5x) = +10$. Die Tangente an die Kurve ist in allen Punkten für x konstant; es ist dies aber nur für eine gerade Linie der Fall, bei welcher die Tangente in die Linie fällt; tang $\alpha = 10$ ergiebt $\alpha = 84^\circ\ 20'$. Trägt man, wie übrigens in der Figur geschehen, in demselben Masstab die berechneten Ordinaten y auf, in welchem die Abscissen x aufgetragen sind, oder an dem Punkt m, für welchen $x = 0$ ist, $\alpha = 84^\circ\ 20'$, so schneidet diese Linie auch für $x = \frac{1}{10}$ die Achse.

Die Linie schneidet in dem Punkte für $x = 4^1/_3$ die Achse, für welchen zugleich die Auflösung der Gleichung erfolgt, setzt man $x = 4^1/_3$, so ist

$$2 - \frac{5 + 4^1/_3}{7} = 1 - \frac{9 - 4^1/_3}{14}.$$

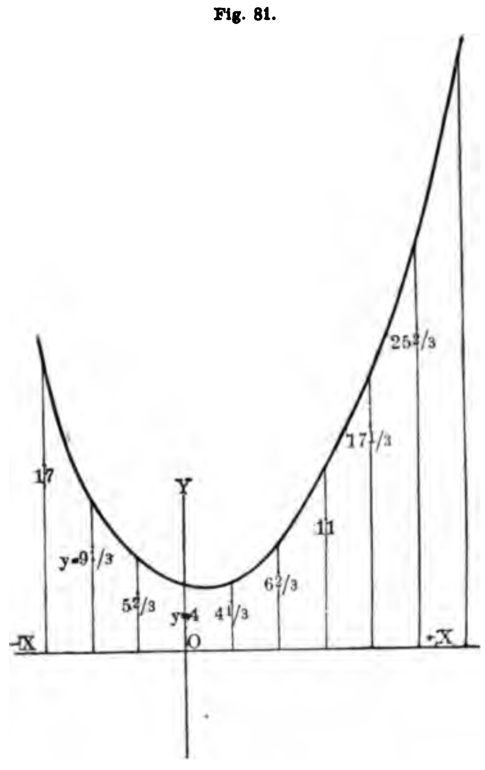
IV. Gegeben ist die Gleichung II. Grades

$$3x^2 + 12 = 2x,$$

man soll dieselbe graphisch auflösen.

Auf 0 reduziert und durch 3 dividiert, folgt zunächst

Fig. 81.



$$x^2 + 4 - {}^2/_3\,x = 0.$$

Setzen wir jetzt wieder

$$y = x^2 - {}^2/_3\,x + 4$$

und führen für x der Reihe nach verschiedene Werte ein, so berechnen sich die zugehörigen y wie folgt:

Für $x = 0$ wird $y = 4$,
„ $x = 1$ „ $y = 1 - {}^2/_3 + 4 = 4^1/_3$
„ $x = 2$ „ $y = 4 - {}^4/_3 + 4 = 6^2/_3$
„ $x = 3$ „ $y = 9 - 2 + 4 = 11$
„ $x = 4$ „ $y = 16 - {}^8/_3 + 4 = 17^1/_3$
„ $x = -1$ „ $y = 1 + 4 + {}^2/_3 = 5^2/_3$
„ $x = -2$ „ $y = 4 + 4 + {}^4/_3 = 9^1/_3$

u. s. w.

Die resultierende Kurve, eine Parabel, Fig. 81, welche ihre tiefste Krümmung (ihr Minimum*) bei $x = {}^1/_3$ hat, schneidet nirgends die X-Achse; eine reelle Auflösung für x ist nicht vorhanden, die beiden Wurzeln sind imaginär $x = {}^1/_3 \pm \sqrt{\frac{1}{9} - 4} = {}^1/_3 \pm {}^1/_3\,\sqrt{-35}$ bezw. $x_1 = {}^1/_3 + {}^1/_3\,\sqrt{-35}$ und $x_2 = {}^1/_3 - {}^1/_3\,\sqrt{-35}$.

---

*) Aus der Gleichung $\frac{dy}{dx} = 2x - {}^2/_3 = 0$, folgt $x = {}^1/_3$.

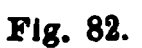
V. Man soll die Gleichung auflösen:

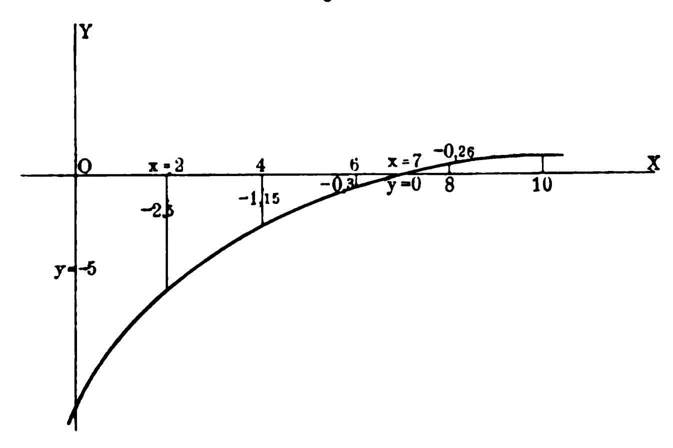
$$8x - 28 = (4x + 21)\frac{6x - 22}{3x + 14}.$$

Wir setzen wieder

$$y = (4x + 21)\frac{6x - 22}{3x + 14} - 8x + 28$$

und für x entsprechende Werte.


Fig. 82.



Man erhält für $x = 0$, $y = -5$,
$x = 2$, $y = -2{,}5$,
$x = 4$, $y = -1{,}15$,
$x = 6$, $y = -0{,}3$,
$x = 8$, $y = +0{,}26$,
$x = 10$, $y = +0{,}30$ u. s. w.

Trägt man diese Werte auf (Fig. 82), so findet man, dass $y = 0$ zwischen $x = 6$ und $x = 8$ liegt, man entnimmt aus der Zeichnung $y = 0$ für $x = 7$ und erhält auch nach obiger Gleichung

$$y = (28 + 21)\frac{42 - 22}{21 + 14} - 56 + 28 = 0.$$

VI. Man soll auf graphischem Wege x aus der folgenden Gleichung bestimmen $\sqrt{36 + x} = 18 - \sqrt{x}.$

Setzt man in dem auf y reduzierten Ausdruck $y = \sqrt{36 + x} - 18 + \sqrt{x}$ für x die folgenden Werte ein, und berechnet y, so erhält man:

wenn $x = 0,\ y = \sqrt{36} - 18 = -12,$

$x = 4,\ y = \sqrt{40} - 18 + 2 = -9{,}675,$

$x = 9,\ y = \sqrt{45} - 18 + 3 = -8{,}3$

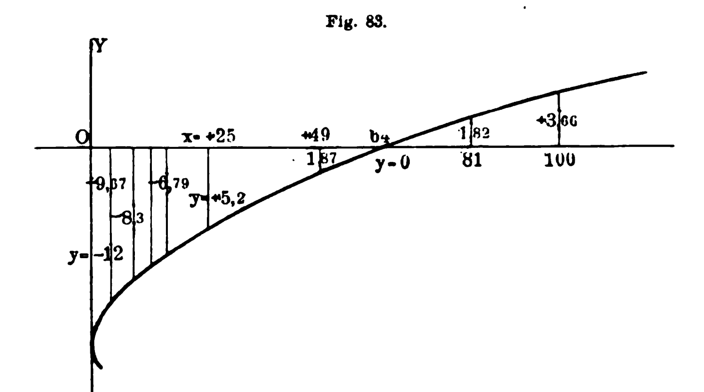
$x = 16,\ y = \sqrt{52} - 18 + 4 = -6{,}789,$

$x = 25,\ y = -5{,}19,$

$x = 49,\ y = -1{,}87,$

$x = 81,\ y = +1{,}82.$

Fig. 83.



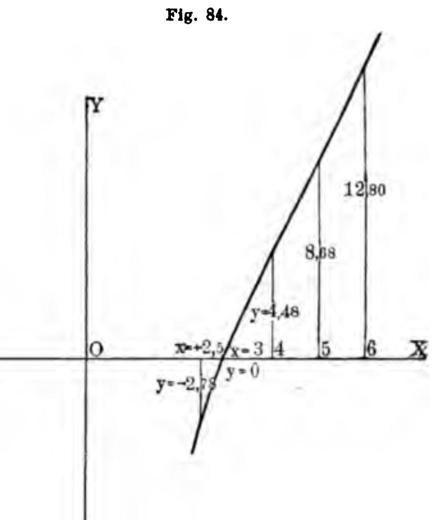
Der Gleichung wird Genüge geleistet, wenn, Fig. 83, $x = 64$; es wird dann $y = 0$.

Die Gleichung ist II. Grades und stellt einen Parabelast dar, und zwar den oberen Ast, welcher in der Entfernung $x = 64$ die X-Achse schneidet, für $x = \infty$ wird y auch ∞, der untere Ast kommt in der Gleichung nicht in Betracht. Quadriert man die Gl., dann verschwinden die Glieder mit x, die Gl. wird auf eine einfachere II. Grades reduziert. Links der Y-Achse sind dann keine Punkte mehr vorhanden, da für alle negativen Werte von x das Glied $\sqrt{x}$ imaginär wird*). Aus $(\sqrt{36 + x})^2 = (18 - \sqrt{x})^2$ folgt $\sqrt{x} = \frac{288}{36} = 8$ und $x = 64$.

*) Der Differentialquotient ist $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{36 + x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right]$, dieser wird für $x = 0$ unendlich, die Tangente $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang} \varphi = \infty$ liefert aber $\varphi = 90°$; die Kurve wendet sich in der Y-Achse. Vertauscht man die Koordinaten und setzt $x = \sqrt{36 + y} + \sqrt{y} - 18$, woraus $y = \left[\frac{(x + 18)^2 - 36}{2(x + 18)}\right]^2$, so findet man durch weitere Untersuchungen, da diese Gl. zwei Parabeln enthält, dass obige Gleichung den Ast einer derselben darstellt.

VII. Auch die Gleichung $\sqrt{4x^2 - 7x - 6} = 9 - 2x$ reduziert sich durch die algebraische Rechnung auf eine Gl. I. Grades; obgleich sie als Gl. II. Grades eine Hyperbel darstellt; der eine Ast schneidet die Abscissenachse, der andere liegt unterhalb derselben.

Fig. 84.



Setzt man wieder $y = 2x - 9 + \sqrt{4x^2 - 7x - 6}$, so liefert diese Gleichung so lange keine reellen Werte für y, als $4x^2 - 7x < -6$, nämlich innerhalb der abgerundeten Grenzen $x = -\,^2/_3$ und $x = +2\,^2/_5$. Erst für $x = -\,^3/_4, -1, -2, -3$ .... und für $x = 2\,^1/_2, 3, 4$ .... wird $\sqrt{4x^2 - 7x - 6}$ reell, lässt sich die Wurzel ausziehen und y berechnen.

Da nun alle Werthe von y zwischen $x = -\,^3/_4$ und ∞ negativ, hingegen, wie Fig. 84 zeigt, y positiv für $x = 4$ bis ∞, so ist es nur nötig, einige der letzteren aufzutragen, um zu ermitteln, für welchen Wert von x, $y = 0$ wird; man findet, dass die Gleichung für $x = 3$ gelöst ist. Wir haben darum auch den unterhalb der X-Achse liegenden Ast zwischen $x = -\,^3/_4 \ldots\ldots -\infty$ hinweggelassen; infolge des einmaligen Schnittes für $x = 3$ ist auch die Reduktion auf eine Gleichung I. Grad. begründet. Quadriert man die Gleichung, so folgt $4x^2 - 7x - 6 = 81 - 36x + 4x^2$, hieraus folgt, $29x = 87$ und $x = 3$.

VIII. Es soll die Gleichung II. Grades

$$\sqrt{6x - x^2 - 5} = -4$$

graphisch dargestellt werden.

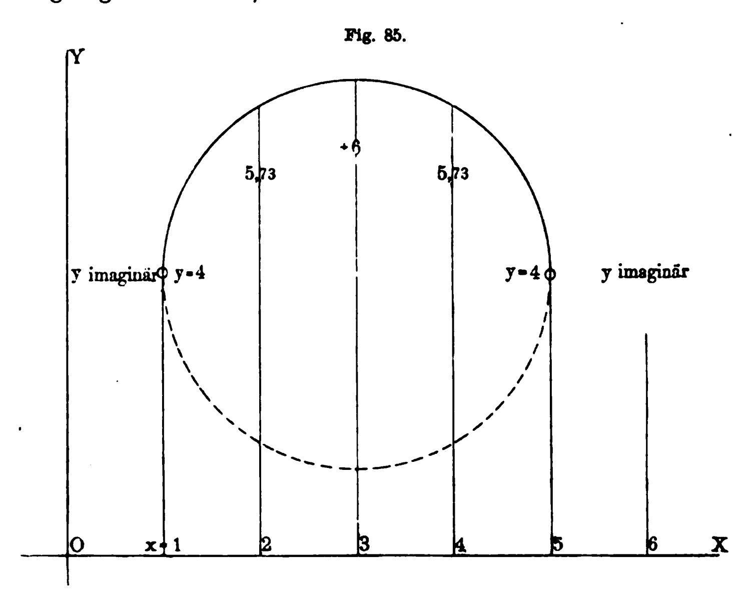
Setzt man $y = 4 + \sqrt{6x - x^2 - 5}$ und für x die Werte $x = 0$, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ... ein, so erhält man erst für $x = 1$, 2, 3, 4, 5 reelle Werte, nämlich

für $x = 1$, $y = 4 + \sqrt{6 - 1 - 5} = +4$,
„ $x = 2$, $y = 4 + \sqrt{12 - 4 - 5} = +5{,}73$,
„ $x = 3$, $y = 6$; $x = 4$, $y = +5{,}73$; $x = 5$, $y = +4$.

y wird für $x = 6$ und für $x = 0$ imaginär, d. h. die Wurzel lässt sich

nicht ausrechnen. In Fig. 85 haben wir die Figur, den Kreis, aufgetragen; derselbe schneidet in keinem Punkt die X-Achse. Löst man die Gleichung algebraisch auf, so erhält man aus

Fig. 85.



$$6x - x^2 - 5 = 16 \text{ bezw. } x^2 - 6x + 5 = -16 \text{ oder}$$
$$x^2 - 6x = -11, \; x = +3 \pm \sqrt{9 - 11} = 3 \pm \sqrt{-2}.$$

Die beiden Wurzeln sind $x_1 = 3 + 1{,}414\sqrt{-1}$ und $x_2 = 3 - 1{,}414\sqrt{-1}$, für die Praxis also nicht verwendbare Werte.

IX. Die Gl. II. Grades $x^2 - 6x = 7$ liefert die beiden Werte $x_1 = +7$ und $x_2 = -1$, denn es ist

$$7^2 - 6 \cdot 7 = 7 \text{ und } (-1)^2 + 6 = 7.$$

In nachstehender Figur ist die Gl. graphisch gelöst. Man erhält eine parabolische Kurve, welche die X-Achse in $x = -1$ und $+7$ schneidet; die betr. Koordinaten sind in der Figur eingetragen.

In der Fig. ist unterhalb $x = -1$, zwischen y und 0, ein $=$ zu setzen.

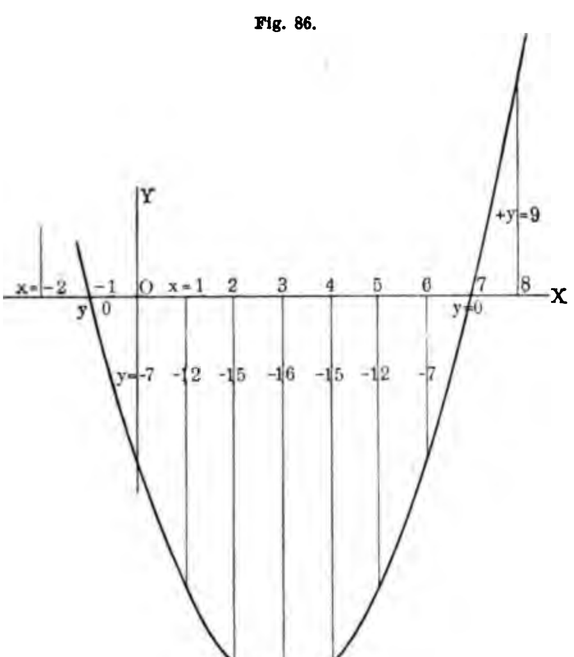
X. Die folgende Gl. I. Grades

$$\frac{2x - 3}{15} - \frac{4x - 9}{20} = \frac{8x - 27}{30} - \frac{16x - 81}{24} - \frac{9}{40}$$

stellt eine gerade Linie dar. Wir haben die beiden Ordinaten für $x = 0$

$$y = -\frac{3}{15} + \frac{9}{20} + \frac{27}{30} - \frac{81}{24} + \frac{9}{40} = -2 \text{ und}$$

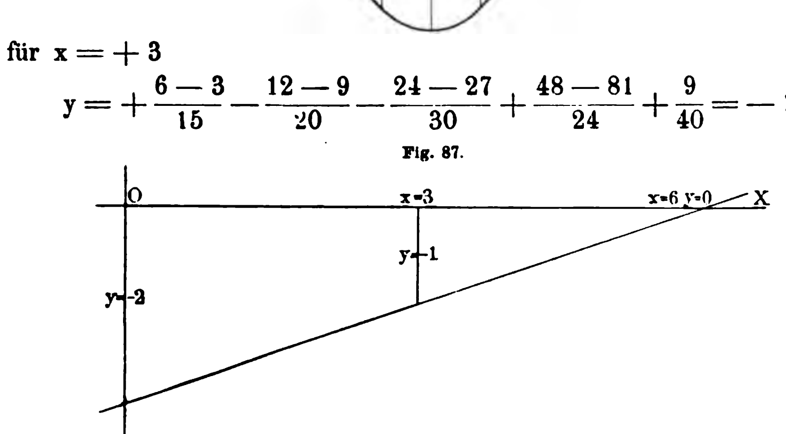
Fig. 86.



für $x = +3$

$$y = +\frac{6-3}{15} - \frac{12-9}{20} - \frac{24-27}{30} + \frac{48-81}{24} + \frac{9}{40} = -1$$

Fig. 87.



in beistehender Fig. 87 aufgetragen, die Verbindungslinie der Endpunkte schneidet in der Entfernung $x = +6$ die Achse. Der Gleichung wird hiernach für $x = +6$ Genüge geleistet.

XI. Die Gleichung $x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0$ hat als Gl. III. Grades 3 Wurzeln, bezw. 3 Auflösungen. In Fig. 88 haben wir die graphische Lösung ausgeführt.

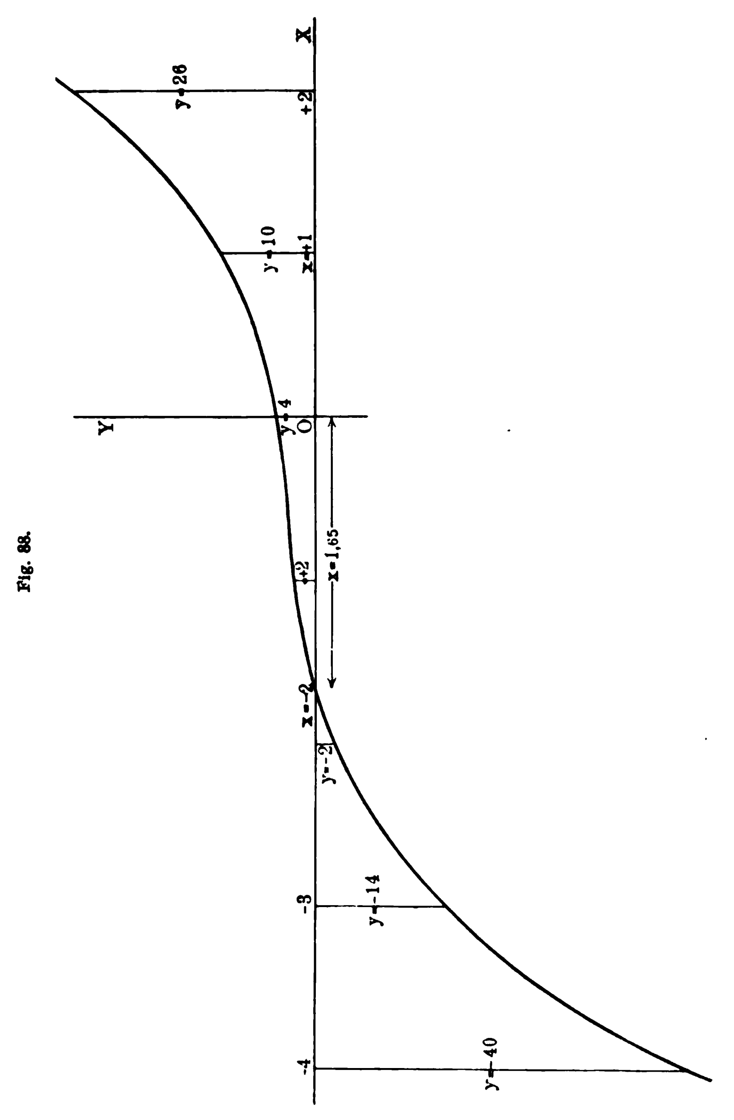


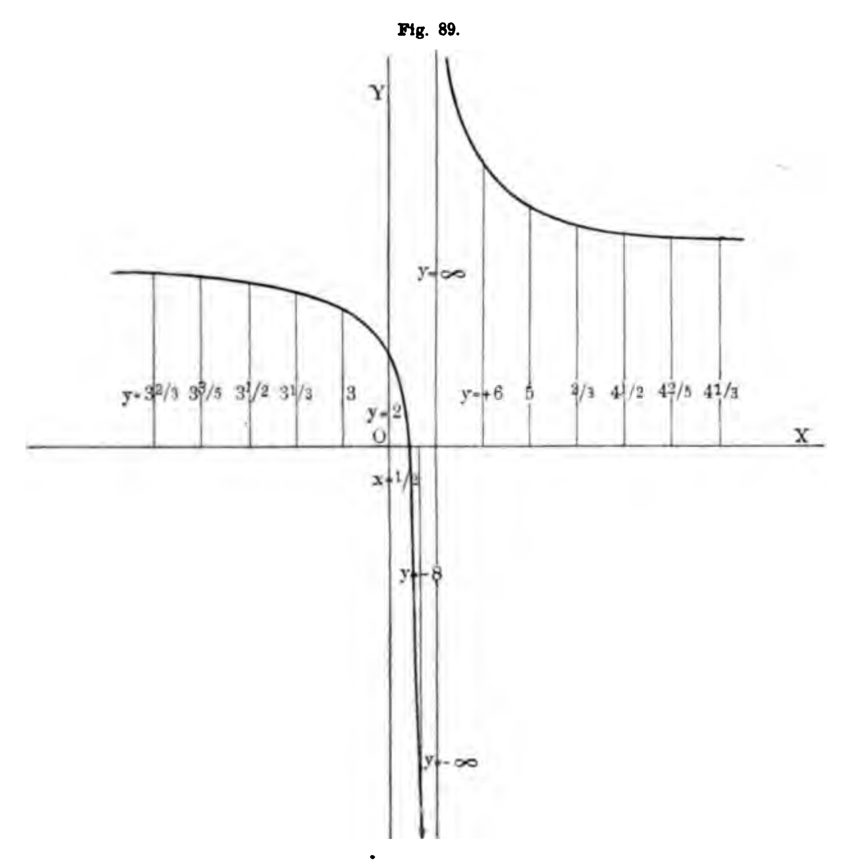
Fig. 88.

Setzt man $y = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ und für $x = 0$, so erhält man $y = +4$. Alle Werte, welche > 0, $x = 1, 2 \ldots . \infty$, liefern für y ein positives Resultat, weil sämtliche Glieder positiv sind und für ein positives x positiv bleiben; für $x = 1$, wird $y = 10$; für $x = 2$, $y = 26$ etc. Wenn x negativ, dann wird das erste und das dritte Glied mit den ungeraden Potenzen negativ; $x = -1$ liefert noch einen positiven Wert

von y, nämlich $y = (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 4 = +2$, in allen andern Potenzen überwiegt aber die stets negative dritte Potenz der Unbekannten im ersten Gliede die andern. Von $x = -2$ bis $x = -\infty$ wird y negativ, man erhält hiernach nur eine Auflösung, eine reelle Wurzel, wie aus der Figur ersichtlich, $x = -1{,}65$. Die andern beiden in der Theorie vorhandenen Auflösungen müssen imaginär sein; die algebraisch, nach der Cardanischen Formel berechneten Wurzeln sind $x_1 = -1{,}65063$, $x_2 = -0{,}174685 + 1{,}546871\sqrt{-1}$ und $x_3 = -0{,}174685 - 1{,}546871\sqrt{-1}$.

XII. Es sei die Gleichung $\frac{x+1}{x-1} = -3$ aufzulösen.

Fig. 89.



Wir setzen $y = \frac{x+1}{x-1} + 3$.

Wie aus vorstehender Figur zu ersehen, resultieren, Werte für x ein-

gesetzt und y berechnet, zwei getrennte Kurven (Hyperbeln), von denen die eine die Achse schneidet; thatsächlich liefert auch obige Gleichung, auf 0 reduziert, einen Wert für x, nämlich $x = {}^1/_2$, während das in der Auflösung der Gleichung für y erscheinende Produkt xy eine Gl. II. Grades bereits andeutet.

Man erhält für

$x = 0,$	$y = +2$	$x = -1,$	$y = +3$
$1,$	$+\infty$	$-2,$	$= +3\,{}^1/_3$
$2,$	$+6$	$-3,$	$= +3\,{}^1/_2$
$3,$	$+5$	$-4,$	$= +3\,{}^3/_5$
$4,$	$+4\,{}^2/_3$	$-5,$	$= +3\,{}^2/_3.$
$5,$	$+4{,}5$		
$6,$	$+4{,}4.$		

y wächst für ein positives und negatives x in beiden Fällen zu positiven Werten an, welche jedoch für $x = \pm \infty$ nie grösser als $y = +4$ werden können*) (asymptotische Annäherung). Für $x = +{}^1/_2$ wird $y = 0$, und für alle Werte zwischen $x = +{}^1/_2$ bis $x = +1$ wird y negativ. Wie oben angedeutet lässt sich diese Gleichung durch Umformung auf eine Gl. I. Grades reduzieren, man erhält $x + 1 = -3(x - 1)$ und hieraus $4x = 2$, bezw. $x = {}^1/_2$.

8. Graphische Darstellung einiger Maxima und Minima und einiger Werte für $\frac{0}{0}$.

Unter **Maxima** und **Minima** versteht man die grössten und kleinsten Werte eines mathematischen Ausdruckes. Die Bestimmung oder Aufsuchung derselben ist für die Praxis oft von grosser Wichtigkeit.

Ist es nicht möglich, unmittelbar aus der betreffenden Formel einen Schluss zu ziehen, so lassen sich nur mit Hilfe der höheren Mathematik auf dem Wege der Rechnung diejenigen Werte bestimmen, für welche der Ausdruck am grössten oder kleinsten wird. Wir wollen nun in diesem Abschnitt versuchen, auf graphischem Wege zum Ziele zu gelangen, um uns unabhängig von den Hilfsmitteln der höheren Mathematik einen solchen Überblick zu verschaffen, der uns sofort erkennen lässt, für

*) Für $x = \pm \infty$ folgt $y = \frac{\infty}{\infty}$; Zähler und Nenner differentiiert, ergiebt sich aus

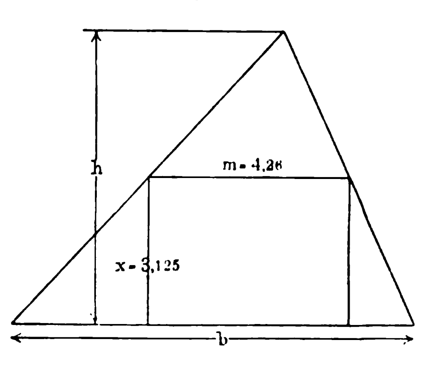
$$y = \frac{x+1}{x-1} + 3 = \frac{4x-2}{x-1}, \quad \frac{\frac{d}{dx}(4x-2)}{\frac{d}{dx}(x-1)} = \frac{4}{1} = 4.$$

welche Werte, oder praktisch ausgedrückt, unter welchen Umständen der gewonnene mathematische Ausdruck den grössten oder kleinsten Wert liefert.

Nicht allein die Technik, sondern auch das praktische Leben fordert oft zu der Frage auf: wie muss man es anfangen, um den grösstmöglichen Vorteil zu erzielen, oder wie ist es möglich, dieses oder jenes auf das Minimum zu beschränken? Die Antwort auf solche Fragen stehen mit der Aufsuchung und Bestimmung der Maxima und Minima in enger Verbindung. Der Bautechniker hat einen Baumstamm mit kreisförmigem Querschnitt vor sich, er beabsichtigt, einen vierkantigen Balken daraus herzustellen; der Zweck desselben ist ihm massgebend für die Wahl der Seitenverhältnisse des Rechteckes. Entweder kommt es ihm hierbei auf die grösste Oberfläche an, oder er fragt nach der grösstmöglichen Tragfähigkeit des Balkens, wenn er ausgehauen ist. Oder ein Klempner soll aus einem quadratischen Stück Blech einen Kasten herstellen; der Zweck desselben ist ihm massgebend für die Dimensionen des Kastens, ob dieser gross oder klein zugeschnitten werden soll, so dass er schliesslich viel oder wenig Raum bietet, u. s. f.

Beispiele. I. Es ist ein Dreieck gegeben, Fig. 90. Die Höhe h und die Grundlinie b sind bekannt, $h = 6{,}25^m$ und $b = 8{,}5^m$; es soll ein Rechteck eingezeichnet werden von möglichst grossem Inhalt; wie sind dessen Seitenverhältnisse zu wählen?

Fig. 90.



Bezeichnet man mit x und m die Seitenlängen des Rechteckes, dann stehen diese zu h und b in folgendem Verhältnis:

$$h - x : h = m : b.$$

Aus dieser Proposition ergiebt sich $m = \frac{(h - x)\, b}{h}$. Der Inhalt des Rechtecks ist $F = x \cdot m$, m eingesetzt, folgt

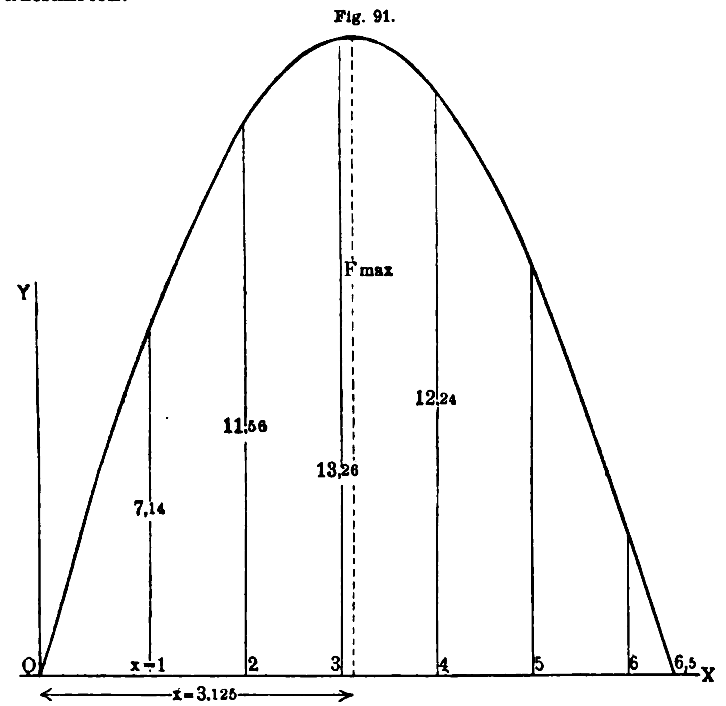
$$F = \frac{b}{h}\, x\,(h - x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Für welchen Wert von x wird nun F am grössten, wenn die gegebenen Dimensionen des Dreiecks in Rücksicht gezogen werden? Führt man die Zahlenwerte von b und h ein, so erhält man

$$F = \frac{8{,}5}{6{,}25}\, x\,(6{,}25 - x).$$

In Fig. 91 haben wir diese Gleichung für beliebige Werte von x konstruiert, und zwar in derselben Weise, wie wir dies schon mehrfach oben ausführten.

Fig. 91.



Die Wahl der Grenzen von x kann nicht schwer fallen, x kann nur innerhalb x = 0 und x = h = 6,25 liegen.

Für x = 0 wird F = 0

„ x = 1 „ $F = \frac{8,5}{6,25}(6,25 - 1) = 7,14$

„ x = 2 „ $F = \frac{8,5}{6,25} \cdot 2\,(6,25 - 2) = 11,56$

„ x = 3 „ $F = \frac{8,5}{6,25}\,3\,(6,25 - 3) = 13,26$

„ x = 4 „ F = 12,24

„ x = 5 „ F = 8,50

„ x = 6 „ F = 2,04

„ x = 6,25 „ F = 0

Man trägt x als Abscissen auf OX und zu jedem zugehörigen Wert die berechneten Ordinaten F parallel OY, verbindet die Endpunkte zu

einer regelmässig verlaufenden Kurve. Diese erreicht gleich hinter $x = 3$, im Punkte $x = 3{,}125$, ihren Höhepunkt; dann wird aber

$$m = \frac{(h - x)\,b}{h} = \frac{(6{,}25 - 3{,}125)\,8{,}5}{6{,}25} = 4{,}26$$

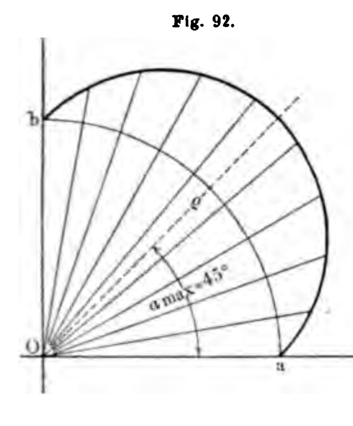
und hiernach ist der grösstmögliche rechteckige Querschnitt aus dem gegebenen Dreieck $F = x \cdot m = 3{,}125 \cdot 4{,}26 = 6{,}80^{qm}$.

Die Rechnung*) liefert den Wert x allgemein

$$x = \frac{h}{2} = \frac{6{,}25}{2} = 3{,}125.$$

II. Es sei allgemein $\rho = \sin\alpha + \cos\alpha$, und soll ermittelt werden für welchen Winkel α ρ am grössten wird.

Fig. 92.



Wir beschreiben mit einem beliebigen Halbmesser einen Viertelkreis, Fig. 92, und teilen diesen in 9 gleiche Teile, jeder derselben umfasst einen Winkel von $\alpha = 10°$. Setzen wir der Reihe nach in die gegebene Formel $\alpha = 0°, 10°, 20° \ldots$, dann erhalten wir für y die folgenden Werte:

Für $\alpha = 0$ wird $\rho = 0 + 1 = 1$,
„ $\alpha = 10°$ „ $\rho = 0{,}174 + 0{,}985 = 1{,}159$,
„ $\alpha = 20°$ „ $\rho = 0{,}342 + 0{,}940 = 1{,}282$,
Für $\alpha = 30°$ wird $\rho = 0{,}500 + 0{,}866 = 1{,}366$,
„ $\alpha = 40°$ „ $\rho = 0{,}643 + 0{,}766 = 1{,}409$,
„ $\alpha = 50°$ „ $\rho = 0{,}766 + 0{,}643 = 1{,}409$,
„ $\alpha = 60°$ „ $\rho = 1{,}366$,
„ $\alpha = 70°$ „ $\rho = 1{,}282$,
„ $\alpha = 80°$ „ $\rho = 1{,}159$,
„ $\alpha = 90°$ „ $\rho = 1{,}000$.

Die Darstellung der aufgetragenen Kurve zeigt, dass ρ am grössten wird, wenn $\alpha = 45°$, nämlich $\rho = 0{,}707 + 0{,}707 = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{2} = 1{,}414$.

III. Versucht man nach den Grundsätzen der Elektrotechnik die günstigste Schaltung auf dem Wege der Rechnung zu bestimmen,

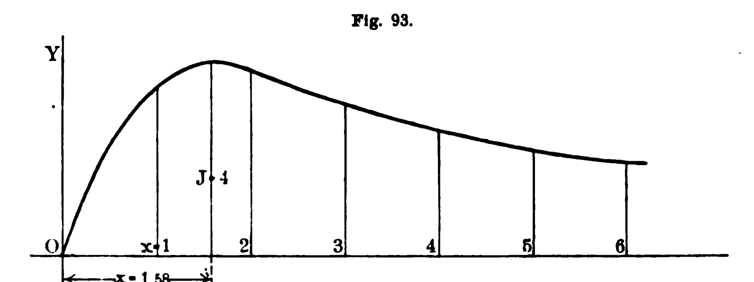
---

*) Setzt man den Differentialquotienten des Ausdruckes in Gl. 17 gleich Null, $\frac{d\,[h\,x - x^2]}{dx} = 0$, so erhält man unabhängig von b, $h - 2x = 0$, sonach $x = \frac{h}{2}$.

wenn der innere Widerstand der Batterie mit w_i, der äussere Widerstand mit w_a bezeichnet wird, und zwar so, dass x Elemente nebeneinander geschaltet werden und man $\frac{n}{x}$ solcher Reihen bilden kann, die man hintereinander schaltet, so lässt sich die Stromstärke, wenn E die elektromotorische Kraft ist, ausdrücken durch

$$J = \frac{n E x}{w_a x^2 + n w_i} \quad \ldots \ldots \quad (18).$$

Fig. 93.



Da die Konstante E für uns kein besonderes Interesse bietet, so wollen wir die Gleichung für E = 1 schreiben $J = \frac{n x}{w_a x^2 + n w_i}$ und uns die Frage vorlegen: wann wird J für bestimmte Werte von n, w_a und w_i am grössten?

Wir wollen $w_a = 0{,}8$, $w_i = 0{,}2$ und $n = 10$ setzen*); man erhält dann $J = \frac{10 x}{0{,}8 x^2 + 2}$.

Setzt man wieder für x verschiedene Werte ein und berechnet jedesmal J, so findet man, Fig. 93:

Für $x = 0$, $J = 0$,

„ $x = 1$, $J = \frac{10}{0{,}8 + 2} = 3{,}57$,

„ $x = 2$, $J = \frac{20}{0{,}8 \cdot 4 + 2} = 3{,}84$,

„ $x = 3$, $J = 3{,}27$,

„ $x = 4$, $J = 2{,}70$,

„ $x = 5$, $J = 2{,}27$,

„ $x = 6$, $J = 1{,}95$ u. s. w.

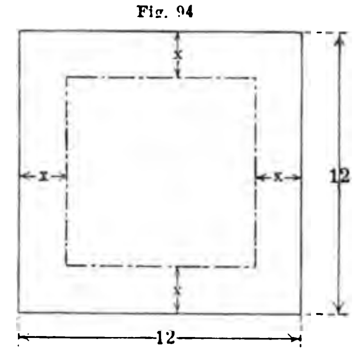
---

*) Die Widerstände w_a und w_i werden gewöhnlich in Ohm- oder Siemens-Einheiten gegeben. 1 Ohm ist der Widerstand, welchen ein 1 mm starker Kupferdraht von $48\frac{1}{2}$ m Länge bietet. 1 Siemens-Einheit ist eine Quecksilbersäule von 1 qmm Querschnitt und 1 m Länge.

Je grösser x, um so kleiner wird jetzt J, weil der Nenner mit dem Quadrat von x wächst.

Das Maximum liegt zwischen $x = 1$ und $x = 2$; für $x = 1{,}5$, wird $J = 3{,}95$. J wird am grössten zwischen $x = 1{,}5$ und $x = 2$, und zwar in der Nähe von $x = 1{,}5$; genau fällt es nach $x = 1{,}58$; man erhält dann abg. $J = 4$*).

Fig. 94



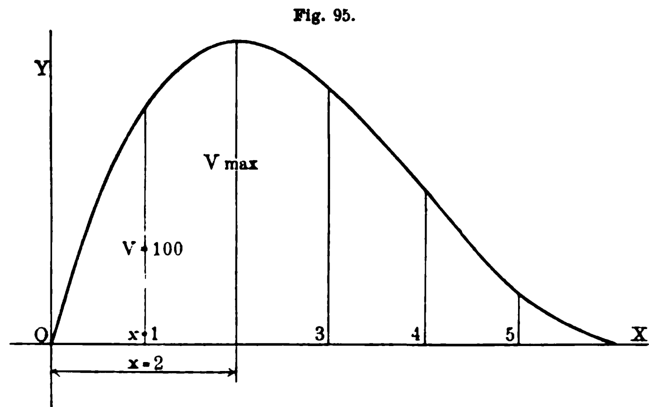
IV. Es ist ein quadratisches Stück Papier, Blech oder Holzbrettchen von 12 cm Seitenlänge gegeben, Fig. 94; man soll hieraus ein Kästchen formieren, welches möglichst viel fassen kann, dessen Volumen also ein Maximum wird.

Lassen wir den Boden des Kästchens von jeder Seite um x abstehen, so ist das Volumen desselben

$$V = (12 - 2x)^2 x = 4x(6 - x)^2.$$

In Fig. 95 haben wir die Werte von V innerhalb der Grenzen $x = 0$ und $x = 6$ aufgetragen; man findet für

Fig. 95.



$$x = 0, \; V = 0;$$
$$x = 1, \; V = 4(6 - 1)^2 = 100;$$
$$x = 2, \; V = 4 \cdot 2(6 - 2)^2 = 128;$$

*) Differentiiert man obige Gl. 18, und setzt $\frac{dJ}{dx} = 0$, so erhält man

$$\frac{(w_a x^2 + n w_i) n - n x (2 w_a x)}{(w_a x^2 + n w_i)^2} = 0, \text{ hiernach}$$

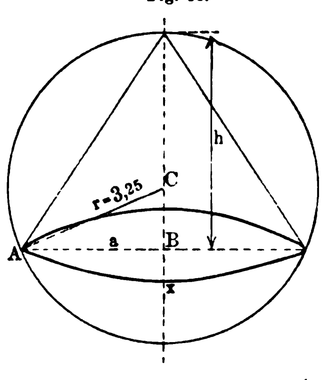
$$(w_a x^2 + n w_i) n = n x (2 w_a x) \text{ und } x = \sqrt{\frac{n w_i}{w_a}} = \sqrt{\frac{10 \cdot 0{,}2}{0{,}8}} = 1{,}58.$$

$x = 3,\ V = 108;$
$x = 4,\ V = 64;$
$x = 5,\ V = 20.$

Die Figur zeigt, dass V am grössten wird, wenn $x = 2$. Der Maximalinhalt des Kastens wird dann $V = 128$ ccm*). Würde man statt 12^{cm} eine andere oder eine beliebige Seitenlänge des Kastens gewählt haben, so würde man bald übersehen, dass das Maximum für x stets den sechsten Theil der Seitenlänge a beträgt $x_{max} = \frac{a}{6}$; dann enthält der Kasten stets den grössten Inhalt.

V. Es soll aus einer Kugel, deren Halbmesser r, Fig. 96, ein Kegel gewonnen werden, welcher den grösstmöglichen Inhalt ergiebt.

Fig. 96.



Nennt man h die Höhe, a den Halbmesser des Basiskreises, so ist der Inhalt $V = \frac{a^2 \pi h}{3}$. Bezeichnet man mit x den Abstand des Grundkreises von der Kugeloberfläche in der Kegelachse gemessen, so lassen sich a und h abhängig von r und x folgendermassen ausdrücken. Aus $h + x = 2r$ folgt $h = 2r - x$, im rechtwinkeligen Dreieck ABC ist

$$(r - x)^2 + a^2 = r^2,$$

löst man die Klammer auf, so ergiebt sich

$$a^2 = 2rx - x^2.$$

Führt man h und a^2 in obige Gleichung für V ein, dann folgt

$$V = \frac{\pi}{3}(2rx - x^2)(2r - x) = \frac{\pi}{3} x (2r - x)^2 \quad . \quad . \quad (19)$$

---

*) Differentiiert man obige Gl., für 12 allgemein a eingeführt, $V = (a - 2x)^2 x = a^2 x + 4x^3 - 4ax^2$, so folgt, den Differentialquotienten Null gesetzt, eine Gleichung II. Grades:

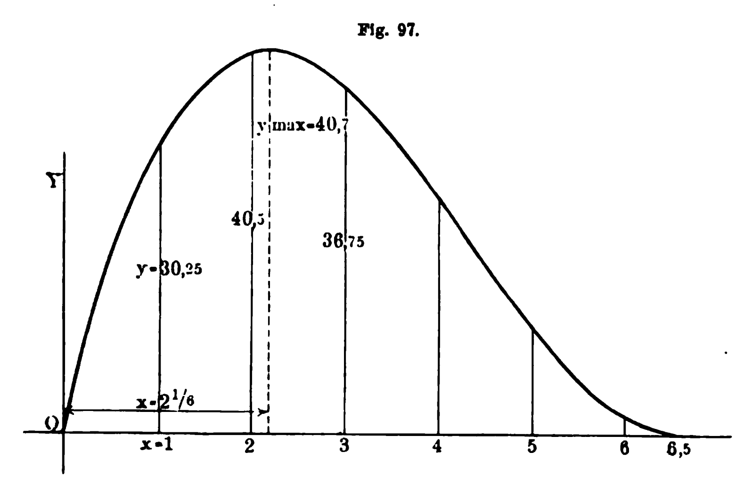
$$a^2 + 12x^2 - 8ax = 0 \text{ oder } x^2 - \tfrac{2}{3}ax = -\frac{a^2}{12}; \text{ aus dieser findet man}$$

$x = \frac{a}{3} \pm \sqrt{\frac{a^2}{9} - \frac{a^2}{12}} = \frac{a}{3} \pm \frac{a}{6}$, das ist $x_1 = \frac{a}{2}$ und $x_2 = \frac{a}{6}$. $\frac{a}{2}$ wird stets Null ergeben als Inhalt, zur Geltung kommt demnach nur der Wert $\frac{a}{6}$, wie bereits bekannt $x = \frac{12}{6} = 2$.

Der Halbmesser der Kugel sei $r = 3{,}25$, dann folgt

$$V = \frac{\pi}{3} x \left(\frac{13}{2} - x\right)^2 = \frac{\pi}{3} x (6{,}5 - x)^2.$$

Fig. 97.



In vorstehender Figur haben wir das Maximum von V wieder auf graphischem Wege bestimmt. Die Wahl von x kann auch hier nicht schwer fallen; für x können nur Werte zwischen Null und 6,5 eingesetzt werden.

Die Formel liefert für

$x = 0,\ V = 0;$	$x = 4,\ V = 25{,}00;$
$x = 1,\ V = 30{,}25;$	$x = 5,\ V = 11{,}25;$
$x = 2,\ V = 40{,}50;$	$x = 6,\ V = 1{,}50;$
$x = 3,\ V = 36{,}75;$	$x = 6{,}5,\ V = 0.$

Der Maximalwert fällt auf $x = 2\,{}^1/_6$; für die gegebene Kugel, deren Halbmesser $r = 3\,{}^1/_4{}^{m}$ und deren Inhalt

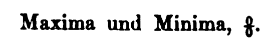
$$^4/_3\, r^3 \pi = {}^4/_3\, 3{,}14 \cdot 3{,}25^3 = 129{,}5^{cbm},$$

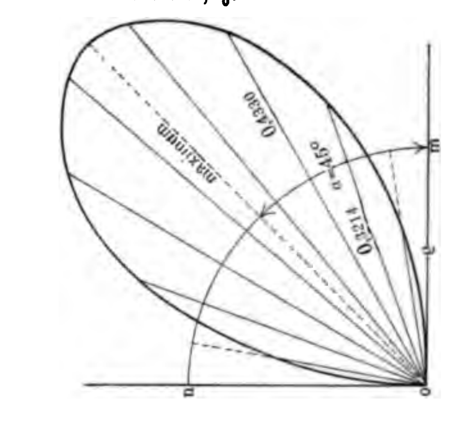
ist der grösstmöglichste Kegelinhalt

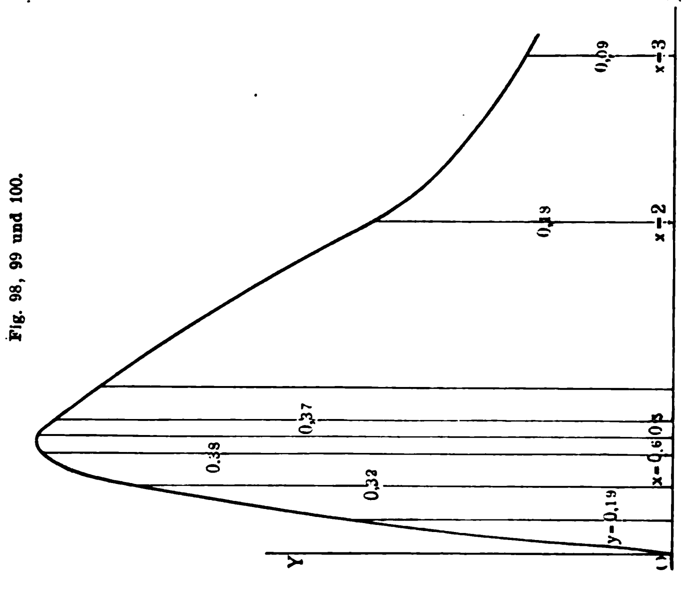
$$V = \frac{\pi}{3}\, 2{,}167\, (6{,}5 - 2{,}167)^2 = 42{,}6^{cbm}.$$

Nach den Grundsätzen der höheren Mathematik erhält man für $x = {}^2/_3\, r$*).

*) Löst man Gl. 19 auf, so folgt $V = \frac{\pi}{3}(4\, r^2 x + x^3 - 4\, r\, x^2)$ und durch Differentiation $\frac{dV}{dx} = \frac{\pi}{3}(4\, r^2 + 3\, x^2 - 8\, r\, x)$. Diesen Wert Null gesetzt und x entwickelt, findet man







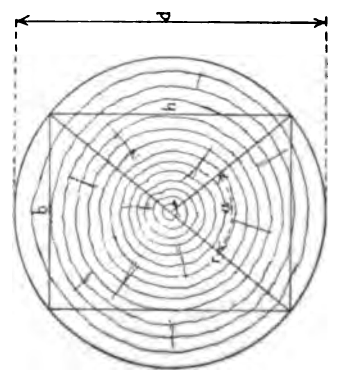


Fig. 98, 99 und 100.

VI. 1) Die vorstehende Figur stellt den kreisförmigen Querschnitt eines Baumstammes dar, welcher letzterer zu einem Bau verwendet werden soll. Es handelt sich zunächst darum, einen vierkantigen Balken zuzuhauen, der die grösste Tragfähigkeit besitzt (s. Bd. II., S. 103). Wie uns aus dem II. Band bekannt, ist die Tragfähigkeit eines Balkens abhängig von der Last und der Länge des unterstützten oder eingemauerten Balkens, das ist von dem grössten Moment, welches durchbiegend auf den Balken einwirkt; ferner wird die Tragfähigkeit grösser, wenn die einzelnen Holzfasern des Balkens fester, elastischer sind, und endlich, wenn ein Balken überhaupt grössere Dimensionen in der Breite und Höhe erhält.

Ist das Moment, welchem der Balken Widerstand leisten soll, M, und kann ein Faserelement von etwa 1^{qmm} Querschnitt mit Sicherheit k kg Zug- oder Druckkraft aushalten, ohne zu reissen, dann gilt, um die Querschnittsdimensionen b und h zu ermitteln, die Beziehung (s. Bd. II, Gl. 46)

$$M = k \, {}^1/_6 \, b h^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (20)$$

Bezeichnet man mit d den Durchmesser des Baumstammes, welchen wir als gegeben betrachten müssen, so kommt es darauf an, einesteils h und b abhängig von d auszudrücken, andernteils nach dem Verhältnis der Breite b zur Höhe h zu fragen.

Fig. 98 liefert $h^2 + b^2 = d^2$, und wenn wir $b = \frac{1}{x} h$ annehmen,

$$\left(\frac{h}{x}\right)^2 + h^2 = d^2, \text{ woraus folgt}$$

$$h^2 = \frac{d^2}{\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1} \text{ und } h = \frac{x d}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Setzt man h und b in Gl. 20 ein, dann erhält man

$$M = \frac{k}{6} \frac{1}{x} \left[\frac{x d}{\sqrt{1 + x^2}}\right]^3 = \frac{k d^3}{6} \frac{x^2}{\sqrt{[1 + x^2]^3}} \quad \ldots \quad (21)$$

Die Frage nach der grösstmöglichsten Tragfähigkeit ist nun gleichbedeutend mit der Ermittelung eines Maximalwertes von M in Gl. 21: für welchen Wert von x wird M am grössten? Wir erreichen hier das-

---

$$x = {}^4/_3 \, r \pm \sqrt{\frac{16}{9} r^2 - \frac{12}{9} r^2} = {}^4/_3 \, r \pm {}^2/_3 \, r.$$

Das untere negative Zeichen kann hier nur zur Geltung kommen; es folgt dann $x = {}^2/_3 \, r$.

selbe, da $\frac{k\,d^3}{6}$ als Faktor steht, wenn wir $\frac{k\,d^3}{6}$ für den Augenblick der Einheit gleich annehmen. Es folgt dann

$$M = \frac{x^2}{\sqrt{(1 + x^2)^3}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (21a)$$

Die Figur 99 stellt die graphische Ermittelung des Maximums dar. Setzt man der Reihe nach $x = 0$, $x = 1, 2, 3 \ldots$ ein, dann folgt

für $x = 0$, $M = 0$,

„ $x = 1$, $M = \frac{1}{\sqrt{8}} = 0{,}35$,

„ $x = 2$, $M = \frac{2}{\sqrt{(1 + 4)^3}} = 0{,}18$,

„ $x = 3$, $M = \frac{3}{\sqrt{(1 + 9)^3}} = 0{,}09$;

je grösser x, um so kleiner wird M, weil der Nenner schneller als der Zähler wächst. Das Maximum liegt sonach zwischen $x = 0$ und $x = 1$. Führt man darum für x Bruchwerte ein, so findet man

für $x = 0{,}2$, $y = \frac{0{,}2}{\sqrt{(1 + 0{,}04)^3}} = 0{,}19$,

„ $x = 0{,}4$, $y = 0{,}32$,

„ $x = 0{,}6$, $y = 0{,}38$,

„ $x = 0{,}8$, $y = 0{,}37$;

aus der Figur ist zu ersehen, dass man für $x = 0{,}7$, wenn x zwischen 0,6 und 0,8 liegt, einen grössten Wert für M erhalten muss; das ist aber für $b = 0{,}7\,h$ oder für $b = {}^5/_7\,h$ *).

2) Soll der Querschnitt b h so aus dem Rundholz gewonnen werden, dass die grösste Oberfläche entsteht, so ist diese Frage gleichlautend mit dem grösstmöglichsten Umfang des Querschnitts

$$L = 2\,h + 2\,b = 2\,(h + b).$$

Setzt man, wenn $r = \frac{d}{2}$ der Halbmesser des Balkens und α der

---

*) Setzt man den Differentialquotient von M in Bezug auf x gleich Null,

$$d\left[\frac{x^2}{\sqrt{(1 + x^2)^3}}\right] = 0, \text{ so folgt } \frac{(1 + x^2)^{3/2}\,2\,x - x^2\,{}^3/_2\,(1 + x^2)^{1/2}\,2\,x}{\left[\sqrt{(1 + x^2)^3}\right]^2} = 0,$$

woraus $(1 + x^2)^{3/2}\,2\,x = 2\,x^3\,{}^3/_2\,(1 + x^2)^{1/2}$ oder $1 + x^2 = {}^3/_2\,x^2$, bezw. $x = \sqrt{2}$ und

$$b = \frac{h}{\sqrt{2}} = \frac{h}{1{,}414} = {}^5/_7\,h.$$

Centriwinkel ist, die aus Fig. 98 sich ergebenden Werte $\frac{b}{2} = r \sin \frac{\alpha}{2}$ und $\frac{h}{2} = r \cos \frac{\alpha}{2}$ ein, so folgt $L = 4\,r\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right)$.

Da für uns wieder 4 r ein konstanter Faktor ist, welcher der Einheit gleich gesetzt werden kann, so kommt es nur darauf an, unter den möglichen Winkeln α denjenigen zu ermitteln, für welchen $\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}$ am grössten wird. Eine allgemeine graphische Lösung dieser Aufgabe ist bereits im Beispiel II, Seite 93, Fig. 92, enthalten; wir fanden $\frac{\alpha}{2} = 45°$, bezw. $\alpha = 90°$, es resultiert also ein quadratischer Querschnitt.

3) Man kann nun noch endlich bei Herstellung eines vierkantigen Balkens aus einem runden das Verlangen stellen, dass die Seiten h und b in einem solchen Verhältnis zu wählen sind, dass das grösste Eigengewicht oder dass grösste Volumen des Balkens resultiert, dann wäre ein Maximum für $F = h\,b$, ein Maximum des Querschnitts zu ermitteln. Setzt man wieder $h = 2\,r \cos\frac{\alpha}{2}$ und $b = 2\,r \sin\frac{\alpha}{2}$ in F ein, so folgt

$$F = 4\,r^2 \sin\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\alpha}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (22)$$

Für $4\,r^2 = 1$ wird F am grössten, wenn $\alpha = 90°$, also auch für einen quadratischen Querschnitt*). Die Fig. 100 liefert die graphische Lösung.

Wir haben den Viertelkreis m n, dessen Halbmesser der Einheit gleich sein kann (in der Figur ist $\rho = 0{,}25$), in 9 Teile geteilt und für $\frac{\alpha}{2} = 10°, 20°, 30° \ldots .$ $F = \sin\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\alpha}{2}$ berechnet:

Für $\frac{\alpha}{2} = 10°$ wird $F = 0{,}174 \cdot 0{,}985 = 0{,}1710$,

„ $\frac{\alpha}{2} = 20°$ „ $F = 0{,}342 \cdot 0{,}940 = 0{,}3214$,

„ $\frac{\alpha}{2} = 30°$ „ $F = 0{,}5 \cdot 0{,}866 = 0{,}4330$,

---

*) Setzt man in Gl. 22 $\frac{dF}{d\alpha} = 0$, so folgt aus $\sin^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2} = 0$, $\sin\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{\alpha}{2}$, welche Gleichung nur für $\frac{\alpha}{2} = 45°$ zur Lösung gelangt.

$$\text{Für } \frac{\alpha}{2} = 40^\circ \text{ wird } F = 0{,}643 \cdot 0{,}766 = 0{,}4924,$$

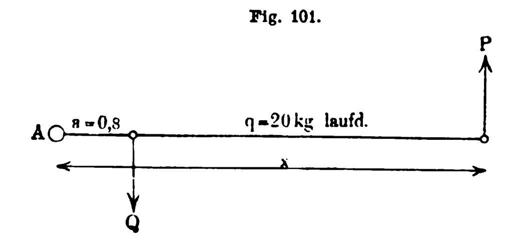
$$\text{,, } \frac{\alpha}{2} = 50^\circ \text{ ,, } F = 0{,}766 \cdot 0{,}643 = 0{,}4924,$$

$$\text{,, } \frac{\alpha}{2} = 60^\circ \text{ ,, } F = 0{,}866 \cdot 0{,}5 \ = 0{,}4330 \text{ u. s. w.}$$

Der Ausdruck wird am grössten für $\frac{\alpha}{2} = 45^\circ$, dann erlangt der Querschnitt seinen Maximalwert.

VII. An einem Hebel, dessen Eigengewicht $q = 20$ kg pro lfd. Meter, wirkt eine Kraft P, welche das an dem Hebelarm $a = 0{,}8^m$ wirkende Gewicht $Q = 250$ kg um den Drehpunkt A zu heben strebt. Es fragt sich: für welche Hebellänge x wird P am kleinsten?

Fig. 101.

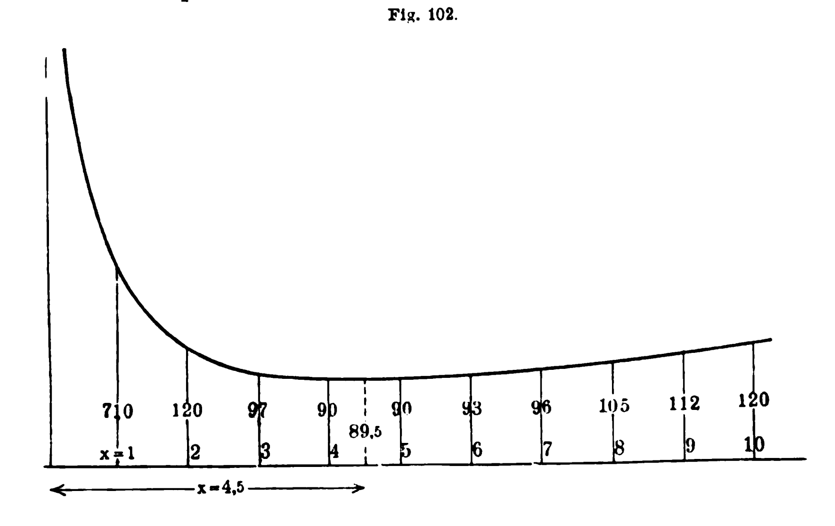


Lassen wir das Eigengewicht unberücksichtigt, dann ist nach dem Hebelgesetz

$$P\,x = Q\,a, \text{ woraus } x = \frac{Q\,a}{P} \text{ bezw. } P = \frac{Q\,a}{x}.$$

Hier wird offenbar P am kleinsten, wenn x unendlich gross wird. Mit Rücksicht auf das Eigengewicht gilt aber die Momentengleichung um A als Drehpunkt

Fig. 102.



$$Px = Qa + qx\frac{x}{2} = Qa + q\frac{x^2}{2},$$

aus dieser folgt jetzt

$$P = \frac{Qa}{x} + \frac{qx}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

oder die Zahlenwerte eingesetzt,

$$P = \frac{250 \cdot 0{,}8}{x} + \frac{20 \cdot x}{2} = \frac{200}{x} + 10\,x.$$

Um diesmal das Minimum zu ermitteln, haben wir in Fig. 102 die aus der letzten Gl. sich ergebenden Kurven aufgetragen.

Man setzt für $x = 0$ und findet $P = \infty$,
$x = 1$ „ $P = 200 + 10 = 210$,
$x = 2$ „ $P = \frac{200}{2} + 10 \cdot 2 = 120$,
$x = 3$ „ $P = 97$,
$x = 4$ „ $P = 90$,
$x = 5$ „ $P = 90$,
$x = 6$ „ $P = 93$,
$x = 7$ „ $P = 96$,
$x = 8$ „ $P = 105$ u. s. w.,

für alle weiteren Werte von x wächst P wieder bis ins Unendliche. Der kleinste Wert von P fällt zwischen $x = 4$ und $x = 5$ nach $x = 4{,}5$. Diese Minimalkraft, welche hier nur möglich ist, ergiebt sich aus

$$P = \frac{200}{4{,}5} + 10 \cdot 4{,}5 = 89{,}5 \text{ kg*)}.$$

VIII. Man soll zwischen den Wänden W und W_1, Fig. 103, von denen dieletztere eine Thür von bestimmter Höhe h besitzt, einen Balken von der Länge l einschieben und aufrecht zu stellen suchen, der Abstand der Wände ist a^m. Man wird zunächst versuchen, den Balken durch die Thür in den Gang einzuschieben und ihn dann aufrichten, er mag hierbei eine beliebige Höhenlage annehmen, die aus der Figur ersicht-

---

*) Die Differentiation der Gl. a liefert $\frac{dP}{dx} = -\frac{Qa}{x^2} + \frac{q}{2}$, woraus $\frac{q}{2} = \frac{Qa}{x^2}$ und hieraus $x = \sqrt{\frac{2\,Qa}{q}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 250 \cdot 0{,}8}{20}} = \sqrt{20} = 4{,}47^m$; der zweite Differentialquotient wird wieder positiv, $\frac{d^2P}{dx^2} = +\frac{2\,Qa}{x^3}$.

lich ist. Aus der Figur entnehmen wir ferner $mn = l_1$, $pm = y$ und $pn = x$ als Koordinaten der beliebigen Lage.

Fig. 103.

Der grösste Wert, welchen y erreichen kann, ist h. Nun verhält sich $l_1 : l = x : x + a$, woraus

$$l_1 = \frac{l\,x}{x + a}; \text{ ferner ist } y^2 = l_1^{\,2} - x^2.$$

Setzt man l_1 ein, dann ergiebt sich

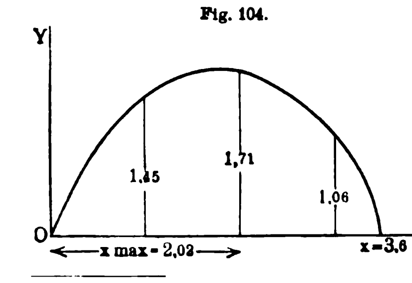
$$y = \sqrt{l_1^{\,2} - x^2} = \sqrt{\frac{l^2 x^2}{(a + x)^2} - x^2} = \frac{x}{a + x}\sqrt{l^2 - (a + x)^2}.$$

Gegeben ist $a = 2{,}4^m$ und $l = 6^m$, somit folgt

$$y = \frac{x}{2{,}4 + x}\sqrt{36 - (2{,}4 + x)^2}.$$

Der grösste Wert von y kann nur zwischen $x = 0$ und $x = 3{,}6$ liegen, denn für $x = 3{,}6$ wird y schon Null, und für $x > 3{,}6$ wird der Wurzelwert imaginär.

Fig. 104.



Man findet (Fig. 104) für $x = 0$, $y = 0$; für $x = 1$, $y = 1{,}45$; für $x = 2$, $y = 1{,}71$; für $x = 3$, $y = 1{,}06$ und für $x = 3{,}6$, $y = 0$. Das Maximum fällt nahe bei $x = 2$ (genau nach $x = 2{,}02$) *); damit der Balken von 6^m Länge in den $2{,}4^m$ breiten Gang zur

*) Mit Zuhilfenahme der höheren Analysis findet man

$$x = -a + \sqrt[3]{a\,l^2} = -2{,}4 + \sqrt[3]{86{,}4} = 2{,}02; \text{ es muss also}$$

$$h \gtreqless \sqrt{\left[\sqrt[3]{l^2} - \sqrt[3]{a^2}\right]^3} \text{ sein.}$$

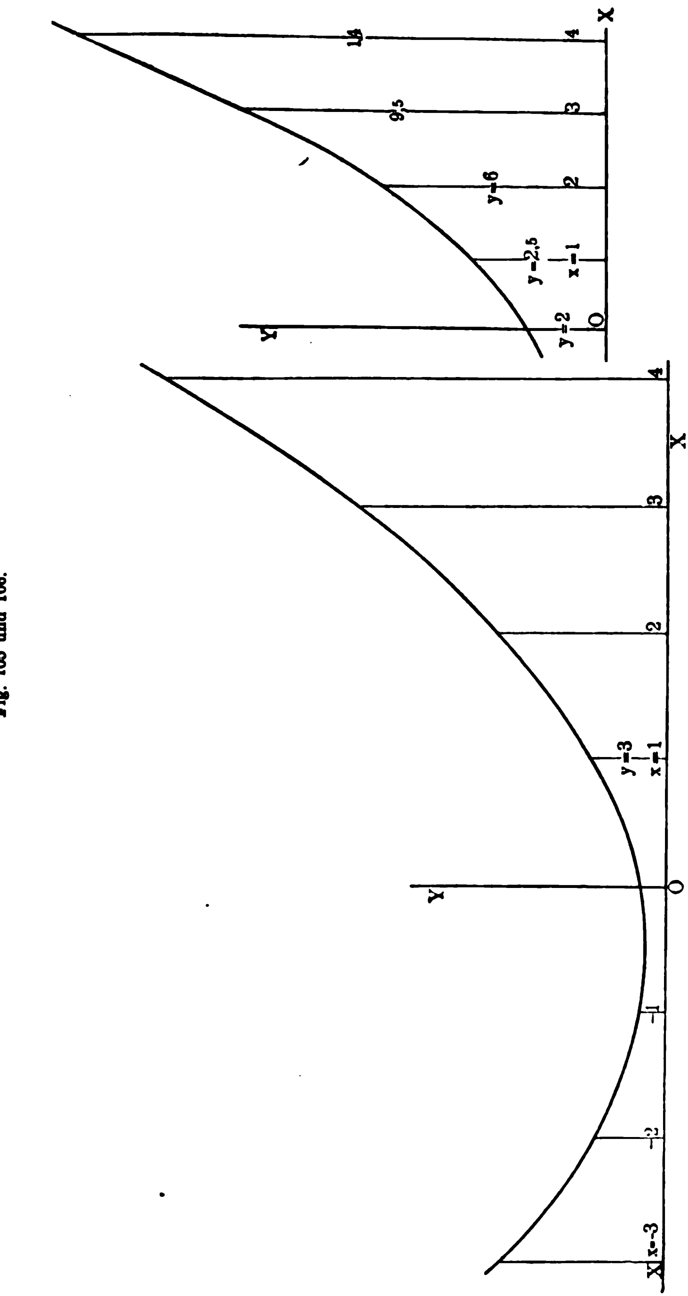


Fig. 105 und 106.

Verwendung gelangen kann, muss die Thürhöhe

$$h = y = \frac{2}{2,4 + 2} \sqrt{36 - (2,4 + 2)^2} = 1,86^m \text{ hoch sein.}$$

IX. Es seien die Gleichungen gegeben

$$y = \frac{1 - x^3}{1 - x},\ y = \frac{x^3 - 1}{x - 1};$$

man will aus denselben berechnen, wie gross y wird für $x = 1$; setzt man $x = 1$ ein, so findet man in beiden Gleichungen $y = \frac{0}{0}$. Es entsteht nun die Frage, was dieser Ausdruck für eine Bedeutung, für einen wirklichen Wert hat? Man könnte im ersten Augenblick, weil Zähler und Nenner gleich gross, den wahren Wert zu 1 annehmen, oder weil der Zähler Null, $y = 0$ für $x = 1$ setzen wollen, eventuell für denselben Wert von x, da der Nenner Null, y unendlich gross annehmen wollen; jedenfalls ist $\frac{0}{0}$ ein unbestimmter Ausdruck, welchen wir, um seine wahre Bedeutung zu erforschen, graphisch ermitteln wollen.

Wir verwenden hierzu die vorstehende Figur 105, welche wir nach berechneten Werten aus der Gleichung $y = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ aufgetragen haben.

Die berechneten Werte sind für

$$x = -3,\ y = \frac{-28}{-4} = +7,$$

$$x = -2,\ y = \frac{-9}{-3} = +3,$$

$$x = -1,\ y = \frac{-2}{-2} = +1,$$

$$x = 0,\ y = \frac{-1}{-1} = +1,$$

$$x = +1,\ y = \frac{0}{0},$$

$$x = +2,\ y = \frac{8 - 1}{2 - 1} = +7,$$

$$x = +3,\ y = \frac{27 - 1}{3 - 1} = +13 \text{ u. s. w.}$$

Lässt man x nach der positiven und negativen Richtung weiter wachsen als $x = \pm 3$, so wird y jedesmal ∞.

Aus der aufgetragenen Kurve ersieht man nun leicht, dass der wahre Wert von y, wenn $x = +1$, thatsächlich $y = +3$ sein muss; die

Gleichung $y = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$, nach den Grundsätzen der höheren Mathematik behandelt, führt übrigens durch Rechnung zu demselben Resultat*).

Die graphische Darstellung lässt uns auch hier in den meisten einfachen Fällen die wahren Werte dieser sogenannten unbestimmten Formen erkennen, deren es übrigens ausser $\frac{0}{0}$ noch andere, $\frac{\infty}{\infty}$, 0^0, ∞^0 u. s. w. giebt.

X. Setzt man in die Gleichung $y = \frac{x^3 - 8}{2(x - 2)}$, $x = 2$, dann erhält man wieder die unbestimmte Form $y = \frac{0}{0}$; denn es wird $y = \frac{8 - 8}{2(2 - 2)} = \frac{0}{0}$.

Der wahre Wert für $x = 2$ ist $y = 6$. Denn konstruiert man die der gegebenen Gleichung entsprechende Kurve, Fig. 106, so schneidet diese auf der, der Abscisse $x = 2$ zugehörigen Ordinate, $y = 6$ ab, es kann also für den wahren Wert von $\frac{0}{0}$ in diesem Fall auch kein Zweifel entstehen.

---

*) Differentiiert man Zähler und Nenner der Gleichung

$$y = \frac{\pm 1 \mp x^n}{\pm 1 \mp x}, \text{ so folgt } \frac{\mp n x^{n-1}}{1} = \mp n x^{n-1};$$

setzt man $x = 1$, dann erhält man allgemein $y = n$. In obigem Beispiel ist $n = 3$, somit wird für $x = 1$, $y = 3$.

II. Die graphische Statik oder Graphostatik.

Wir deuteten in der Einleitung bereits an, dass die graphische Statik auf rein geometrischem Wege die Bedingungen entwickelt, unter welchen sich ein System von Kräften das Gleichgewicht hält. Die graphische Statik setzt also auch, wie das graphische Rechnen, die Kenntnis der Geometrie voraus und schliesst sich in gewissen Beziehungen an die graphische Mathematik an. Die letztere vermittelt uns durch die Schlusslinie einen Zahlenwert, das Resultat der Rechnung, in Gestalt einer Länge, welche wir durch den zu Grunde liegenden Massstab in eine Zahl umsetzen.

Die Ausgangselemente in der Graphostatik sind eine oder mehrere Kräfte, welche in einer Ebene wirken, oder, wenn mehrere Kräfte im Raume gegeben sind, wenn sie also nach verschiedenen Richtungen im Raume wirken, so fassen wir diejenigen zusammen, welche sich in derselben Ebene vereinigen lassen. Die Resultate sind auch hier wieder Linien, bestimmte Längen, welche Kräfte darstellen; oder, sofern wir die gegebenen Kräfte mit gegebenen Hebelarmen kombiniert, graphostatisch zusammengesetzt haben, so resultieren jetzt Linien, welche Momente darstellen, die ihrerseits wieder mit Hilfe der gewählten Massstäbe in Zahlen umgesetzt werden müssen.

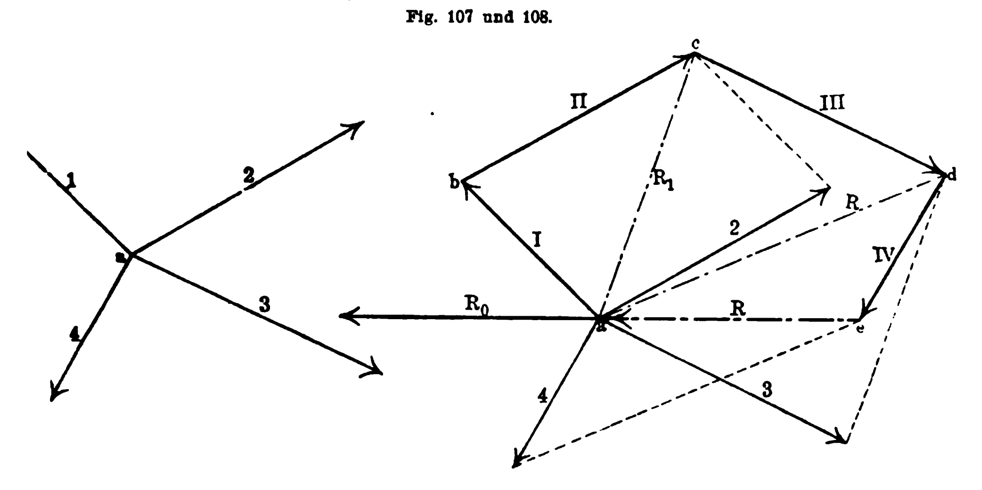
A. Das Kräftepolygon.

Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte in der Ebene.

Wirken von einem Punkt a aus, Fig. 107, mehrere Kräfte nach verschiedenen Richtungen hin, so lehrt uns das Parallelogramm der Kräfte diese gegebenen Teilkräfte (Komponenten) nacheinander zu einer Resultierenden zu vereinigen. Die Teilkräfte haben wir der Einfachheit wegen mit Zahlen 1, 2, 3 und 4, statt mit P_1 P_2 P_3 P_4 bezeichnet, und es ist die gezeichnete Lage diejenige, welche die Kräfte in der Ebene

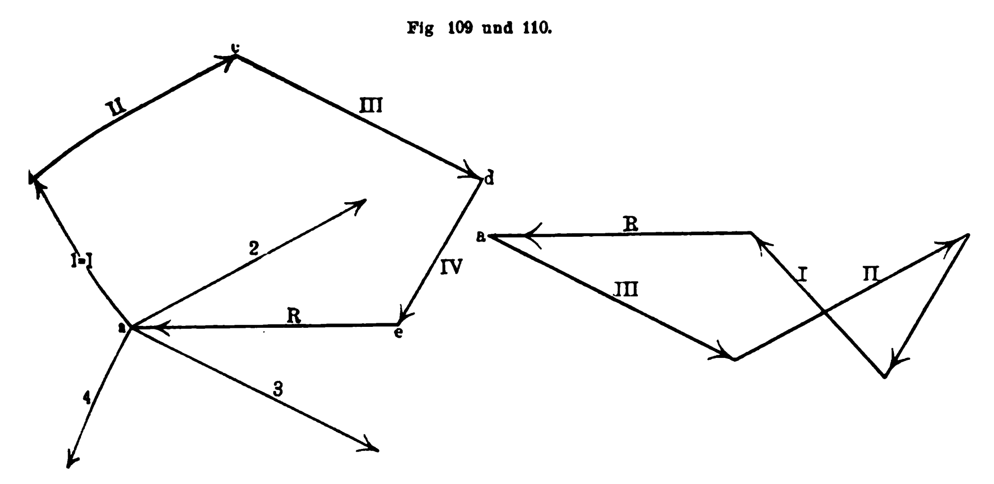
haben sollen; ferner sind auch die Längen der Kräfte genau mit den gegebenen übereinstimmend, oder richtiger gesagt, nach einem bestimmten Massstabe aufgetragen. Was den letztern anlangt, so thut ein Meter-

Fig. 107 und 108.



mass dieselben Dienste, man greift mit einem Zirkel die einzelnen Kräfte nacheinander ab, und bedeutet dann 1^{mm} 10, 100, 1000 oder 10 000 kg; die Resultierende ist natürlich demselben Massstab unterworfen.

Fig 109 und 110.



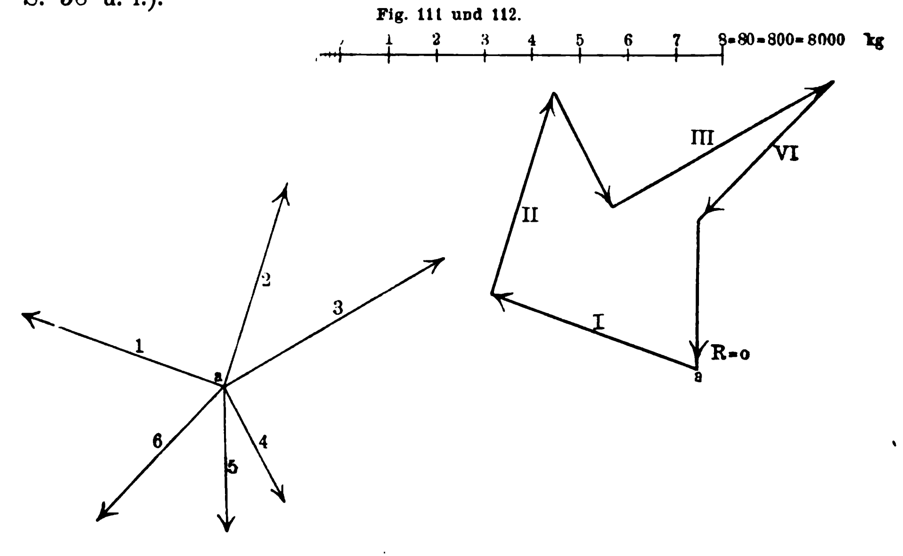
Wir setzen nun zunächst die erste mit der zweiten Kraft zusammen, Fig. 108, und erhalten das Resultat R_1, die beiden Kräfte 1 und 2 können dann entbehrt werden, weil sie eben durch R_1 ersetzt werden können. R_1 kombiniert man dann mit 3 und findet R_2 als Resultat, man

kann also wieder R_1 und 3 als wirkungslos betrachten. Es bleiben nun noch die Kräfte R_2 und 4 übrig, welche den Punkt a zwingen, sich nach der Kraft R, der Resultierenden aus beiden, zu bewegen, die Grösse dieser ergiebt sich aus dem Massstab. Hätten wir als 5. Kraft R_0 mitwirken lassen, und zwar nach entgegengesetzter Richtung von R, aber mit der gleichen Stärke, also in der Zeichnung gerade so gross wie R, dann würde der Punkt a sich offenbar von vornherein im Gleichgewicht befunden haben, denn die Wirkung der Kraft R wäre aufgehoben, durch R_0 vernichtet worden.

Man kann sich nun die konstruktive Arbeit der Fig. 108 bedeutend erleichtern, wie in Fig. 109 geschehen, wenn man bedenkt, dass es zur Konstruktion der einzelnen Parallelogramme schon genügt, an 1 eine Linie parallel und gleich lang mit 2 anzuschliessen, es ist dann 1 # $\overline{ab}$, $\overline{bc}$ oder II # der Kraft 2; schliesst man an c noch III gleich und parallel 3, und an d die Kraft IV gleich und parallel 4 an, so gelangt man auch zu dem Punkte e, also zur Resultanten ae = R.

Durch die aufeinanderfolgende Konstruktion der einzelnen Parallelogramme werden die Teilkräfte schliesslich sämtlich vernichtet; die Reihenfolge, wie dies geschieht, bleibt sich gleich; thatsächlich bleibt es sich auch gleich, wie die einzelnen Kräfte der Reihenfolge nach zu den Parallelogrammen vereinigt werden. In Fig. 110 gelangen wir zu demselben Resultat, wir haben jedoch hier mit 3 # III, hieran anschliessend 2 # II, IV # 4 und 1 gleich und parallel I, begonnen (s. Bd I, S. 58 u. f.).

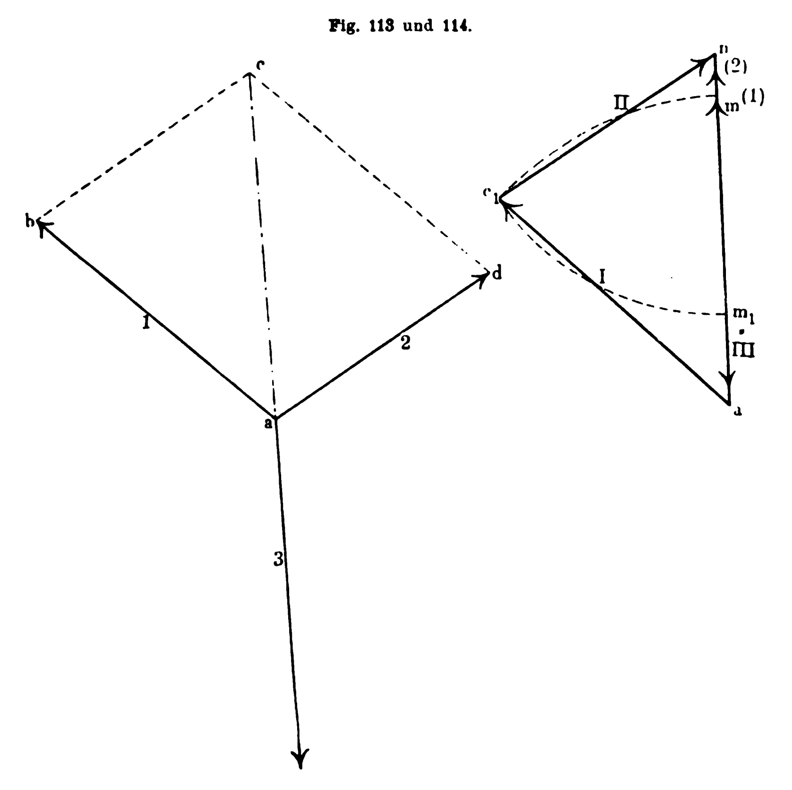
Fig. 111 und 112.



Befindet sich gleich vom Anfang an das ganze Kräftesystem um einen Punkt herum im Gleichgewicht, so gelangt man mit der letzten Parallelen wieder in den Anfangspunkt zurück, die Resultante wird Null, es kann keine vorhanden sein, weil Gleichgewicht herrschte; die Figuren 111 und 112 liefern ein solches Beispiel. (Die Zahlen IV und V sind in Fig. 112 zu ergänzen.)

In allen Fällen gelangt man auf die einfachste Weise durch ein Vieleck zum Resultat. Man nennt darum die obige Hilfsfigur Kräftevieleck oder Kräftepolygon; stellt sich dasselbe als eine geschlossene Figur dar, dann ist Gleichgewicht vorhanden, im andern Fall bildet die jedesmalige Schlusslinie die Resultante. Die Richtung der einzelnen Polygonkräfte muss stets durch Pfeile im Sinne der gegebenen Kräfte markiert werden.

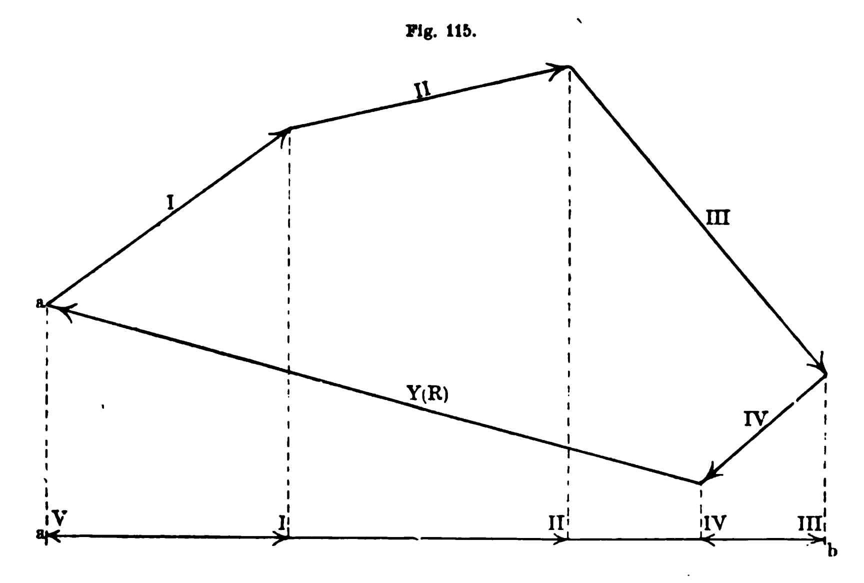
Fig. 113 und 114.



Das einfachste Kräftepolygon ist das Kräftedreieck, Fig. 113 und 114, sofern der Punkt a durch 3 Kräfte im Gleichgewicht erhalten wird; es schliesst sich dann das Polygon zu einem Dreieck. Auf a, Fig. 113, wirken

gleichzeitig die Kräfte 1, 2, 3. Zieht man I parallel 1, II || 2, III || 3 und macht 1 = I, II = 2, III = 3, so läuft das Kräftedreieck in sich zurück, es bildet eine geschlossene Figur, die Pfeile deuten die Richtung der Kräfte in Fig. 113 an. Die Kräfte 1 und 2 würden sich, wenn 3 nicht vorhanden, zu einer Resultierenden ac vereinigen, ihr entgegen wirkt die Kraft 3; das Kräftedreieck in Fig. 114 deckt sich vollständig mit dem halben Parallelogramm in Fig. 113. Die Richtungen der Kräfte in 1 und 2 sind entgegen der in 3, vereinigt man in Fig. 114 alle 3 Richtungen dadurch, dass man die Kräfte I und II durch Kreisbögen nach m und m_1 überträgt oder auf eine Linie projiziert, so lässt sich der Verlauf der Richtungen leichter übersehen.

Fig. 115.



In vorstehender Figur haben wir ein entwickeltes Kräftepolygon auf die Linie ab projiziert, um die Richtungen der Kräfte leichter übersehbar festzustellen; diese Feststellung ist namentlich in den Anwendungen da von Wert, wenn es sich darum handelt, innere Zug- und Druckkräfte zu bestimmen.

Ein praktisches Erkennungszeichen solcher innern Kräfte liefert uns die Fig. 116. Die Stange ab ist bei a mit Q, sagen wir 6000 kg belastet, und bei b drehbar befestigt, durch die Kette oder das Seil ac ist sie festgehalten. Die Belastung Q bewirkt offenbar in ab eine Druckkraft, in ac eine Zugkraft. Jeder Stab, welcher einer Druckkraft ausgesetzt ist, muss steif sein und so stark, dass er

nicht geknickt werden kann; es wird uns gewiss nicht einfallen, den Stab ab durch eine Kette zu ersetzen. Jeder Zugstab kann aber stets durch eine Kette oder durch ein Seil ersetzt werden. Die

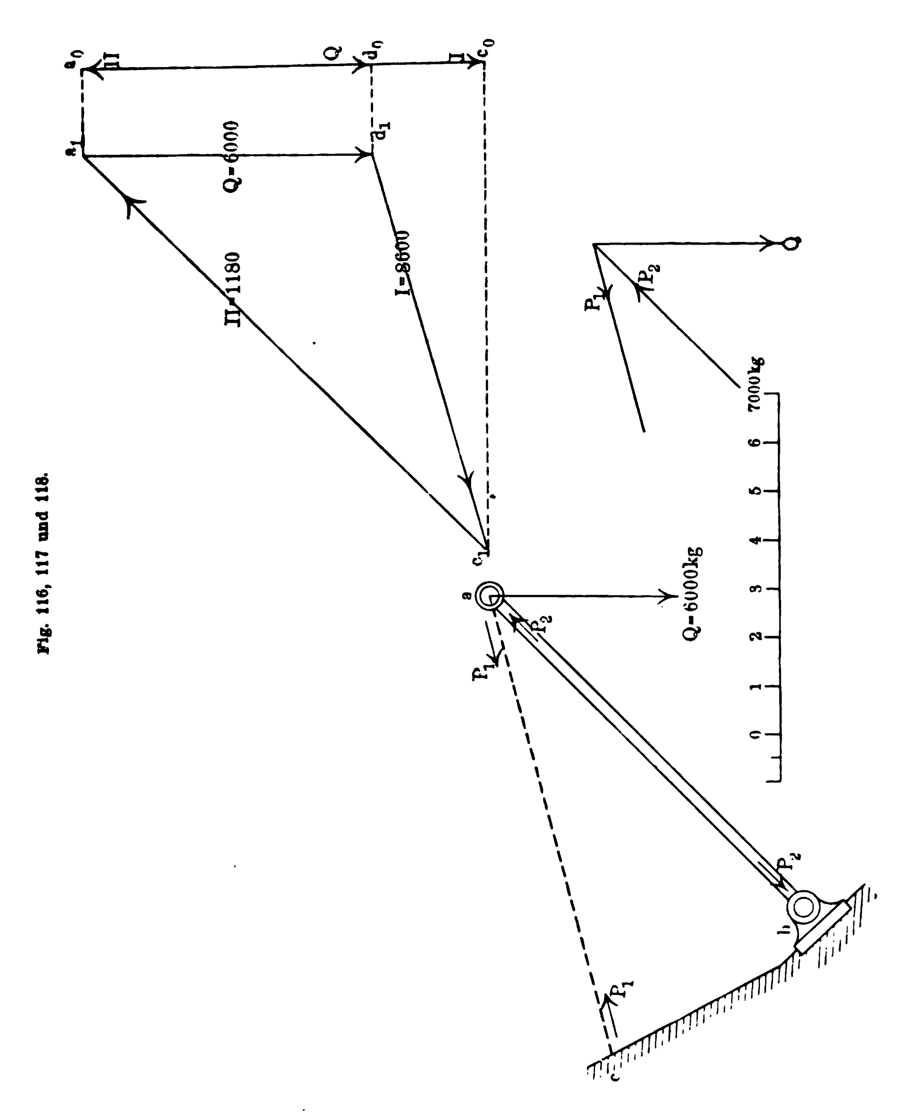


Fig. 116, 117 und 118.

innere Kraft in ab verursacht einen Druck auf die Unterlage bei b, hingegen werden bei c die Befestigungsteile der Kette, des Seiles oder des Zugstabes nach auswärts, hier nach rechts, gezogen.

In Fig. 117 haben wir die Lage der in Frage stehenden 3 Kräfte angedeutet. Q wirkt als Zugkraft senkrecht nach unten, die Kräfte P_1 und P_2 seien uns noch unbekannt.

Wir ziehen in Fig. 117 $Q = a_1 d_1$ parallel der in Fig. 116 gegebenen Belastung Q, und machen diese senkrechte Linie, weil Q = 6000 kg, 6^{cm} lang, 1^{mm} entspricht sonach 100 kg. Hierauf ziehen wir $a_1 c_1$ und $d_1 c_1$ parallel den Richtungen $P_2 P_1$, bezw. den ursprünglich gegebenen Richtungen a c und a b in Fig. 116. Die Längen $a_1 c_1$ und $c_1 d_1$ in Fig. 117 ergeben sich erst durch das geschlossene Kräftedreieck $a_1 c_1 d_1$, in welchem der Punkt c_1 durch die Länge $a_1 d_1 = 6^{cm}$, entsprechend der Kraft Q = 6000 kg, bestimmt wird. Misst man die Längen nach dem der Figur beigefügten Kräftemassstab ab, so ergiebt sich die Kraft in II zu 1180 kg ($11{,}8^{cm}$ Länge), und P_1 mit $8{,}6^{cm}$ Länge zu 8600 kg. Projiziert man die Kräfte in Fig. 117 auf eine Linie $a_0 c_0$, so wirken Q und I der Kraft II entgegen, wie man aus den eingezeichneten Pfeilrichtungen sofort erkennen kann.

Wir nannten nun oben die Kräfte P_1 und P_2 in ac und ab innere, weil sie vermöge des starren Materials der Streben imstande sind, den von Q empfangenen Zug oder Druck nach aussen zu übertragen. Die äusseren Kräfte, zu denen natürlich die gegebene Belastung in erster Reihe mit gehört, sind die in c und b wirkenden Wandkräfte, welche hier den innern Kräften gleichwertig sind, d. h. die gleiche Richtung und die gleiche Grösse haben wie diese. Um den Gleichgewichtszustand der inneren Kräfte zu erkennen, müssen die äusseren auch im Gleichgewicht sein. Die äussere Kraft P_1 in ac versucht den Stab oder die Kette in c von ihrer Befestigung loszureissen, sie wirkt nach rechts; in Bezug auf den Knotenpunkt a ist es also erforderlich, eine Kraft P_1 anzubringen, welche sich vom Knotenpunkt a entfernt, an diesem zieht. P_1 ist hiernach eine Zugkraft, während die Kraft P_2 als äussere Kraft auf b drückt; in Bezug auf den Knotenpunkt a wirkt P_2 als Druckkraft, ihre Richtung zeigt auf den Knotenpunkt a. Diese Kräfterichtungen im Knotenpunkt a sind die gleichen wie die im Kräftepolygon, wie sie sich aus dem Gleichgewichtszustand durch das geschlossene Polygon ergeben.

Konstruieren wir für einen Knotenpunkt das Kräftepolygon und zeichnen in das geschlossene Polygon die Pfeilrichtungen der Reihe nach ein, so erhalten wir die Druck- und Zugkräfte der betreffenden Stäbe, bezw. Streben, wenn wir die Polygonpfeilrichtungen um den betr. Knotenpunkt herum

in die Streben selbst übertragen; alle Pfeilrichtungen, welche sich vom Knotenpunkt abwenden, deuten Zug-, diejenigen, welche sich zuwenden, Druckkräfte an. Die Dimensionen der Streben berechnen wir dann aus den im Band II entwickelten Gesetzen.

Fig. 119 und 120.

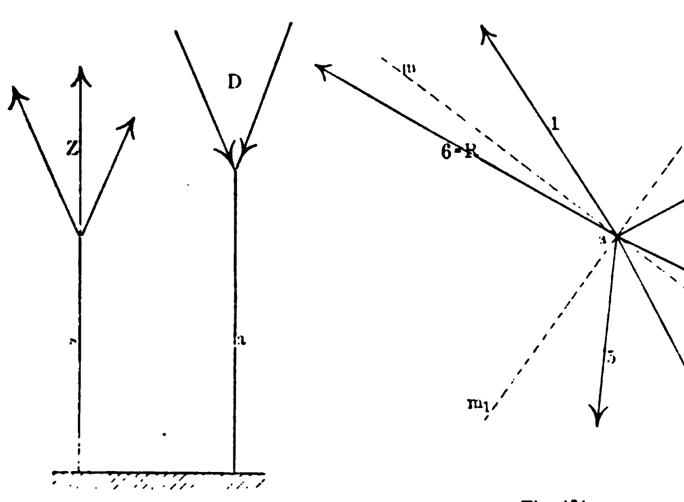
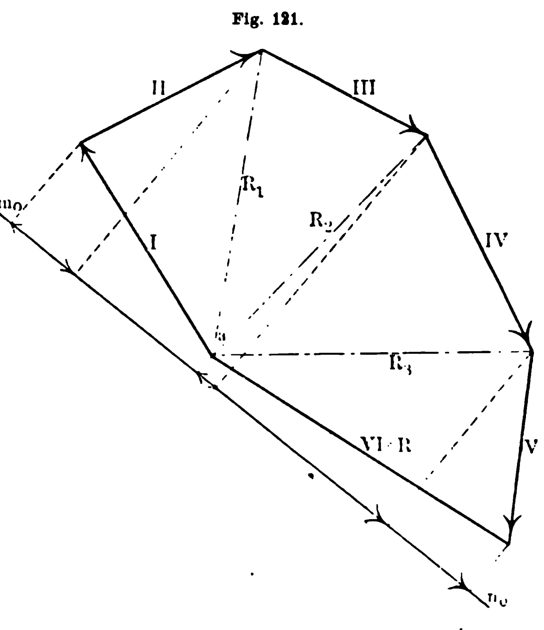


Fig. 121.



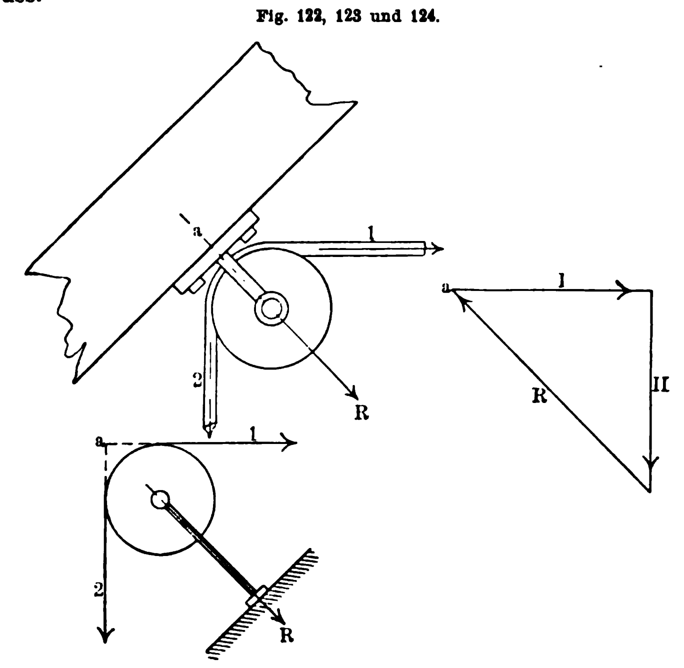
Die Kräfte Z, Fig. 119, bewirken eine Zugthätigkeit in dem Stab s, während die Kräfte D den Stab a auf Druck, event. Knickung beanspruchen.

Ist keine bestimmte Ausgangskraftrichtung vorhanden, wie im beistehenden Kräftesystem, Fig. 120, um den Punkt a herum, dann kann auch von einer bestimmten Zug- und Druckkraft keine Rede sein. Es können hier alle Kräfte als Zugkräfte an a auf-

gefasst werden, obgleich, je nach Annahme der Grenze mn oder $m_1 n_1$ gewisse Gruppen sich entgegen wirken. Nimmt man in $m_1 n_1$ die Grenze an, dann wirken die Kräfte 1 und 6 den Kräften 2, 3, 4 und 5 entgegen; hingegen die sämtlichen Kräfte auf $m_0 n_0$, Fig. 121 projiziert, bezw. mn als Grenze angesehen, so wirken sich 1, 2 und 3 und 4, 5 und 6 entgegen. Dass im ganzen System Gleichgewicht herrscht, ist aus Fig. 121 zu ersehen. Die Kraft 6 könnte ebensowohl als Resultierende des ganzen Systems angesehen werden.

Zieht man im Kräftepolygon, Fig. 121, die Linien R_1, R_2, R_3 von a aus, so stellen diese die Resultierenden der einzelnen Parallelogramme dar, eine Vergleichung mit Fig. 108 lässt dies sofort erkennen. R_1 ersetzt die gegebenen Kräfte 1 und 2 in Fig. 120, würde man R_3 von a aus als Kraft in Fig, 120 wirken lassen, so könnte man die Kräfte 1, 2, 3, 4, deren Resultierende R_4 ist, hinweglassen; ebenso ersetzt R_2 die 3 ersten Kräfte 1, 2, 3 in Fig. 120. R in Fig. 121 ersetzt die sämtlichen 5 ersten Kräfte, da sie als Resultierende der Kraft 6 gleich sein muss.

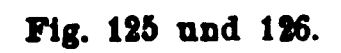
Fig. 122, 123 und 124.

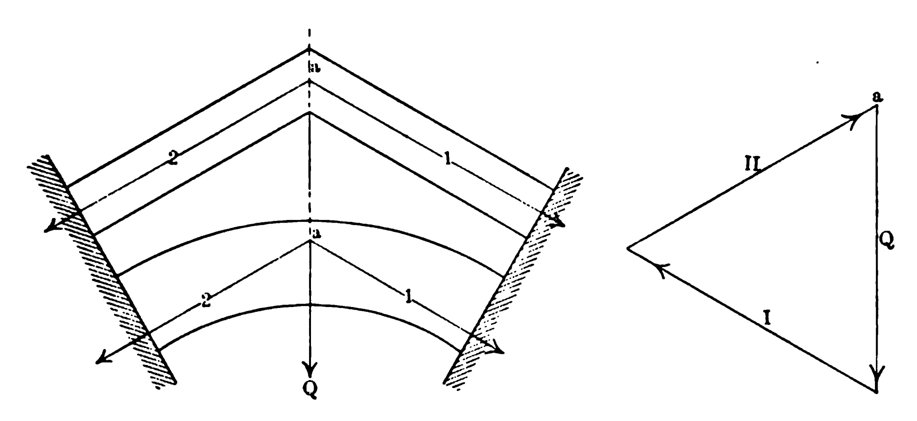


Beispiele. I. Um eine Rolle, Fig. 122, ist ein Seil oder eine Kette geschlungen, die beiden gleichen Kräfte, welche das Seil beanspruchen,

sind $P_1 = P_2 = 1 = 2 = 300$ kg; wie gross ist der Achsendruck R_1, bezw. die Zugkraft an der Befestigungsstelle?

Wir ziehen, Fig. 123, I parallel 1 und II parallel 2 und machen deren Länge 3^{cm}, sodass also $1^{mm} = 10$ kg bedeutet. Das Kräftedreieck schliesst sich, indem man in Fig. 123 R zurück nach a zieht, und R abmisst, es ergiebt sich $4{,}25^{cm}$; in der Richtung der Schlusslinie R liegt in Fig. 124 die Befestigung. Der Achsendruck ist sonach 425 kg.


Fig. 125 und 126.



II. Es sollen in der vorstehenden Eck- oder Bogenverbindung die senkrecht auf den Kräften 1 und 2 wirkenden äusseren Gegendrücke bestimmt werden, wenn in a eine Kraft $Q = 6000$ kg wirkt.

Wir ziehen, Fig. 126, Q parallel dem gegebenen Q und machen diese Linie 60^{mm} lang ($1^{mm} = 100$ kg), dann schliessen wir an Q die Linien I und II parallel 1 und 2, bis sich das Kräftedreieck schliesst. Die Längen der Linien I und II geben, in demselben Massstab wie Q gemessen, die Kräfte 1 und 2, somit auch ihre gleichgrossen Gegenkräfte. Aus dem Kräftedreieck Fig. 126 ersieht man, dass, je grösser der Winkel wird, unter dem die Kräfte 1 und 2 zusammenwirken, also je flacher beispielsweise ein Gewölbe, um so grösser werden die Seitenkräfte (s. Bd. I, S. 199), umgekehrt, je kleiner dieser Winkel, um so mehr nähern sich I und II dem Wert $\frac{Q}{2}$.

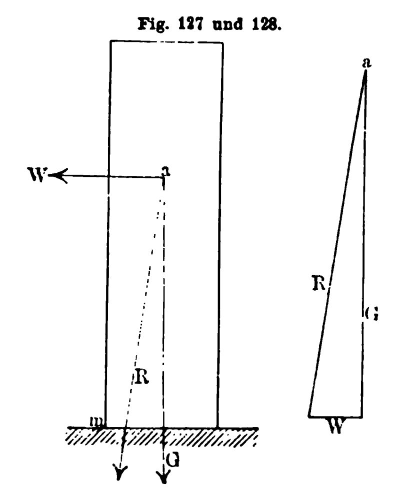


Fig. 127 und 128.

III. Auf einen Punkt a eines freistehenden Körpers, Fig. 127, dessen Gewicht G, wirkt eine Kraft W ein; man soll die Stablität des Körpers (s. Bd. I, S. 175) in Bezug auf die Umsturzkante m untersuchen.

Nach uns bekannten Grundsätzen tritt ein Umsturz des Körpers ein, wenn die Resultante aus W und G ausserhalb der Basis, links von m fällt. Tragen wir von a aus, Fig. 128, G und W an und schliessen das Kräftedreieck, so giebt uns R die Lage und Grösse der Resultierenden, welche wir nur parallel in

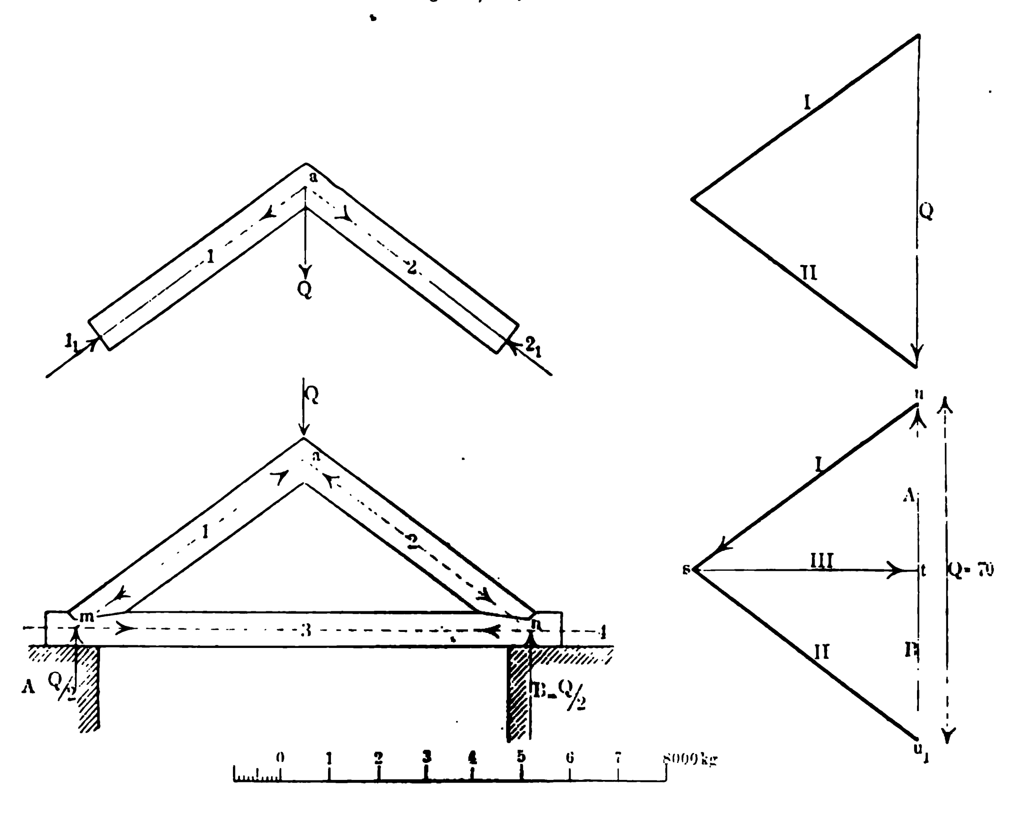


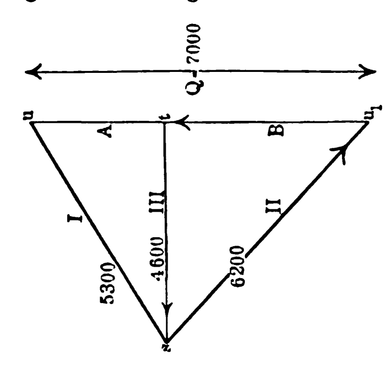
Fig. 129, 130, 131 und 132.

die Fig. 127 zu übertragen brauchen, um uns darnach zu überzeugen, ob event. ein Umsturz eintreten könnte, es müsste die Basis von m aus nach links erbreitert werden; oder wie weit R von m nach rechts fällt, dann ist allerdings der Körper standsicher. Wir werden noch weiter unten erkennen, dass uns der Abstand R von m innerhalb der Basis massgebend für die Materialspannung sein wird.

IV. Im Punkt a der Fig. 129—132 wirkt die Kraft Q = 7000 kg, sie zerlegt sich, wie uns das Kräftedreieck Fig. 130 zeigt, in die beiden Kräfte I und II, welche beide Q entgegen wirken müssen. Als innere Kräfte treten sie als Druckkräfte auf, welche die Streben zu biegen, zu zerknicken suchen; als Aussenkräfte 1_1 und 2_1 bilden sie die Auflagerreaktionen. Aus Fig. 130 ergiebt sich I = 5800 und II = 5800 kg. Verbindet man die Endpunkte m und n beider Balken durch einen dritten, wie dies Fig. 131 andeutet, dann entsteht in diesem eine hier horizontal wirkende Kraft. Die 3 Balken bilden dann gleichzeitig ein in sich geschlossenes System, in welchem, wenn Q in der Mitte wirkt, die beiden Auflager A und B als Aussenkräfte von der Grösse $\frac{Q}{2}$ entgegen wirken. Genau betrachtet wurden die Kräfte 1_1 und 2_1 in Fig. 129 in zwei horizontale 5 und 4 und in zwei vertikale A und B zerlegt. Die ersteren sind mit der Kraft 3 gleichwertig. Die letzteren müssen mit Q im Gleichgewicht sein. Infolge der symmetrischen Konstruktion ist $A + B = Q$ und $A = B = \frac{Q}{2}$.

Es liegen uns hier nun 3 Knotenpunkte in Fig. 131 vor: a, m und n, von diesen liegen m und n symmetrisch. In m wirken die Kräfte $A = \frac{Q}{2}$ als bekannte äussere Kräfte, P_3, oder kürzer in mn mit 3 bezeichnet und P, oder 1 in ma. In a wirken Q, 1 und 2; in n $B = \frac{Q}{2}$, 2 und 3. In Fig. 132 sind die Kräftepolygone dieser 3 Knotenpunkte vereinigt aufgezeichnet, und da sie sich sämtlich schliessen, so ist das Gleichgewicht gesichert. Von $A = \frac{Q}{2} = 3500$ kg ($3{,}5^{cm}$) geht man als bekannte Aussenkraft aus, zieht I || 1, III || 3, wodurch der Schnitt s bestimmt ist. An dieses Kräftedreieck schliesst man das für den Knotenpunkt n an, aus der Zusammenstellung beider ergiebt sich schliesslich das geschlossene Kräftedreieck des Knotenpunktes a für 1, 2 und Q. A wirkt als Auflagerreaktion von unten nach oben, trägt

man von A ausgehend, deren Kraftrichtung bekannt ist, die Pfeilrichtungen in das geschlossene Kräftedreieck tus und überträgt deren Richtungen auf den Knotenpunkt m, so wirkt der Pfeil in 1 auf den Knotenpunkt m, 1 ist also ein Druckstab, der Pfeil in 3 zeigt ab vom Knotenpunkt, 3 ist also durch P_3 auf Zug beansprucht. Die Feststellung der Kräfte im Knotenpunkt n durch das Kräftedreieck tsu_1 geschieht in derselben Weise, 3 ist Zug- und 2 wird Druckstrebe; die entsprechenden Richtungspfeile sind auch in den Knotenpunkt a übertragen.



Die Druckkräfte P_1 und P_2 sind, die Längen I und II gemessen, wie oben 5800 kg, die Zugkraft P_3 hat die Grösse 4700 kg.

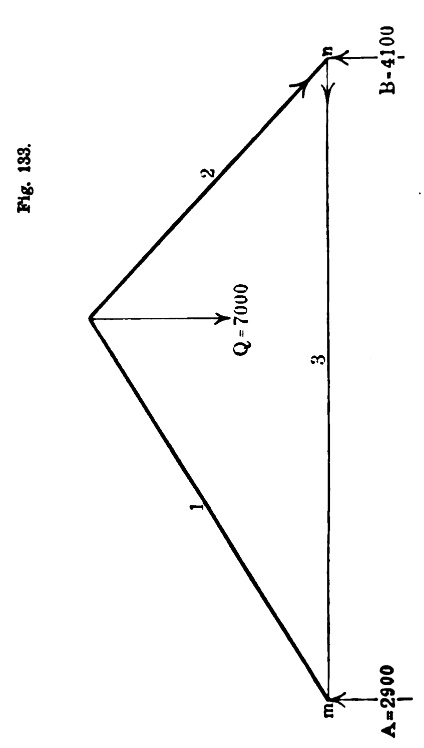


Fig. 133.

V. In nebenstehender Fig. wirkt Q in dem Bauwerk, event. Dachstuhl, nicht symmetrisch, sondern mehr nach dem Auflager B zu. Wie aus dem Kräftepolygon zu ersehen, ist 2 stärker als 1 belastet mit II = 6200 gegen I = 5300 kg. Die Pfeilrichtungen des Kräftedreiecks tsu, ausgehend von B im Knotenpunkt n, sind in die Streben des Knotenpunktes übertragen, und ergiebt sich P_3 als Zugkraft zu 4600 kg. Die Druckstreben sind gegenüber der Zugstrebe besonders markiert.

VI. An dem Wandkrahn oder Wandgerüst Fig. 134 hängen in den Knotenpunkten c u. c_1 Q kg. In Fig. 134 sind die Wandbefestigungen A und B horizontal angeordnet, in Fig. 135 liegt die Befestigung A in der Richtung der Strebe 2, bezw. a_1 c_1; es sind die Kräfte in den Streben 1, 2 und 3 zu untersuchen und zu bestimmen, wenn Q für jedes Gerüst einen be-

sonderen Wert annimmt; man kann für Q den Kräftemassstab in Fig. 129 zu Grunde legen. In dem Kräftepolygon Fig. 134 ist mit Q, als bekannt,

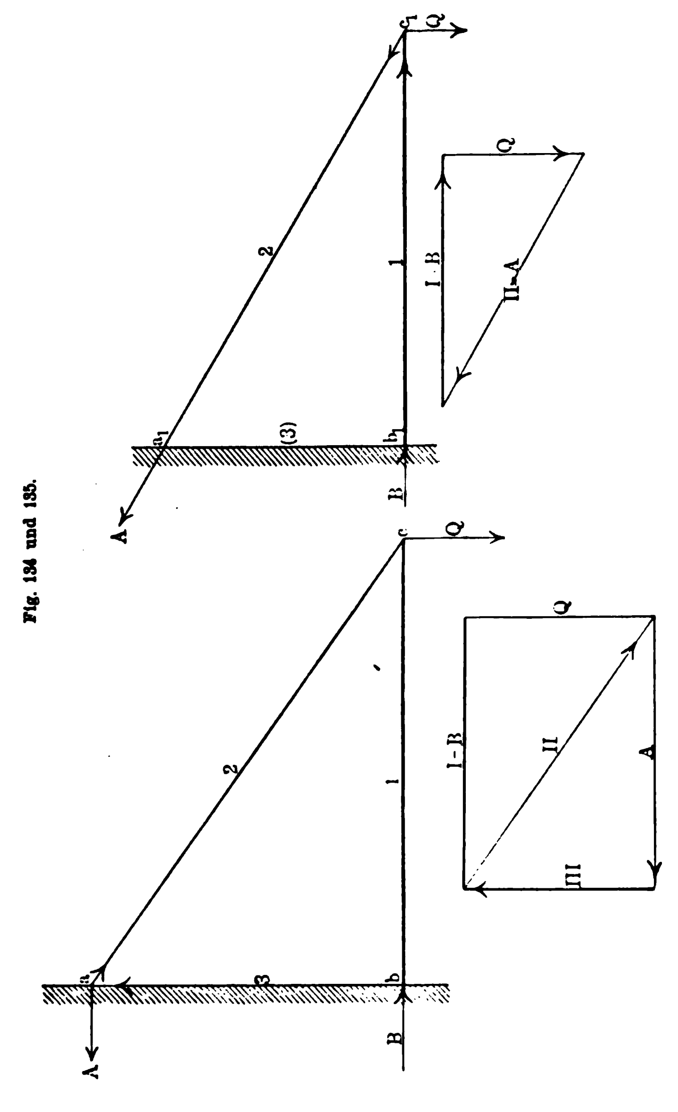


Fig. 134 und 135.

begonnen, und zwar im Knotenpunkt c I || 1, II || 2 gezogen; für den Knotenpunkt a wird II als bekannt verwertet und daran schliesst man III || 3 und A || A an; in b ergiebt sich I = B. Im Kräftepolygon Fig. 135 wird A = II und B = I, somit die Kraft in 3, $P_3 = o$, die Wandkraft

a_1 b_1 verschwindet, hingegen hat die Wand, oder die Strebe a b in Fig. 134 eine Druckkraft III, deren Mass sich aus dem Kräftepolygon durch Messung der Länge III ergiebt, auszuhalten.

Die Verteilung der Druck- und Zugkräfte ergeben sich sofort aus den Pfeilrichtungen der geschlossenen Kräftedreiecke. In Fig. 135 haben wir von der Richtung der Kraft Q ausgehend, die Pfeilrichtungen im Kräftedreieck nach c_1 übertragen, P_2 wird Zug-, P_1 Druckkraft; in Fig. 134 von der Aussenkraft A ausgehend, die Pfeilrichtungen des Knotenpunktes a aus dem Kräftedreieck nach a übertragen, P_3 wird Druck-, P_2 natürlich wieder Zugkraft. In Fig. 134 wird A = B, in Fig. 135 A > B.

VII. Auf einer schiefen Ebene, Fig. 136, liegt ein Körper a, dessen

Fig. 136 und 137.

Fig. 139.

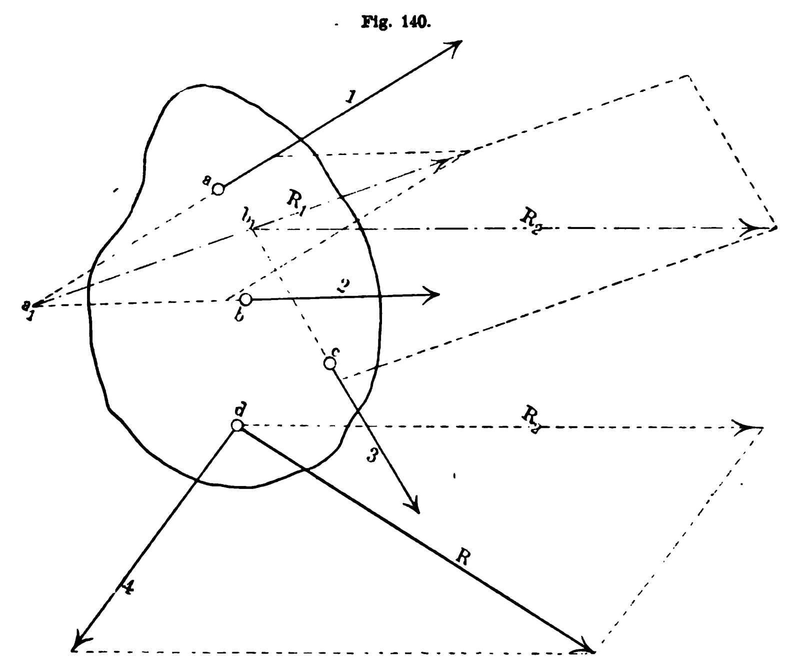
Fig. 138.

Gewicht $Q = 8500$ kg ist. Eine ihrer Richtung nach gegebene Kraft P soll den Körper auf der schiefen Ebene im Gleichgewicht erhalten. Wie gross ist P und welchen Druck R übt der Körper gegen die Ebene aus? Man trägt Q unter irgend einem Massstab in Grösse und Richtung auf und zieht, Fig. 137, $R_1 \parallel R$, $P_1 \parallel P$, beide Kräfte ergeben sich dann aus dem Kräftedreieck; $P_1 = 5000$ kg und $R = 4800$ kg.

VIII. An der Stange D, Fig. 138, ist eine Rolle r befestigt, über welche ein Seil geschlungen ist. Letzteres ist mit $Q = 450$ kg belastet, abgesehen von der Reibung ist dann der Seilzug Z auch 450 kg; es soll die Druckkraft in D bestimmt werden. Man konstruiert wieder das Kräftedreieck und findet aus demselben die Resultierende $D_1 = 700$ kg.

IX. In Figur 140 wirken eine Reihe von Kräften $P_1 \ldots P_4$ zerstreut, also nicht um einen Punkt herum auf einen Körper ein; es

Fig. 140.



soll die Grösse der Resultierenden bestimmt werden, auf die Lage derselben kommen wir weiter unten zurück. Die Kräfte wirken an den Punkten a, b, c, d. Verlängert man die Kraftrichtungen 1 und 2 bis zum Schnittpunkt a_1, und trägt in diesem Punkt die Grösse der Kräfte P_1 und P_2 an, so ergeben diese die Resultierende R_1; lässt man die Kraft P_3 in ihrer Verlängerung im Punkt b_1 in der Richtung R_1 angreifen, so

Das Kräftepolygon.

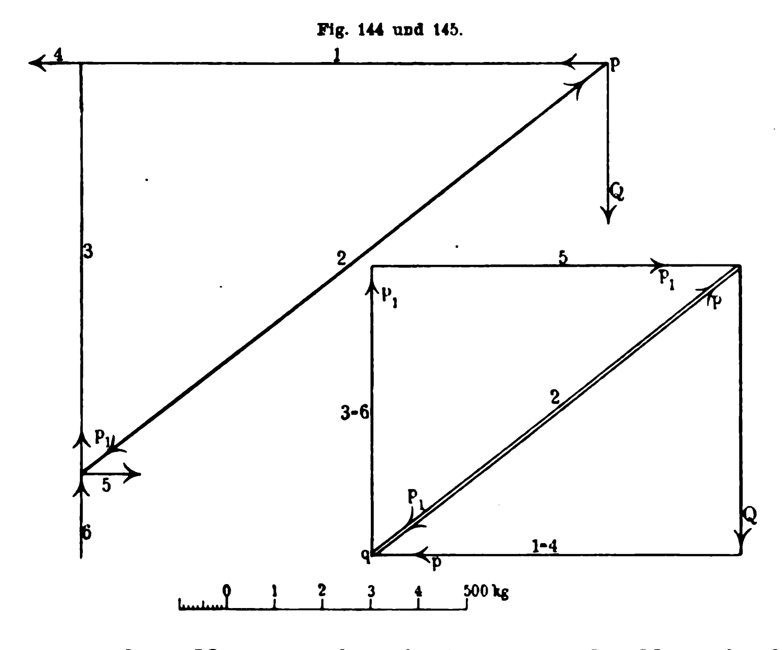
Fig. 141, 142 und 143.

ergiebt sich, von diesem Punkte an gerechnet, aus R_1 und P_3 die Resultierende R_2. Anstatt die Kraft P_4 bis zur letzteren Resultierenden zu verlängern, haben wir ferner R_2 nach dem Angriffspunkt der Kraft P_4, nach d übertragen, und es ergiebt sich schliesslich R. Dieselbe Schlusslinie erhält man durch Konstruktion des Kräftepolygons von a ausgehend, Fig. 139. Die Schlusslinie R_1 wirkt entgegengesetzt der Resultierenden R, da R_1 um das Gleichgewicht herzustellen, die Kraft R aufheben muss.

Auf den Körper A, Fig. 141, wirken 5 Kräfte in verschiedenen Punkten. In Fig. 143 haben wir die einzelnen Resultierenden und das Gesamtresultat R ermittelt. R ist seiner aus der Figur zu entnehmenden Grösse nach im stande, das Gleichgewicht herzustellen, die Bestimmung der Lage innerhalb der 5 Kräfte behalten wir uns noch vor. Würde man sich dieselben Kräfte um einen Punkt a_1 herum vereinigt denken, Fig. 142, so giebt R gleichzeitig Grösse und Lage an.

X. Der einfache Krahn, Fig. 144, ist mit $Q = 600$ kg belastet; es sollen die Kräfte in den Hauptstreben 1, 2, 3 und die Zapfenkräfte

Fig. 144 und 145.



bestimmt werden. Man trägt Q nach einem passenden Massstab, hier zu 6 cm, also 1 mm = 10 kg entsprechend, auf, indem man die Linie Q, Fig. 145, parallel der gegebenen Kraftrichtung Q in Fig. 144 zieht. Die Kräfte P_1 und P_2 in den Streben 1 und 2, Fig. 144, finden sich

durch Konstruktion des Kräftedreiecks 1, 2, Q, Fig. 145, indem man 1 und 2 parallel den Richtungen 1, 2, Fig. 144, zieht, der Punkt q bildet dann den Abschluss der Kräfte im Kräftedreieck; dieses schliesst sich, und damit ist das Gleichgewicht der Kräfte im Knotenpunkt p festgestellt. Die Zapfenkraft 4 liegt in derselben Richtung wie 1 und ist, weil 3 senkrecht auf 1 und 4 steht, $P_4 = P_1$. Im unteren Knotenpunkt wirken die Kräfte P_3, P_5 und P_2, P_6, von diesen ist $P_6 = P_3$. P_2 ist bereits bekannt und kann aus Fig. 145 entnommen werden, indem man die Länge 2 abgreift und die Kraft mit Hülfe des Massstabes abliest. Man konstruiert das Kräftedreieck 2, 5, 6 bezw. 3, indem man die Richtungen 3 und 5 parallel nach Fig. 145 überträgt und an 2 anschliesst.

Man erhält

$$P_1 = P_4 = P_5 = 775 \text{ kg}; \; P_2 = 980 \text{ kg}; \; P_3 = P_6 = Q = 600 \text{ kg}.$$

Überträgt man aus Fig. 145 die Pfeilrichtungen p und p_1 nach Fig. 144 für jeden Knotenpunkt, so ergeben sich 1 und 3 als Zugstreben, 2 als Druckstrebe; die Pfeile in 2 zeigen nach dem Knotenpunkt, während die in 1 und 3 von den betr. Knotenpunkten abweisen.

XI. In nebenstehendem Krahngerüst, Fig. 146, ist das Eigengewicht G, welches am Schwerpunktshebelarm s wirkt, mit in Rücksicht gezogen. Die Ausladung des Krahns ist a, die Schwerpunktsentfernung $s = \frac{1}{3}$ a. Die Belastung sei Q = 3000 kg, reduziert man das Eigengewicht G, welches wir der Krahnlast gleich annehmen wollen, G = Q = 3000 kg, auf den Knotenpunkt p, dem Angriffspunkt der Last, so wirken dort $Q_1 = Q + \frac{1}{3} G = 4000$ kg. Der untere Teil der Krahnsäule st ist im Boden verankert und in s auf das Moment $Q_1 a$ zu berechnen. Fig. 147 stellt den Kräfteplan, das Kräftepolygon der Streben, Fig. 148 das geschlossene Kräftepolygon der äusseren Kräfte dar; diese sind die Last mit dem Eigengewicht Q + G, die Zapfenkräfte $P_5 = P_4$ und $P_6 = Q_1$. Der Zapfen p_1 ist auf Biegung durch P_4, der in s auf Biegung durch P_5 und auf den Vertikaldruck P_6 zu berechnen.

Man stellt zunächst, weil P_5 und P_4 vorläufig noch unbekannt sind, das Gleichgewicht des Knotenpunktes p her, indem man das Kräftedreieck Q, 1, 2 ermittelt, Fig. 147, in diesem geht man von der gegebenen Last $Q_1 = 4000$ aus, und schliesst an diese die Parallelen zu 1 und 2 an. Im Knotenpunkt p_1 sind 3 und 4 unbekannt, 1 ist bekannt, man schliesst in Fig. 149 4 und 3 parallel an 1 an; im Knotenpunkt s sind P_2 und P_3 durch die Längen 2 und 3 in Fig. 147 bekannt; zu bestimmen sind noch P_5 und die Kraft P_6, die seitliche und senk-

rechte Zapfenkraft. Man schliesst in Fig. 147 an 2 zunächst 3 an, indem man diese parallel überträgt; Parallele zu 6 und 5 ergeben dann den Schluss des Kräftepolygons in Fig. 147. P_4 und P_5 in den Knotenpunkten p_1 und s werden gleichgross. P_6 wird der gesamten

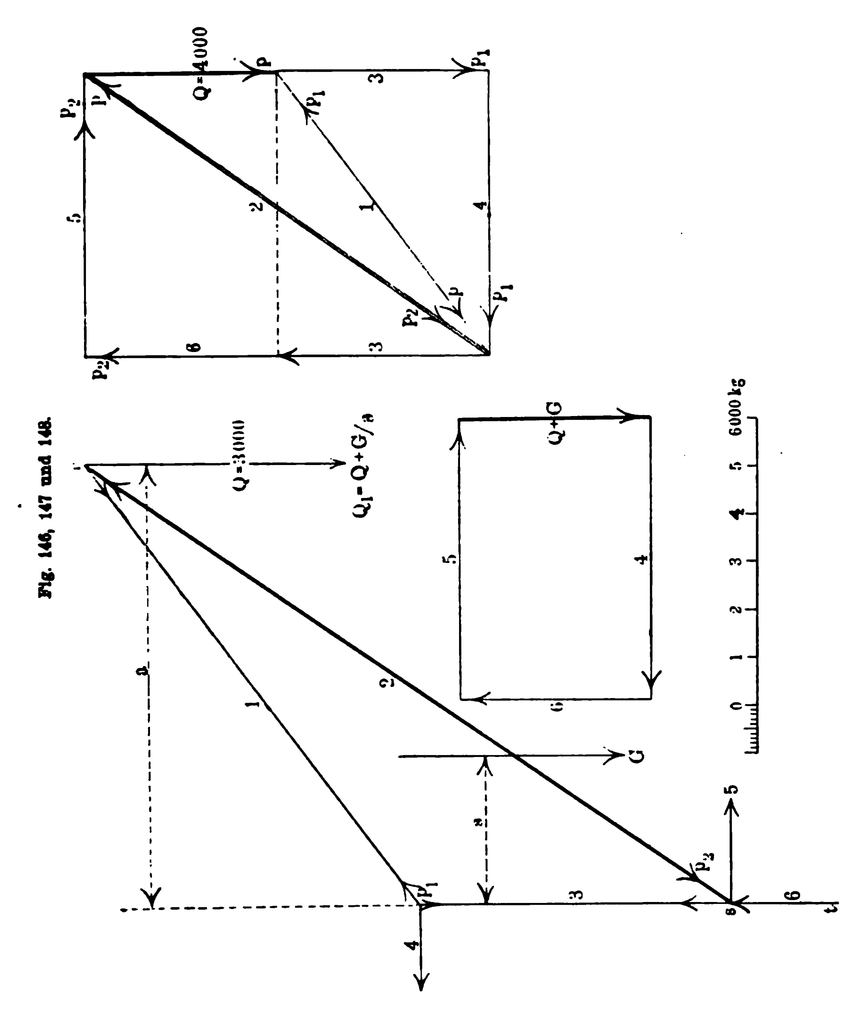


Fig. 146, 147 und 148.

vertikalen Belastung gleich. Die Fig. 148 stellt das Gleichgewicht der äusseren Kräfte dar. Die Zug- und Druckstreben erkennen wir wieder aus den Pfeilrichtungen. Im Knotenpunkt p, von Q ausgehend, dessen Pfeilrichtung senkrecht nach unten weist, überträgt man die Pfeilrichtungen p im geschlossenen Kräftepolygon (Dreieck) Q, 1, 2 aus

Fig. 147 nach dem Knotenpunkt p in Fig. 146 und findet in 2 Druck, in 1 Zug. Im Knotenpunkt p_1, von 4 der äusseren Kraftrichtung P_4 oder der Zugpfeilrichtung in 1 ausgehend, trägt man zunächst die Pfeile p_1 in das Kräftedreieck 1, 3, 4 und überträgt sie nach p_1, Fig. 146; es ergiebt sich Zug in 3. Die Pfeilrichtungen, also die Zug- oder Druckthätigkeit in s bezw. p_2 ist hiernach durch die beiden Knotenpunkte p und p_1

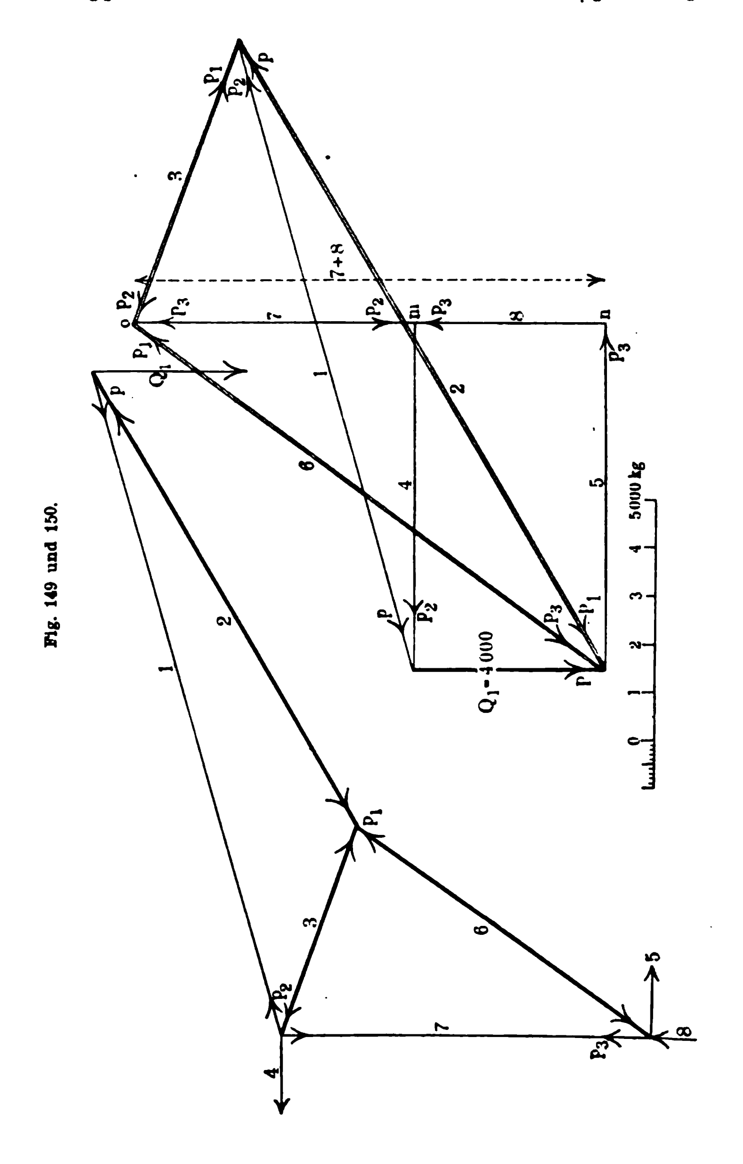
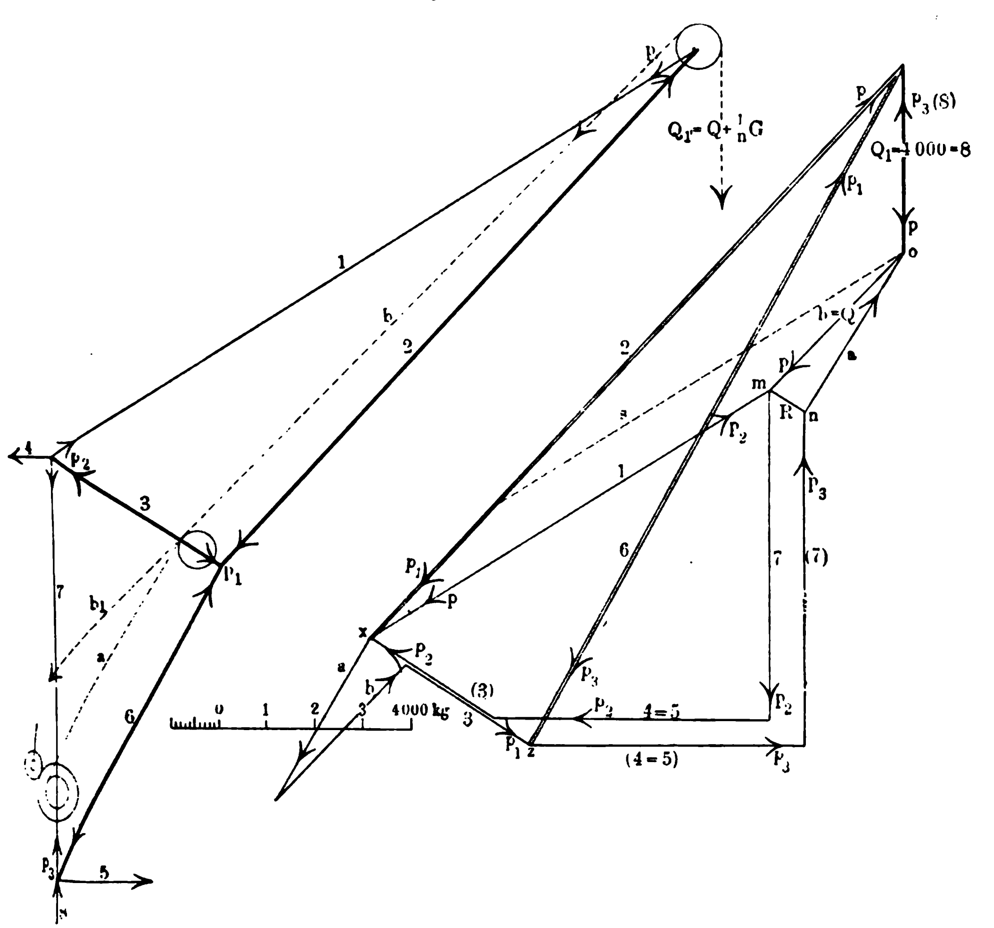


Fig. 149 und 150.

bereits bekannt, sie ergiebt sich übrigens auch in derselben Weise durch **Übertragung** der Pfeile p_2 aus Fig. 149 nach Fig. 148. Die Kräfte **entnimmt** man aus dem beigefügten Massstab.

XII. In den Fig. 149 bis 152 ist, um die Ausladung vergrössern zu können, noch die Strebe 3 angeordnet; in Fig. 151 ist noch be-

Fig. 151 und 152.



sondere Rücksicht auf den Seil- oder Kettenzug $a = b = Q$ genommen. Obgleich $b > Q$ und $a > b$, so haben wir aber in der Darstellung der Kräftepolygone, Fig. 152, die Reibungsverluste weggelassen. In beiden Fällen erhält man in 3 eine Druckkraft und in 7 Zugkraft, wie sich aus der Übertragung der Pfeilrichtungen leicht ergiebt.

Man beginnt mit dem Knotenpunkt p für $Q_1 = 4000$ kg, in Fig. 150 und 152 wurde das Längenmass von Q_1 zu 4 cm angenommen; bildet in Fig. 150 das Kräftedreieck für 1, 2 und Q_1, in Fig. 152 mit Rücksicht auf die Seil- oder Kettenkraft b = Q das Kräfteviereck von 1, 2, Q_1 und b. Durch Übertragung der Pfeile p aus Fig. 152 nach Fig. 151, ausgehend von Q_1, erkennt man, dass der Kettenzug die Druckkraft in 2 vergrössert, die Differenz der Druckkraft ergiebt sich durch Eintragung der punktierten Linie os parallel der Richtung 1. Die Zugkraft in 1 hingegen wird kleiner, je mehr die Kettenrichtung b in die Richtung der Zugstange 1 fällt. In Fig. 150 schliesst man zunächst das Kräftepolygon des Knotenpunktes p_1 an, um 3 zu erhalten, indem der Knotenpunkt p_2 eine unbekannte Kraft mehr aufweist als p_1; dann bringt man den Knotenpunkt p_2, in welchem 1 und 3 bekannt sind, zum Schluss und überträgt p_5, ferner die Innenkraft 7 = mo, diese fällt mit der Aussenkraft 8 = mn, welche wieder Q_1 gleich sein muss, in eine Richtung no = 7 + 8. In Fig. 152 haben wir einige Parallelübertragungen vorgenommen. Der Knotenpunkt p_1 besteht aus den Kräften a, b, 3, 2 und 6, von denen ist 6 aus dem ersten Knotenpunkt p und a = b = Q bekannt, a und b bilden die Resultierende R, welche auf 3 einwirkt; R wird Null, wenn a in die Richtung b_1 fällt. Man trägt nun die Richtungen und Grössen von a und b an 2 in Fig. 154, die Parallelen zu 3 und 6 bestimmen deren Grössen. An x, bezw. an 1 schliesst man dann die Kräfte im Knotenpunkt p_2, indem man 3 parallel überträgt; die Parallelen zu 4 und 7 liefern deren Grössen in dem Polygon 1, 3, 4 und 7. Die Kräfte des letzten Knotenpunktes p_3 : 6, 5, 7, a, 8 schliesst man dann an z an, 7 wird übertragen, $\overline{no}$ = a und 8 = Q_1 sind bekannt, die Kräfte 4 und 5 werden gleich gross.

In den folgenden Tabellen sind die aus den beigefügten Massstäben entnommenen Kräfte eingetragen.

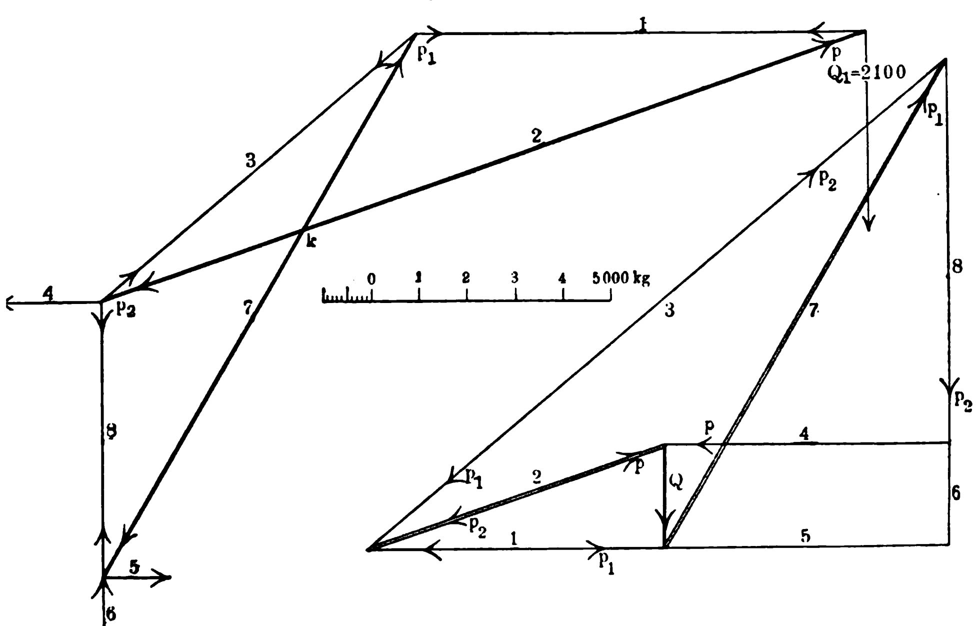
Kräfteplan des Krahns Fig. 149.

Bezeichnung Gegeben Q = 3000	Äussere Kräfte $Q_1 = 4000$ mit Eigengewicht	Zug	Druck
1	—	13600	—
2	—	—	15200
3	—	—	6300
4	7200	—	—
5	7200	—	—
6	—	—	12200
7	—	4000	—
8	4000	—	—

Kräfteplan des Krahns Fig. 151.

Bezeichnung Gegeben Q = 8000	Äussere Kräfte Q_1 = 4000 mit Eigengewicht	Zug	Druck	Bemerkungen
1 = mx	—	10000	—	
2	—	—	16400	
1 = os	—	10000	—	ohne Rücksicht auf
2	—	—	12400	d. Kettenzug.
3	—	—	3200	wird Null, wenn 6 u. 2
4	5700	—	—	in eine Richtg. fallen.
5	5700	—	—	
R	900	—	—	
6	—	—	16300	
7	—	6900	—	
8	4000	—	—	

Fig. 153 und 154.



XIII. Das Krahngerüst, Fig. 153 u. 154, ist mit Q = 1500 kg belastet, das Eigengewicht G = Q = 1500 in 0,4 der Ausladung angenommen und auf den äussern Punkt p reduziert, ergiebt Q_1 = 2100 kg. Von dieser Belastung ausgehend, wird zunächst das Kräftedreieck 1, 2, Q_1, Fig. 154, des Knotenpunktes p konstruiert, hieran schliessen sich dann in derselben Weise wie oben die Kräftepolygone der Knotenpunkte p_1 und p_2 an. Die Streben 2 und 7 sind auf Druck, bezw. Knickung zu berechnen; im

Kräftepolygon ist keine Rücksicht auf eine etwaige Verbindung in k genommen. In der Ausführung wird man 7 aus zwei Druckstreben her-

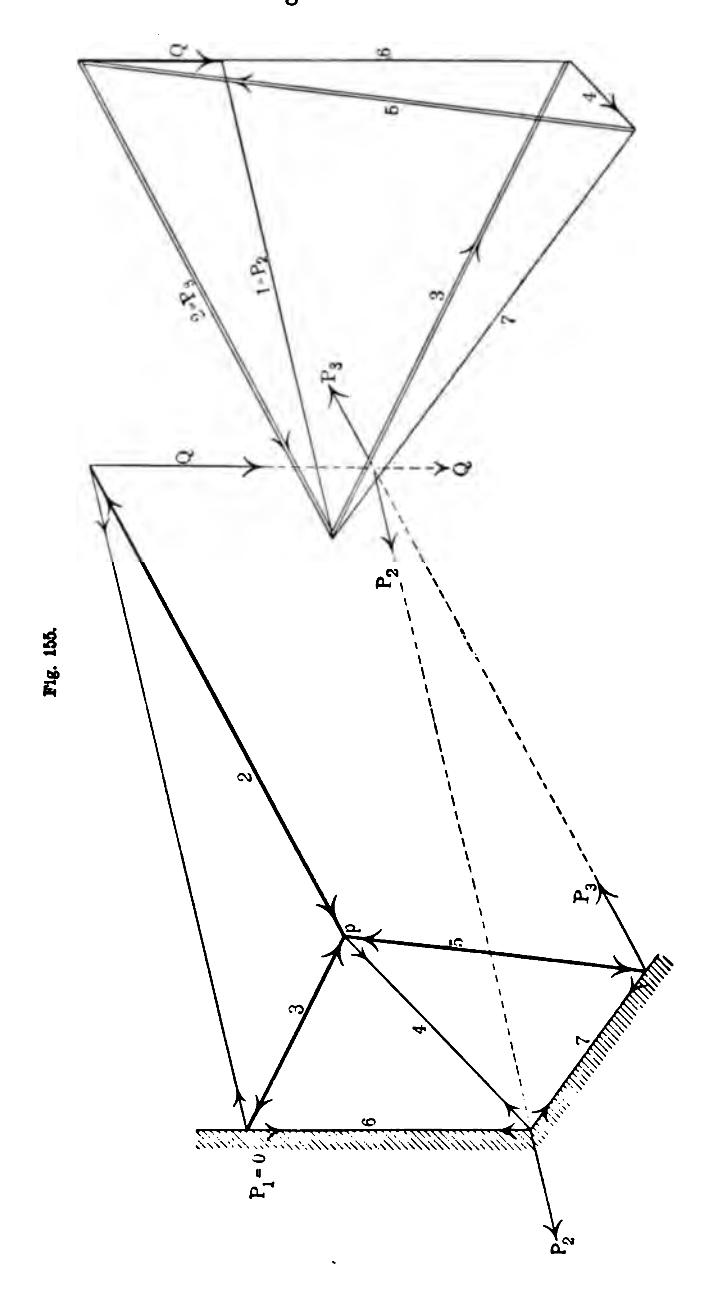
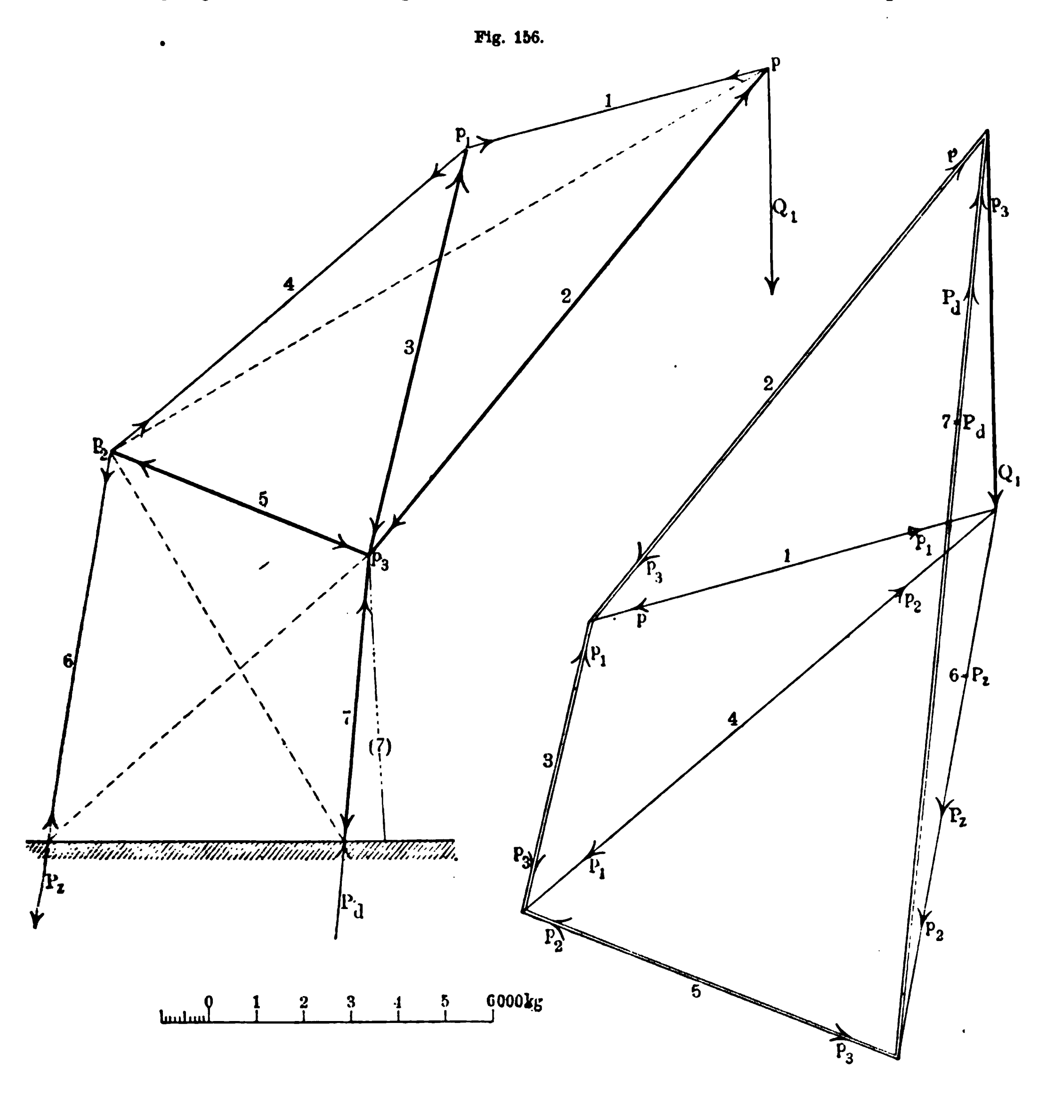


Fig. 155.

stellen, zwischen welchen die Druckstrebe 2 als die schwächere liegt, in k kann dann event. eine Verbindung hergestellt werden, welche die Ausbiegung durch Knickung vermindert. Die Druckkraft in 2 ist P_2 =

Fig. 156.



6500, die in 7 hingegen 12000 kg. Von den Zugstangen ist 3 am stärksten belastet. In der Konstruktionszeichnung des Kräfteplanes, Fig. 154, ist in der Zugstrebe 1 unterhalb p_2 neben dem Pfeil der Buchstabe p zu ergänzen.

Fig. 157.

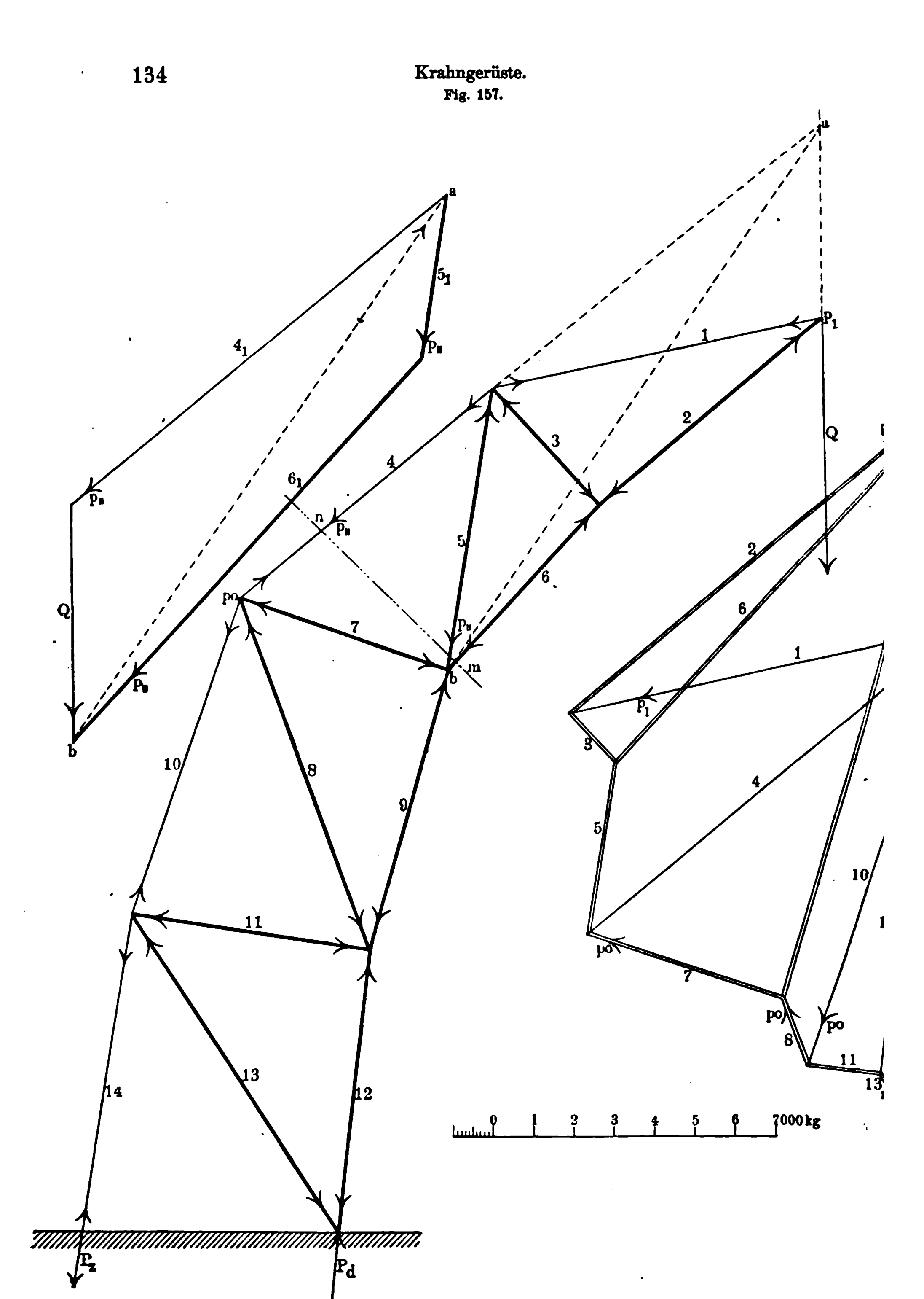
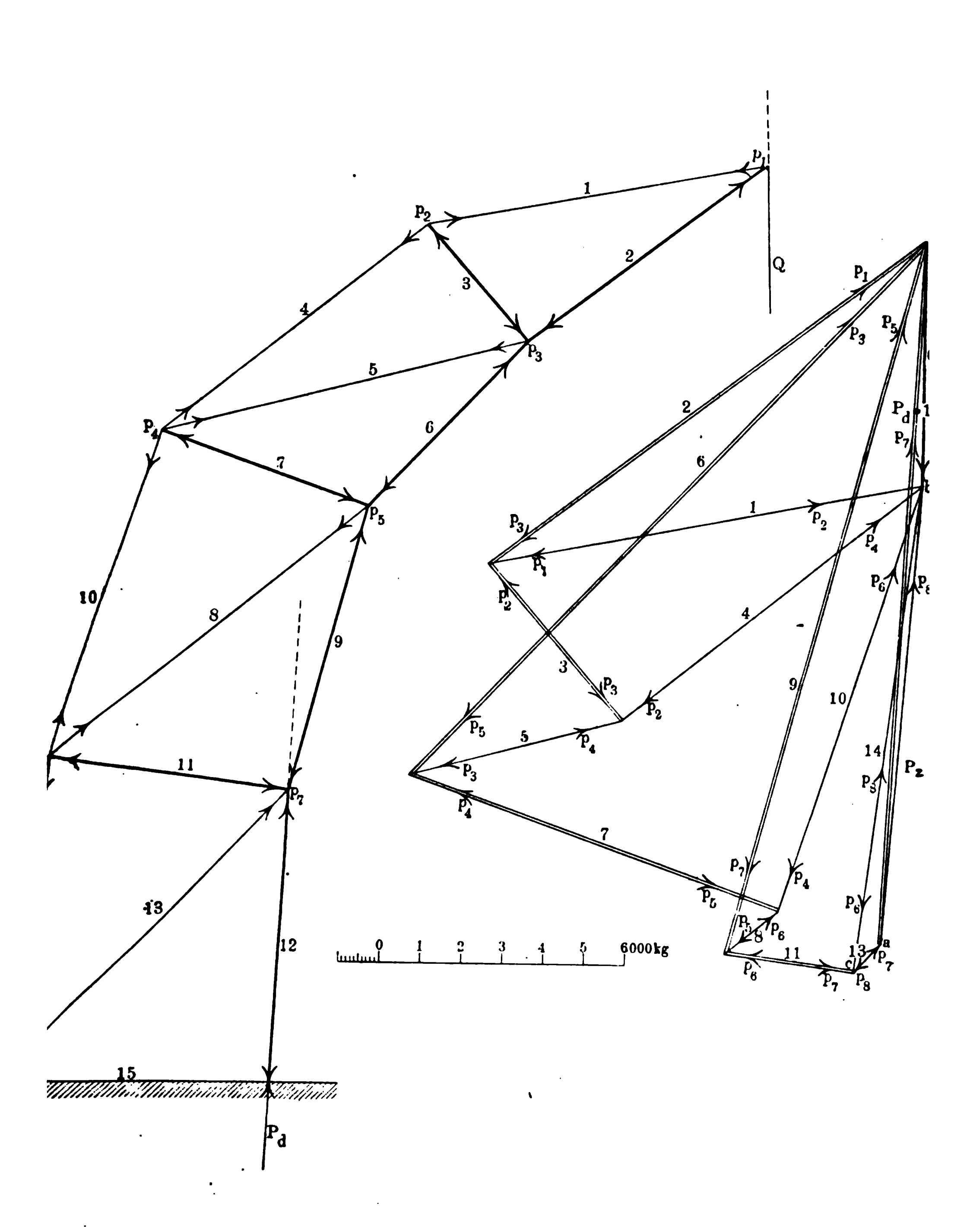


Fig. 158 und 159.



XIV. Der in Fig. 155 gezeichnete Wandkrahn ist mit Q kg belastet, und genügt es, ihm durch die beiden Wandkräfte P_2 und P_3 bereits einen sicheren Halt zu bieten. Wenn dieser Krahn mit der selbständigen Zugstrebe 6 ausgeführt wird, so ist die Seitenwand bei 6 und eine Befestigung P_1 an derselben unnötig; wird aber die Verbindung dieser beiden Knotenpunkte, also die Strebe 6, durch die Wand ersetzt, so ist eine Wandverbindung als Ersatz der Kraft P_6 erforderlich. Das Gleichgewicht der äusseren Kräfte P_2 P_3 und Q ist in der Figur durch besondere Andeutung dieser Kräfte hervorgehoben. Die Pfeile des Knotenpunktes p sind im Kräftepolygon in dem geschlossenen Kräfteviereck 2, 3, 4, 5 zunächst eingetragen, und zwar ausgehend von der Druckpfeilrichtung in der vorher bestimmten Druckstrebe 2, die Richtungen der Pfeile sind dann nach p in die Hauptfigur übertragen, man findet in 3 und 5 Druck, und ergiebt sich 4 als Zugstrebe. Mit Q als Einheit im Kräftepolygon ergeben sich leicht die übrigen Kräfte.

XV. Die nächsten Figuren sind Krahngerüste, deren Belastungen Q_1 aus den angefügten Massstäben entnommen werden können.

Die Belastung in Figur 156 ist $Q_1 = 8000$ kg. Man beginnt mit dem Knotenpunkt p, in welchem die gegebene Last Q_1 angreift, das betreffende Kräftedreieck liefert 2 als Druck und 1 als Zugstab; dann geht man zum Knotenpunkt p_1 über, in welchem 1 bekannt ist und nur 4 || 4, 3 || 3 angeschlossen wird. 1 als Zugstab ist bereits bekannt. Das Kräftedreieck 1, 3, 4 lässt sich sonach durch die Pfeile p_1 leicht schliessen; überträgt man dieselben nach p_1 der Hauptfigur, so findet sich 3 als Druck und 4 wieder als Zugstab, weil der letztere Pfeil von p_1 abweist, der in 3 auf p_1 hinweist. Man schliesst nun am besten den Knotenpunkt p_3 an, dieser enthält die beiden unbekannten Kräfte 5 und 7; es bleibt dann nur noch das Kräftedreieck 4, 5, 6 des Knotenpunktes p_2. Wenn sich eine der Streben 6 oder 7 senkrecht an den betr. Knotenpunkt anschliesst, wie dies in der Figur durch (7) angedeutet ist, dann fällt die betreffende Kraftlinie im Polygon in dieselbe Richtung mit Q. In der praktischen Ausführung wird man, um die Konstruktion noch stabiler zu gestalten, selbst wenn theoretisch nur eine Diagonalstange erforderlich sein sollte, meistens noch eine Kreuzstrebe anbringen.

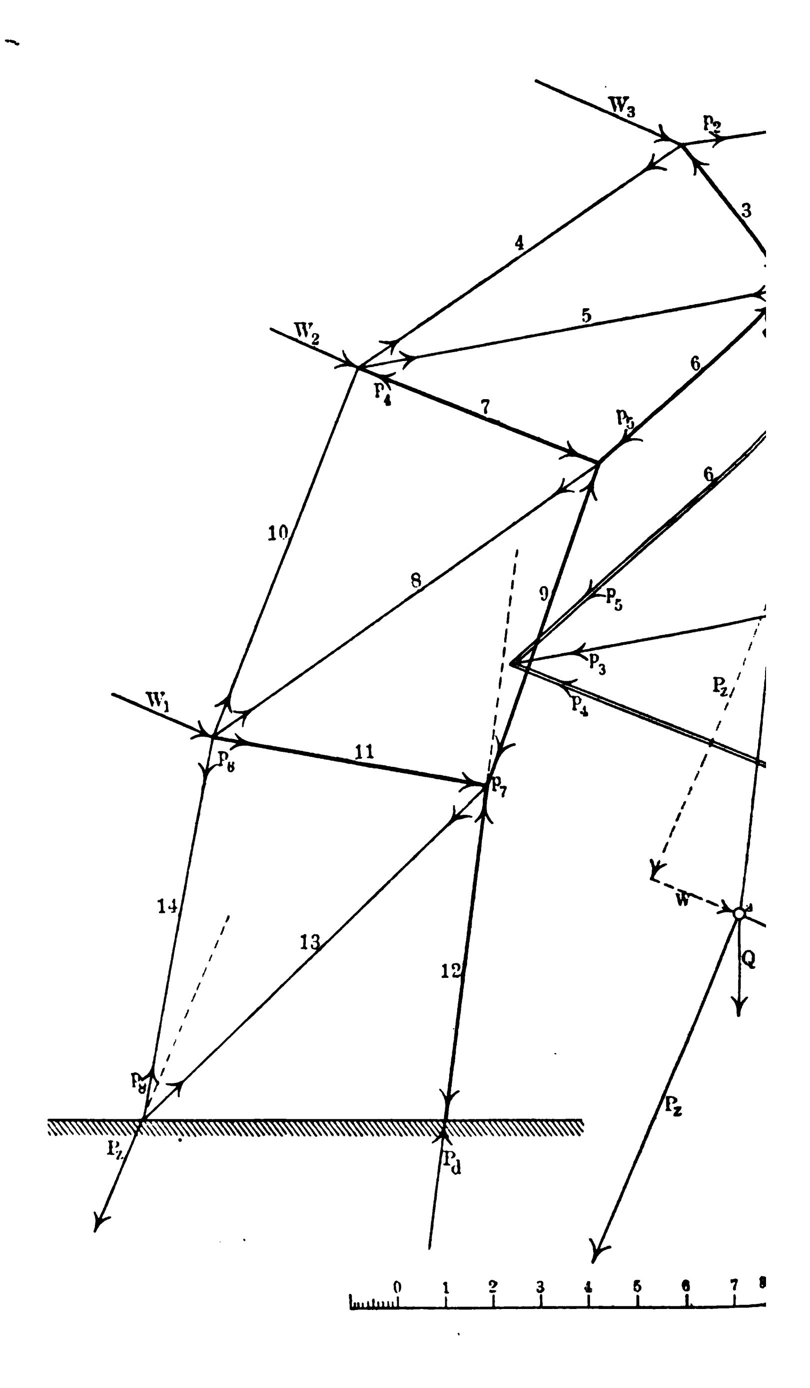
Besteht das Gerüst aus zwei in dieser Weise zusammengesetzten Wänden (Schilden), welche in der andern Ansicht nach p zu konisch verlaufen, event. in p in einer Spitze auslaufen, und welche, um gegen

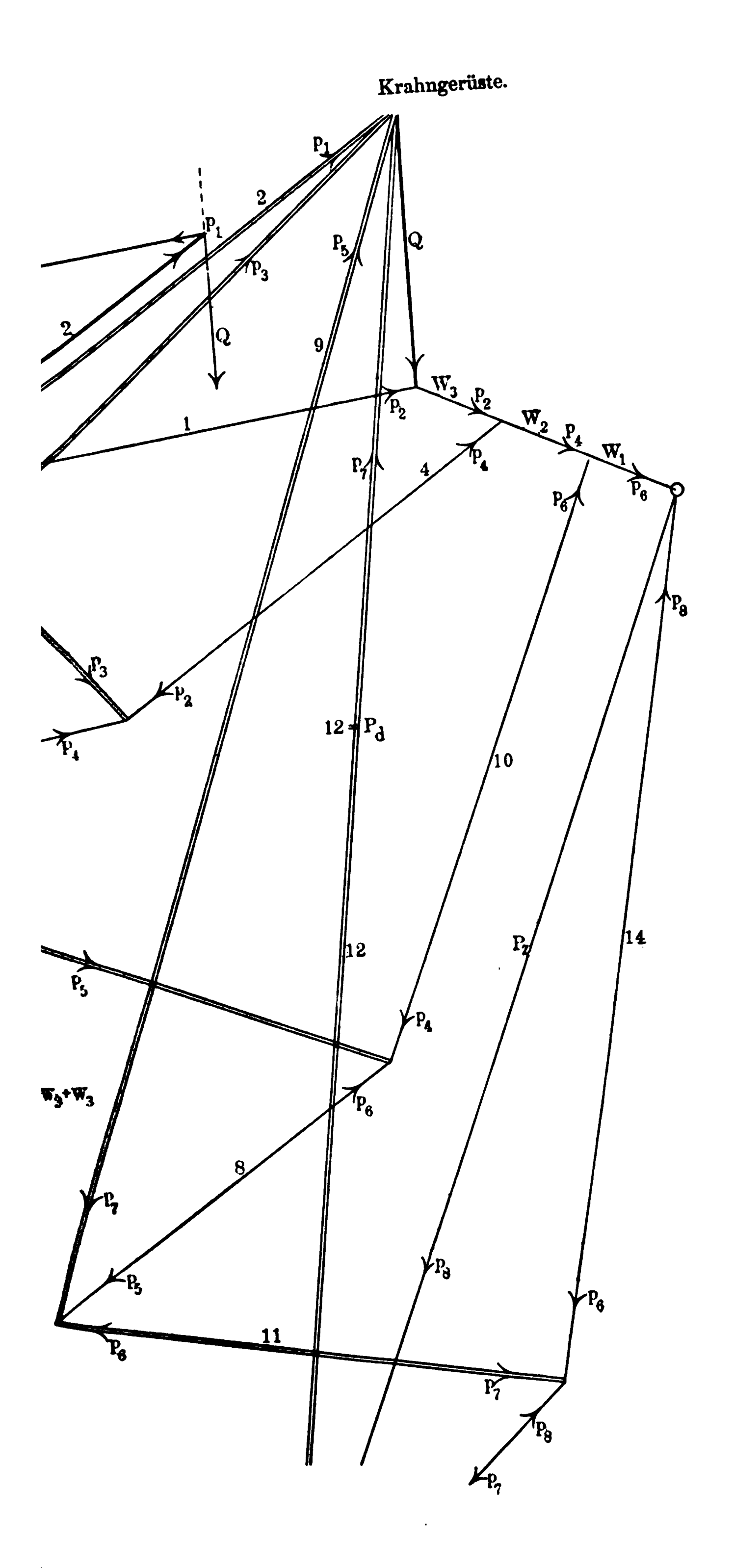
seitliche Kraftwirkungen geschützt zu sein, durch Kreuzstreben verbunden sind, so ist die Tragfähigkeit doppelt so gross.

Die Verbindungselemente der beiden Schilde sind dann wieder als besonderes Gerüst zu betrachten, auf welches seitliche Kräfte einwirken; wir werden weiter unten auf die graphostatische Bestimmung der Zug- und Druckstreben solcher Gerüste zurückkommen.

XVI. Die Figuren 157 bis 160 stellen ein ähnliches Gerüst wie das eben betrachtete, auch aus 4 Feldern bestehend, dar. Die Höhe und Ausladung, sowie die event. auf ein Schild reduzierte Belastung im Knotenpunkt p_1 ist bei allen dieselbe, Q = 6000 kg. Die Anordnung der Diagonalstreben ist in Fig. 157 entgegengesetzt der in den anderen Figuren. Wie aus den Kräftepolygonen ersichtlich, ist das System mit einseitigen Verstrebungen in allen drei Fällen im Gleichgewicht, Kreuzverstrebungen erhöhen allerdings die Stabilität, das heisst bieten mehr praktische Sicherheit, sind jedoch theoretisch nicht erforderlich. In Fig. 160 ist dasselbe Gerüst wie Fig. 158 angenommen worden, nur sind die äusseren Knotenpunkte noch mit in der gleichen Schildebene liegenden Seitenkräften belastet, diese können beispielsweise als Windkräfte angesehen werden. Die äusseren Begrenzungsstreben sind auf Zug, die inneren auf Druck beansprucht, ebenso müssen die Ringstreben 3, 7, 11 auch auf Zerknickung berechnet werden. Die Diagonalstreben sind in dem einen Fall, Fig. 158, 160, auf Zug, im anderen, Fig. 157, auf Druck beansprucht. Eine wesentliche Differenz infolge der Kräfte W zeigt die Kräftebeanspruchung in Fig. 160, wie auch aus den weiter unten stehenden Tabellen zu erkennen ist, in welchen wir die sämtlichen Kräfte in Übersicht ausgetragen haben.

Man beginnt wieder mit dem äussersten Kräftedreieck an den Knotenpunkten p_1, weil dort nur 3 Kräfte vorhanden sind, von denen die eine, Q, bekannt ist; daran schliesst man die unmittelbar daran liegenden Knotenpunkte an, und von denen diejenigen zuerst, welche die wenigsten Unbekannten aufweisen, also in Fig. 158 zunächst p_2, dann p_3 u. s. w. Schliesslich muss das Gleichgewicht der äusseren Kräfte noch kontrolliert werden. P_z, P_d und Q in Fig. 157 bis 159; W_1, W_2, W_3, P_z, P_d und Q in Fig. 160. In Fig. 157 fallen P_z und P_d in die Richtungen der Streben 12 und 14. In Fig. 158 liegt P_d auch in Richtung der Strebe 12. Die Kräfte 13 und 14 in den Knotenpunkten p_6 und p_7 sind durch diese Knotenpunkte bereits fest bestimmt. Das Gleichgewicht von 13, 14 und P_z als letzten Knotenpunkt mit Rücksicht darauf, dass Q, P_z und P_d auch im Gleichgewicht sein müssen, wird dann durch Schluss des Drei-


W3
P2
3
4
5
W2
P4
7
6
P5
6
10
8
9
P5
P3
W1
P4
Pz
11
P8
P7
14
W
13
Q
12
P8
Pz
Pz
Pd
0
1
2
3
4
5
6
7


P1
2
P1
P3
2
Q
P5
Q
9
1
P2
W3
P2
W2
P4
W1
P7
4
P4
P6
P6
P8
P3
P2
P4
12 = Pd
10
P7
14
P5
12
P4
W2+W3
P6
8
P7
P5
P3
P6
11
P6
P7
P8
P7

ecks a b c, Fig. 159, hergestellt, indem man im Kräftepolygon die Schlusslinie a b zieht und parallel auf den Knotenpunkt p_8 überträgt. Da nun b den Endpunkt von Q, die Kraft $12 = P_d$ den Anfangspunkt von Q bildet, so liefert das Dreieck P_z, P_d und Q das Gleichgewicht dieser äusseren Kräfte. Eine besondere Strebe 15, Fig. 158, ist dann nicht erforderlich, die Kraft in dieser wird Null. Denkt man sich P_z, P_d und Q bis zum Schnitt verlängert, so schneiden sie sich in einem Punkte.

In Fig. 160 liegen die äusseren Kräfte zerstreut in einer Ebene, sie sind im Gleichgewicht, weil ihr zugehöriges Kräfteviereck Q, $W_1 + W_2 + W_3$, P_z und P_d geschlossen ist. In einer Nebenfigur sind die äusseren Kräfte besonders herausgezeichnet. Auch hier wird die Richtung von P_z in der Weise im Knotenpunkt p_8 gefunden, dass man P_z als Schlusslinie im Kräftepolygon des Knotenpunktes zieht und parallel in die Hauptfigur überträgt. Die Verfolgung der Pfeilrichtungen der einzelnen Knotenpunktpolygone und ihre Richtungsübertragung in die Hauptfigur ergeben den Zug und Druck in den Streben, wie sie in den folgenden Tabellen enthalten sind. Auf die linke Hülfsfigur und auf den Schnitt m n, Fig. 157, kommen wir weiter unten zurück.

Kräfteplan des Krahngerüstes Fig. 168.

Bezeichnung Gegeben	Äussere Kraft Q = 6000	Zug	Druck	Bemerkungen
1	—	9800	—	
2	—	—	12600	Die Differenzen P_1, P_2 in den Streben 1 und 2 mit den Kräften P_1, P_2 der unteren Tab. sind die Folgen der ungenaueren Zeichnung.
3	—	—	1700	
4	—	11900	—	
5	—	—	4300	
6	—	—	12700	
7	—	—	5200	
8	—	—	1800	
9	—	—	15600	
10	—	11500	—	
11	—	—	1800	
12	—	—	17200	
13	—	—	400	
14	—	11500	—	
P_z	11500	—	—	
P_d	17200	—	—	

Kräfteplan des Krahngerüstes Fig. 158.

Bezeichn. Gegeben	Äuss. Kr. Q = 6000	Zug	Druck
1	—	10900	—
2	—	—	13300
3	—	—	5000
4	—	9400	—
5	—	5300	—
6	—	—	18000
7	—	—	9500
8	—	1700	—
9	—	—	18200
10	—	10900	—
11	—	—	3200
12	—	—	17100
13	—	900	—
14	—	11900	—
P_z	11100	—	—
P_d	17100	—	—

Kräfteplan des Krahngerüstes Fig. 160.

Bezeichn. Gegeben	Äuss. Kr. Q = 6000	Zug	Druck
1	—	10900	—
2	—	—	13300
3	—	—	6600
4	—	10200	—
5	—	9700	—
6	—	—	21500
7	—	—	15800
8	—	9000	—
9	—	—	26900
10	—	13500	—
11	—	—	10900
12	—	—	33250
13	—	8000	—
14	19100	—	—
P_z	26300	—	—
P_d	33250	—	—
W_1	2000	—	—
W_2	2000	—	—
W_3	2000	—	—

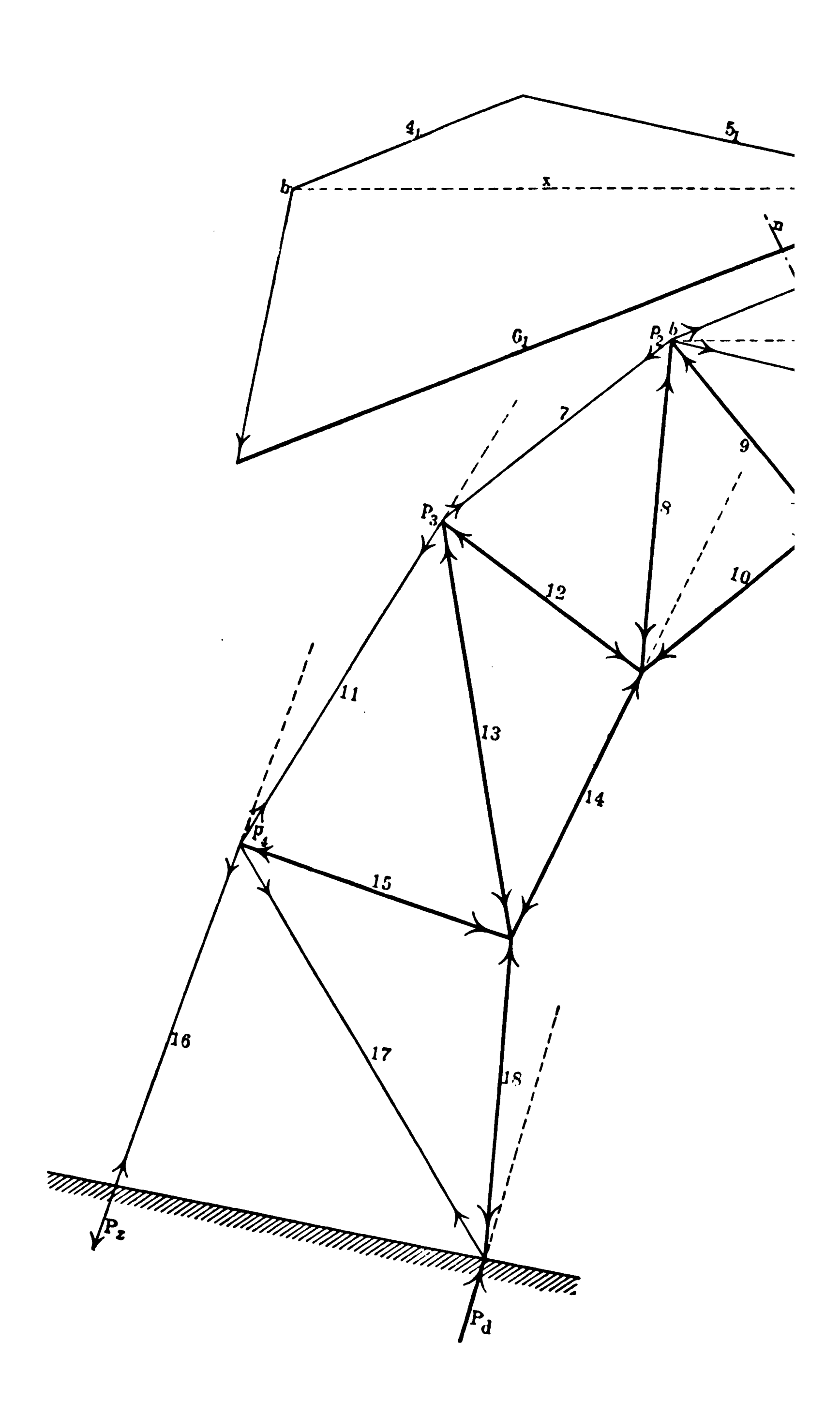
XVII. Das Krahngerüst, Fig. 161 u. 162, ist mit Q kg belastet, es hat 5 Felder mit verschiedenen Diagonalstangenrichtungen. Wir haben 4 Knotenpunkte besonders markiert p_1, p_2, p_3, p_4. Die Aussenkraft P_z bildet mit 16 dieselbe Richtung. P_z, P_d und Q als Aussenkräfte sind im Gleichgewicht, sie bilden ein geschlossenes Kräftedreieck, dessen Schlusslinie ab, Fig. 162, als massgebend für die Richtung von P_d in die Hauptfigur übertragen wurde. In der Konstruktionszeichnung des Kräfteplanes ist in der Druckstrebe 13 der Pfeil in Richtung 12, 13, 15 neben p_3 zu ergänzen.

In Fig. 163 haben wir das Gerüst eines sog. Fairbairnkrahnes dargestellt. Derselbe soll für 5000 kg Nutzlast ausgeführt werden, das Eigengewicht nehmen wir der Last gleich zu 5000 kg an und den Angriffspunkt desselben in $^1/_4$ der Ausladung, dann ist die auf den äussersten Punkt reduzierte Last

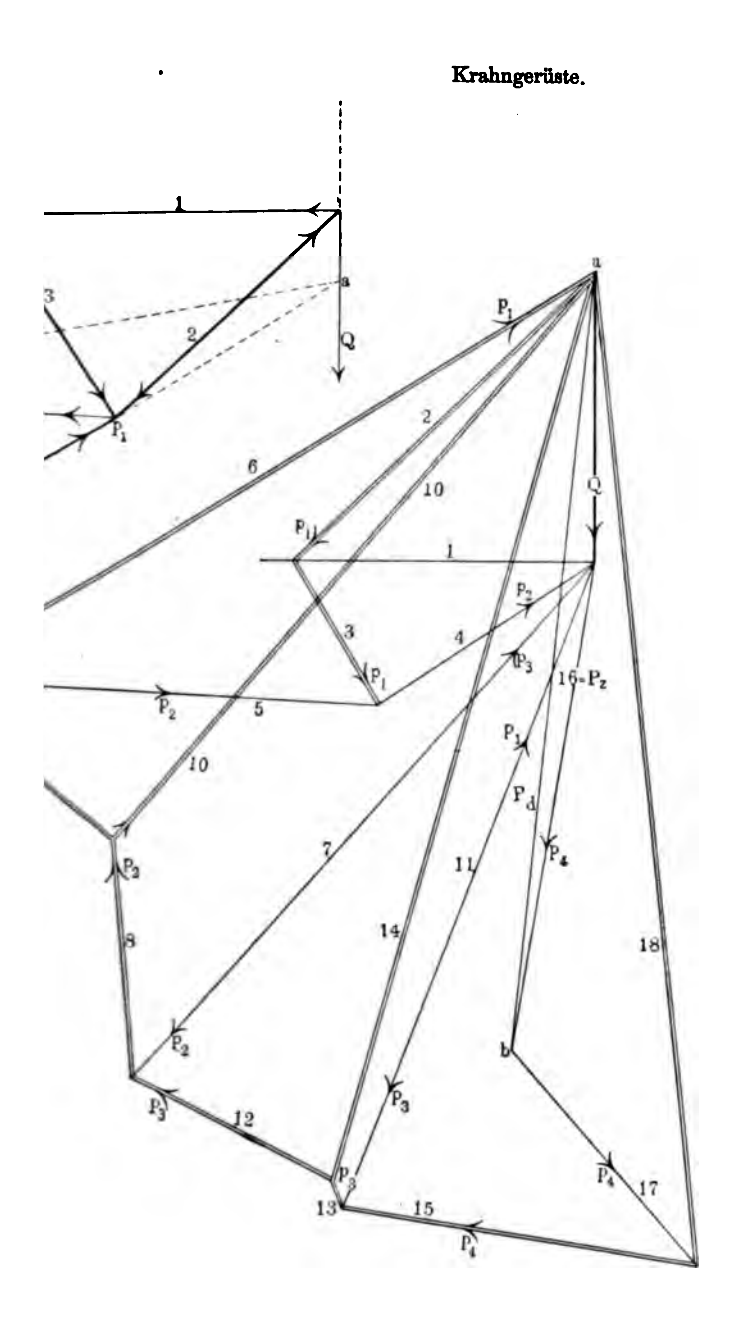
$$5000 + {}^1/_4\, 5000 = 6250 \text{ kg}.$$

Hierzu noch Eigengewichte der Ketten, Rollen u. s. w. zugeschlagen, rechnen wir insgesamt 6600 kg, das ist für eine Seitenwand oder ein Schild Q = 3300 kg Tragfähigkeit.

Wir haben nun, wie aus der Figur ersichtlich, eine Flaschenzugsrolle angeordnet, der Kettenzug ist dann



4_1
5_1
b
x
n
6_1
P_2
b
7
9
8
P_3
12
10
11
13
14
P_4
15
16
17
18
P_z
P_d


1
2
3
a
Q
P_1
6
10
1
3
4
5
P_2
P_3
16=P_z
P_d
P_4
7
8
11
14
18
b
12
13
15
17

$$\frac{3300}{2} = 1650 \text{ kg.}$$

Berücksichtigen wir hier noch die Rollen- und Kettenwiderstände, so dürfen wir P = 1800 kg Kettenzug in Anrechnung bringen. Die Ausladung ist 5 m, die ganze Höhe 5,5 m; die Höhe der Zapfenstützen A und B ist h = 2,3 m, die Stärken derselben berechnen sich aus den Kräften

$$A = B = \frac{3300 \cdot 5}{2{,}3} = 7000 \text{ kg abg.}$$

Wir haben nun bei Aufzeichnung der Kräftepolygone mit dem äussersten Knotenpunkt begonnen; in diesem denken wir uns die Gesamtlast Q = 3300 kg und den Kettenzug P = 1800 kg angreifend, dann erhalten wir das Kräfteviereck Q, 1, 2, P; an dieses schliessen wir den Knotenpunkt für 2, 3, 7, ferner 1, 3, 4, 5 u. s. w. an. In dem Knotenpunkt p ist 22 als Druckstrebe aus den vorhergehenden Knotenpunkten bekannt, von dieser ausgehend hat man nur im geschlossenen Kräfteviereck 21, 23, 25, 27 die Pfeilrichtungen einzutragen und diese dann in die Gerüststreben im Knotenpunkt selbst zu übertragen.

In p_1 (der in der Rolle bei P eingeschriebene Buchstabe p muss durch p_1 ersetzt werden) denken wir uns ausser den Streben 31, 28, 29 und 33 noch den Kettenzug P angreifend, das entsprechende Kräftefünfeck wird somit den anderen angereiht. Im untersten Knotenpunkt p_0 kommen die Kräfte Q, B, P_{47} und P_{48} in Betracht, von denen Q und B bekannt sind. In der Ausführung wird man die untersten Streben in ein einziges massives Stück vereinigen, ebenso wird man die Felder teilweise noch mit Kreuzstreben versehen. Verfolgt man die Kräftepolygone der einzelnen Knotenpunkte, so erkennt man bald, dass die Kraftlinien der äusseren Begrenzungen zusammenfallen, die betreffenden Zahlen sind am äussersten Linienrande angegeben, in der Kraftlinie o n sind der besseren Übersicht wegen doppelte Zahlen mit Pfeilrichtung angegeben. Aus den beigefügten Massstäben sind die Längenverhältnisse und die Kräfte zu entnehmen. Die letzteren enthält die folgende Tabelle.

Kräfteplan des Fairbairnkrahns Fig. 168.

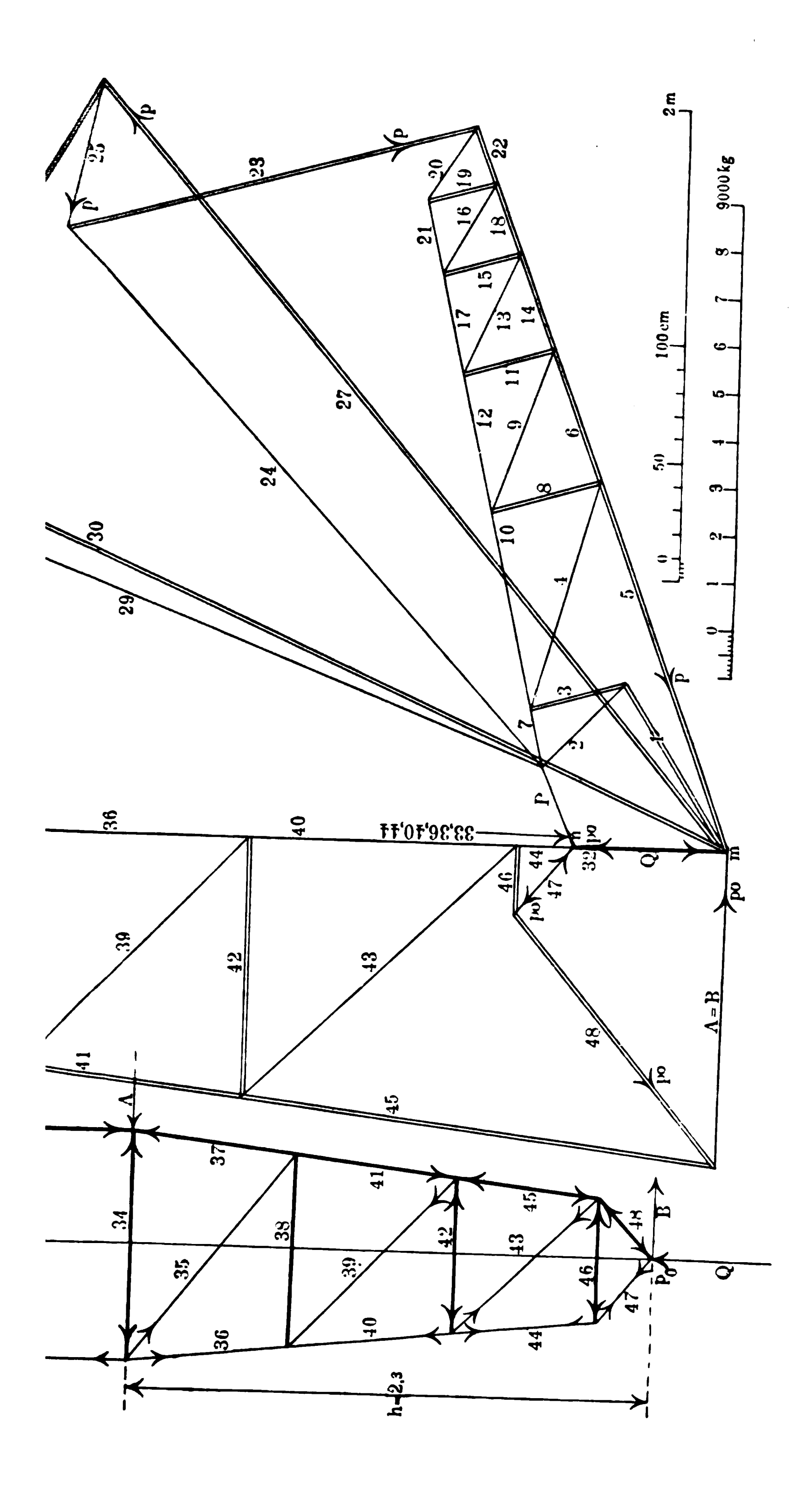
Bezeichn.	Äuss. Kr.	Zug	Druck	Bezeichn.	Äuss. Kr.	Zug	Druck
Gegeben	Last Q = 3300			22	—	—	16200
				23	—	—	8900
	Kettenzug			24	—	15300	—
	P = 1800			25	—	3200	—
Berechnet	A = 7000			26	—	—	10000
	B = 7000			27	—	—	30800
1	—	—	4100	28	—	1000	—
2	—	2400	—	29	—	15400	—
3	—	—	2100	30	—	—	20000
4	—	5000	—	31	—	—	8100
5	—	—	8300	32	—	—	18500
6	—	—	11100	33	—	15200	—
7	—	1200	—	34	—	—	4600
8	—	—	2400	35	—	5800	—
9	—	3600	—	36	—	11600	—
10	—	5400	—	37	—	—	18600
11	—	—	2000	38	—	—	5100
12	—	8300	—	39	—	6900	—
13	—	2800	—	40	—	7000	—
14	—	—	3400	41	—	—	15000
15	—	—	1700	42	—	—	5500
16	—	2300	—	43	—	7900	—
17	—	10900	—	44	—	1200	—
18	—	—	14700	45	—	—	10200
19	—	—	1550	46	—	—	1500
20	—	1900	—	47	—	2000	—
21	—	12100	—	48	—	—	6800

XVIII. Die folgenden Figuren 164 bis 173 sind einfache **Freiträger**, welche an zwei Stellen an der Wand befestigt sind.

Die Belastung des Freiträgers in Fig. 164 ist am äussersten Punkt zu Q = 6000 kg angenommen. Um die Lage der 3 äussersten Kräfte P_1, P und Q festzustellen, nehmen wir P_1 horizontal an und ziehen durch den Fusspunkt b die Linie ab, der Schnittpunkt a ist durch Q und P_1 fest bestimmt, somit auch die Richtung der Aussenkraft P. Man kann nun wieder mit dem Knotenpunkt Q, 1 und 2 beginnen, und schliesst hieran 1, 3, 4; 1 ist gegeben durch das erste Kräftedreieck, durch 4 || 4, 3 || 3 ergiebt sich der Polygonschluss. Hieran reiht man den Knotenpunkt p mit 2, 3, 5, 6; 2 und 3 sind bekannt, man hat also nur nötig, 5 || 5 bis 6 || 6 anzuschliessen, 6 fällt dann teilweise mit 2 zusammen und wird wieder bis zum Anfangspunkt der 2 gerechnet; hierauf folgt der Knotenpunkt m mit 4, 5, 8, 7, welchen wir besonders herausgezeichnet haben u. s. w. Die Bestimmung von Druck und Zug in den Streben



Fig. 163.


2 m
9000 kg
100 cm
A=B
h=2,3

geschieht, ausgehend von den Aussenkräften, wie oben. Für die Knotenpunkte p und m haben wir die Pfeile eingetragen.

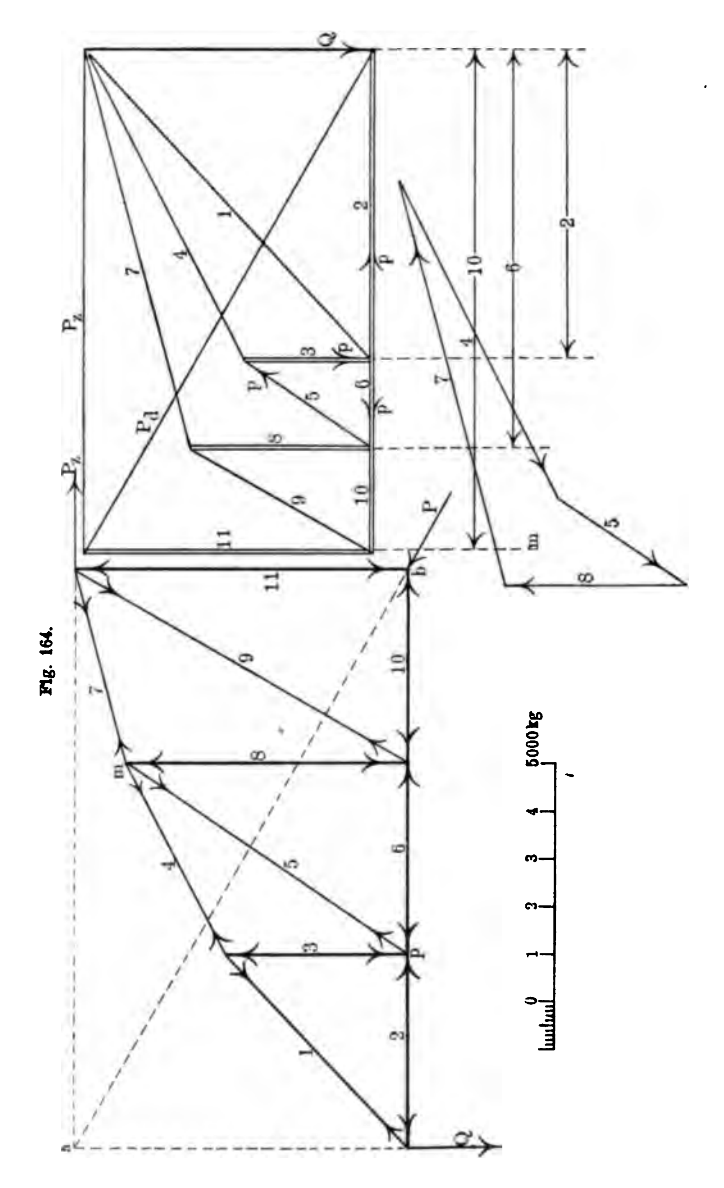


Fig. 164.

Der Kräfteplan wird mit Hilfe des angeschlossenen Massstabes wie oben aufgestellt.

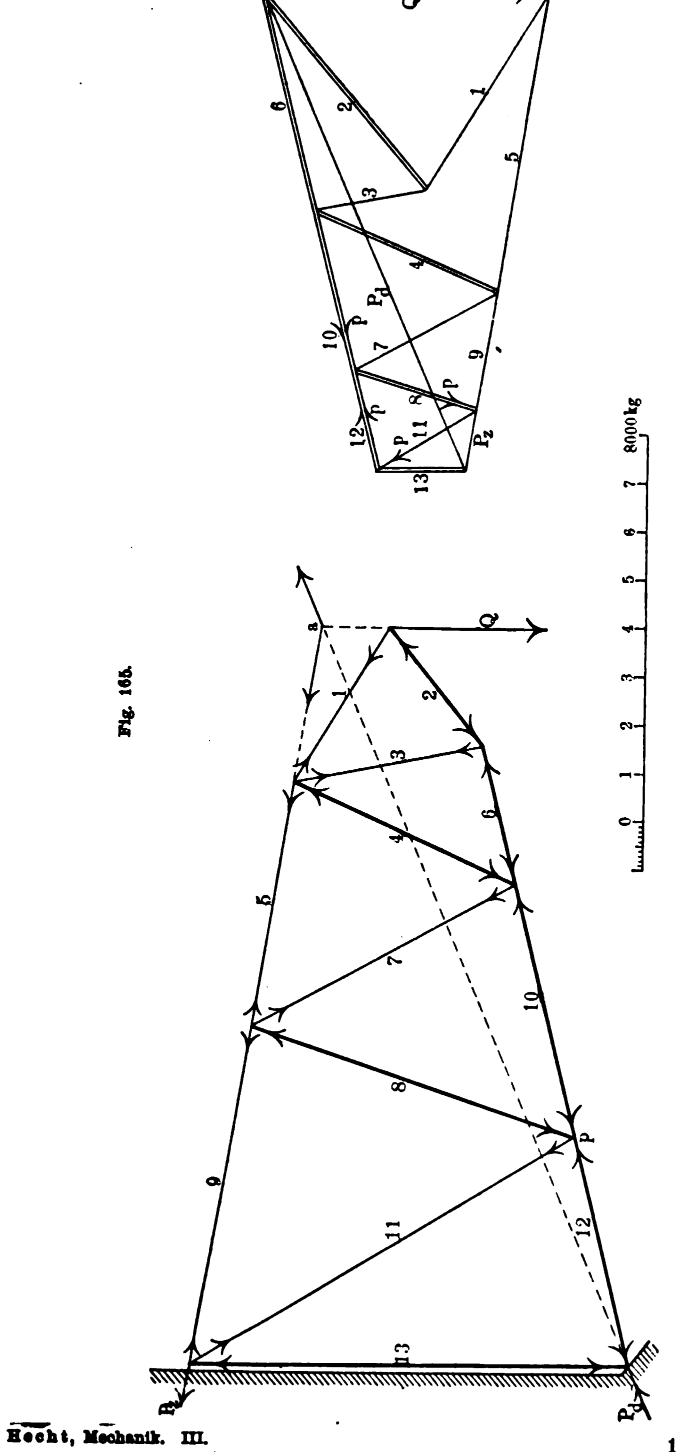


Fig. 165.

Im Freiträger, Fig. 165, ist die Verteilung der Wandstreben eine andere. Von der Belastung Q = 6000 kg ausgehend, beginnt man wieder mit dem Kräftedreieck Q, 1 und 2. In Bezug auf die Bestimmung von Druck und Zug haben wir den Knotenpunkt p besonders markiert. Die Richtungen der Aussenkräfte laufen durch den Punkt a.

Die Kräfte sind in der folgenden Übersicht enthalten.

Fig. 166.

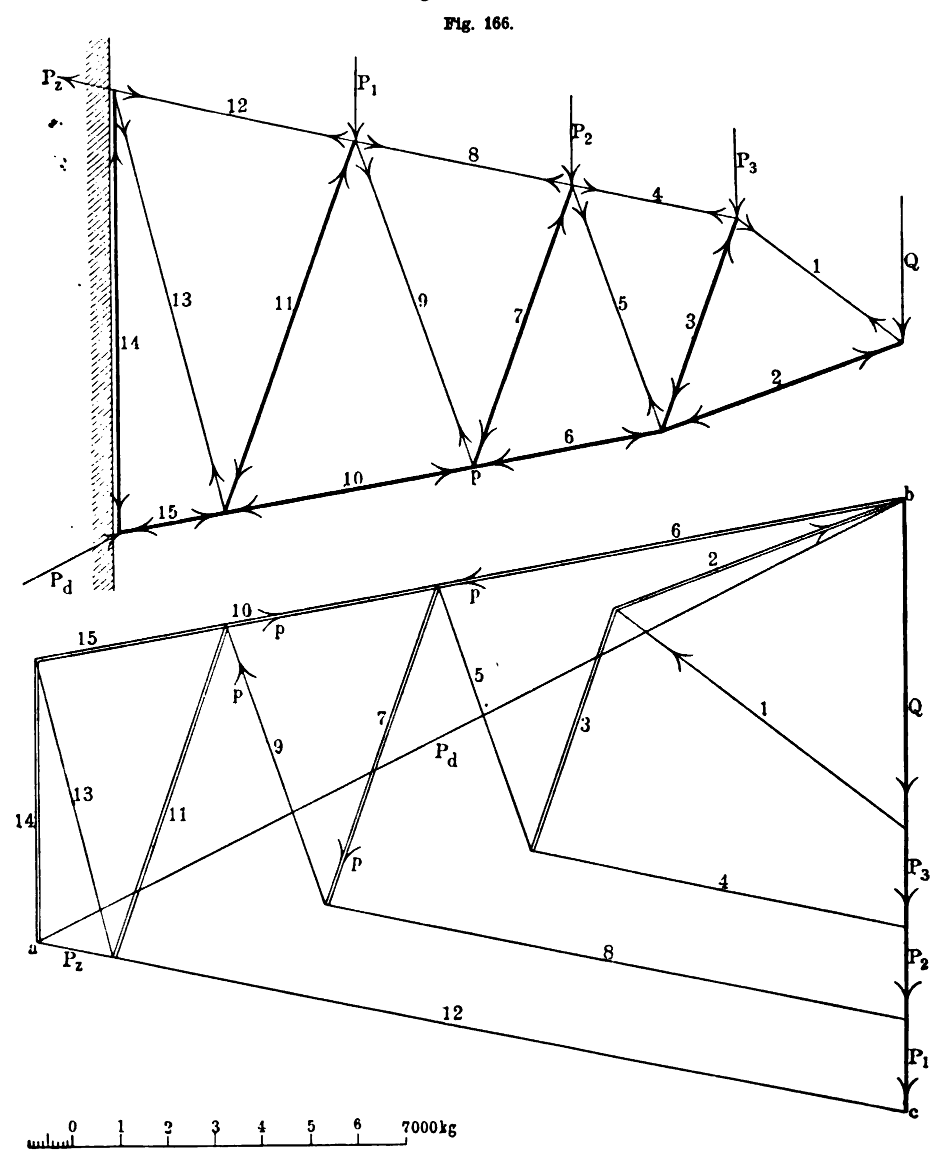
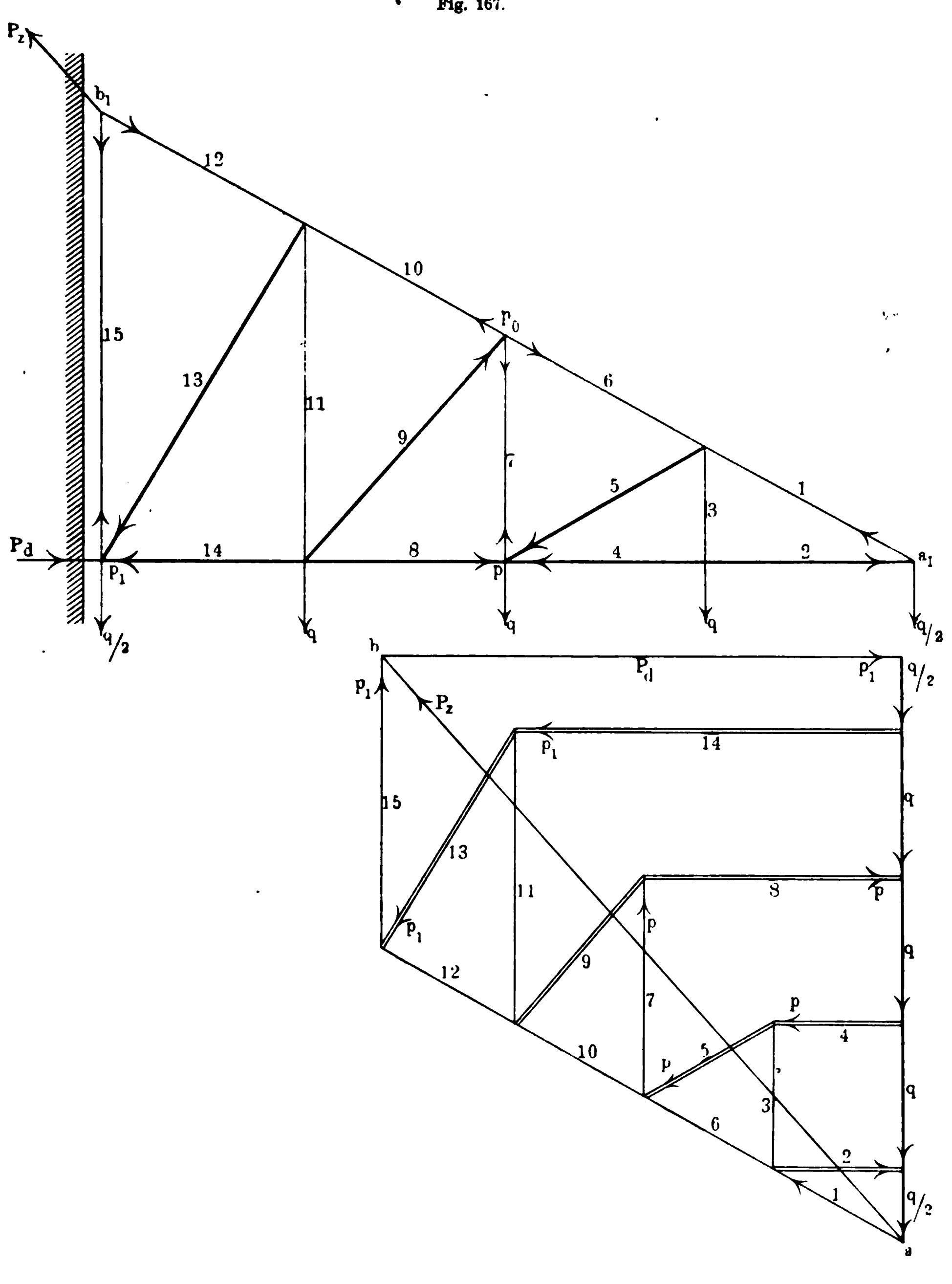


Fig. 167.


P_z
b_1
12
10
P_0
6
15
13
11
9
7
5
1
3
P_d
14
8
4
2
a_1
P_1
p
q/2
q
q
q
q/2
b
P_d
P_1
q/2
P_1
P_z
14
q
15
13
11
8
p
P_1
p
9
q
12
7
p
4
10
5
p
q
3
6
2
1
q/2
a

Kräfteplan zum Freiträger Fig. 165.

Bezeichn.	Äuss. Kr.	Zug	Druck	Bezeichn.	Äuss. Kr.	Zug	Druck
Gegeben	Q = 6000	—	—	6	—	—	4700
P_z	10100	—	—	7	—	3400	—
P_d	10700	—	—	8	—	—	2700
1	—	4800	—	9	—	8700	—
2	—	—	5200	10	—	—	8000
3	—	2250	—	11	—	2400	—
4	—	—	4200	12	—	—	10200
5	—	6200	—	13	—	—	1800

Der Freiträger, Fig. 166, ist ausser mit Q noch mit drei Aussenkräften P_1, P_2, P_3, jede zu 2000 kg angenommen, in den oberen drei Knotenpunkten belastet.

Die Konstruktion des Kräftepolygons ist mit keinen Schwierigkeiten verbunden. Die Aussenkräfte P_z, P_d, Q, P_1, P_2, P_3 bilden ein geschlossenes Kräftepolygon abc, sie schneiden sich nicht in einem Punkte. Wir werden weiter unten nochmals auf derartig zerstreut in einer Ebene liegende Kräfte zurückkommen. Die Aussenkräfte P_z und P_d sind nahezu gleichgross, 18500 kg. Die Zugstrebe 12 und die Druckstrebe 15 haben den grössten Widerstand zu leisten, $\pm$ 18500 kg.

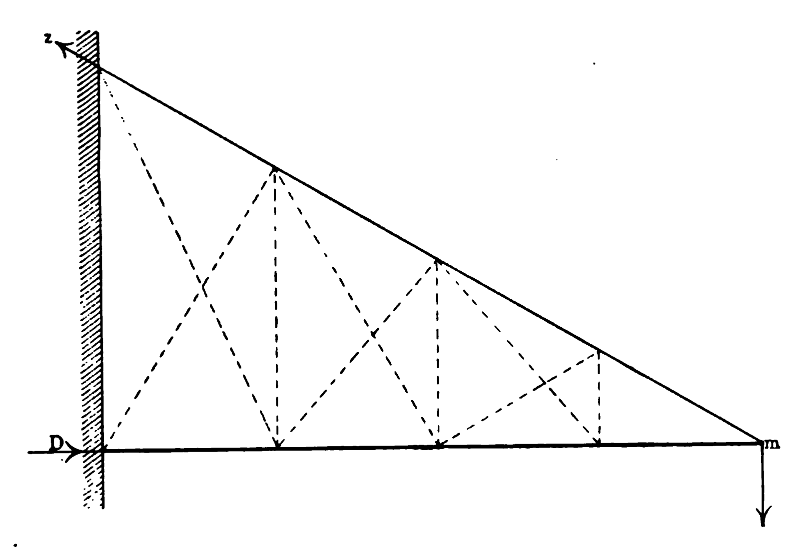
Von den Wandstreben ist 11 am meisten belastet, sie ist mit 7300 kg auf Knickung beansprucht, die Zugstrebe 13 mit 6300 kg Zugkraft. Die Richtung der Aussenkraft P_d findet man, am betreffenden Knotenpunkt angelangt, indem man a mit b verbindet und diese Richtung in die Hauptfigur überträgt.

Der in den Figuren 167 u. 168 verzeichnete Freiträger unterscheidet sich von dem vorigen hauptsächlich dadurch, dass die am freien Ende auslaufenden ersten Streben in derselben Richtung wie die andern äussern verlaufen. Wirkt dann am äussersten Punkt m die Last Q, wie Fig. 168 angedeutet, dann bilden die Kräfte Z, D und Q in m ein geschlossenes Kräftepolygon, die Spannungen in den Wandstreben sind Null, die letzteren sind entbehrlich; wir erinnern an die betr. Andeutungen der Fig. 161 u. 162. Man würde nur in dem Falle Wandverstrebungen anbringen müssen, wenn sich die Druckstrebe mD zu schwach erweist und Ausbiegungen zeigen würde. Wandstreben sind aber auch dann erforderlich, wenn, wie in Fig. 167 angenommen, an den Knotenpunkten Kräfte angreifen.

Fig. 167 ist mit 4q belastet und diese Last auf die 5 Knotenpunkte verteilt. Die Art und Weise der Verteilung deutet auf eine gleichmässig

verteilte Last hin, da die äussersten Knotenpunkte mit $q/_2$ Belastung angenommen wurden; auf eine etwaige Durchbiegung der einzelnen Druckstreben 2, 4, 8, 14 müsste hierbei neben den Druck- bezw. Knickkräften event. Rücksicht genommen werden. Von der Belastung $q/_2$ in a für die Kräfte 1, 2 und $q/_2$ ausgehend, entwickelt sich das Diagramm, wie aus den Kräftepolygonen der Fig. 167 ersichtlich, in bekannter Weise. Am Knotenpunkt b_1 angelangt, stellt man das Gleichgewicht der äusseren Kräfte Σq mit P_d und P_z her, indem man a mit b verbindet und parallel mit dieser Richtung die Kraft P_z nach b_1 überträgt.

Fig. 168.



Zur Bestimmung der Druck- und Zugkräfte fängt man beim Knotenpunkt a_1 an, überträgt in a von der gegebenen Kraftrichtung aus die Pfeile in 1 und 2 nach a_1 u. s. w.; die Knotenpunkte p und p_1 sind in beiden Figuren besonders ausgetragen. In p kann man von q, in p_1 von $q/_2$ oder P_d als Aussenkräfte ausgehen, und überträgt schliesslich die Pfeilrichtungen in die Hauptfigur 167. In p_0 geht man von einer bekannten Pfeilrichtung 6, 10 oder 7 aus, welche man zunächst in das Polygon für 6, 7, 9, 10, einträgt und dann die Richtungen wieder nach p_0 in die Streben um den Knotenpunkt selbst herum überträgt.

Der in Fig. 169 gezeichnete Träger unterscheidet sich von dem vorigen durch die oberhalb wirkende Belastung ΣQ, Schneelast o. a.; ferner in der Befestigungsart, welche für die Zapfenkräfte P_d und P_z im

Fig. 169.

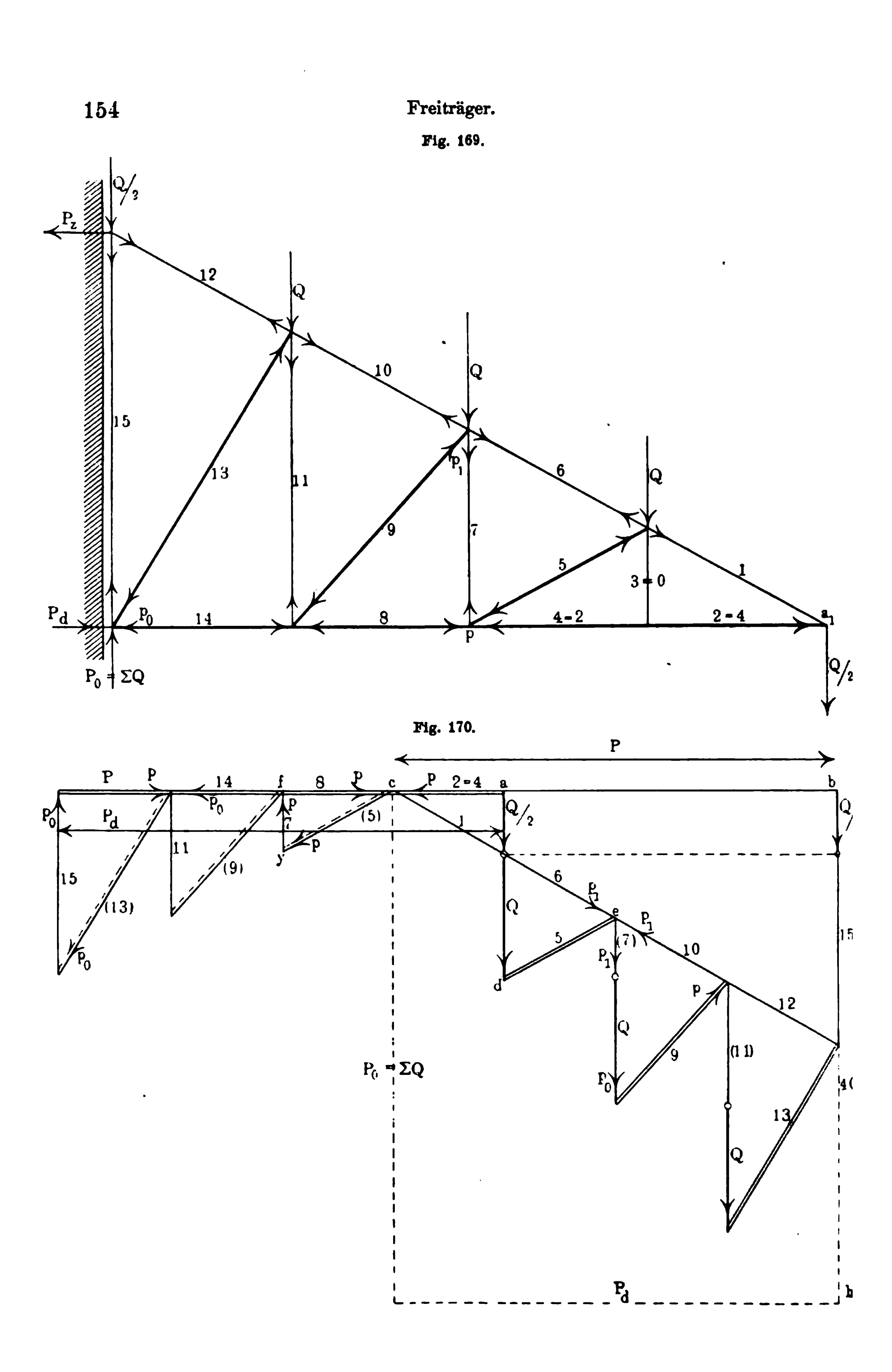


Fig. 170.

Fig. 171.

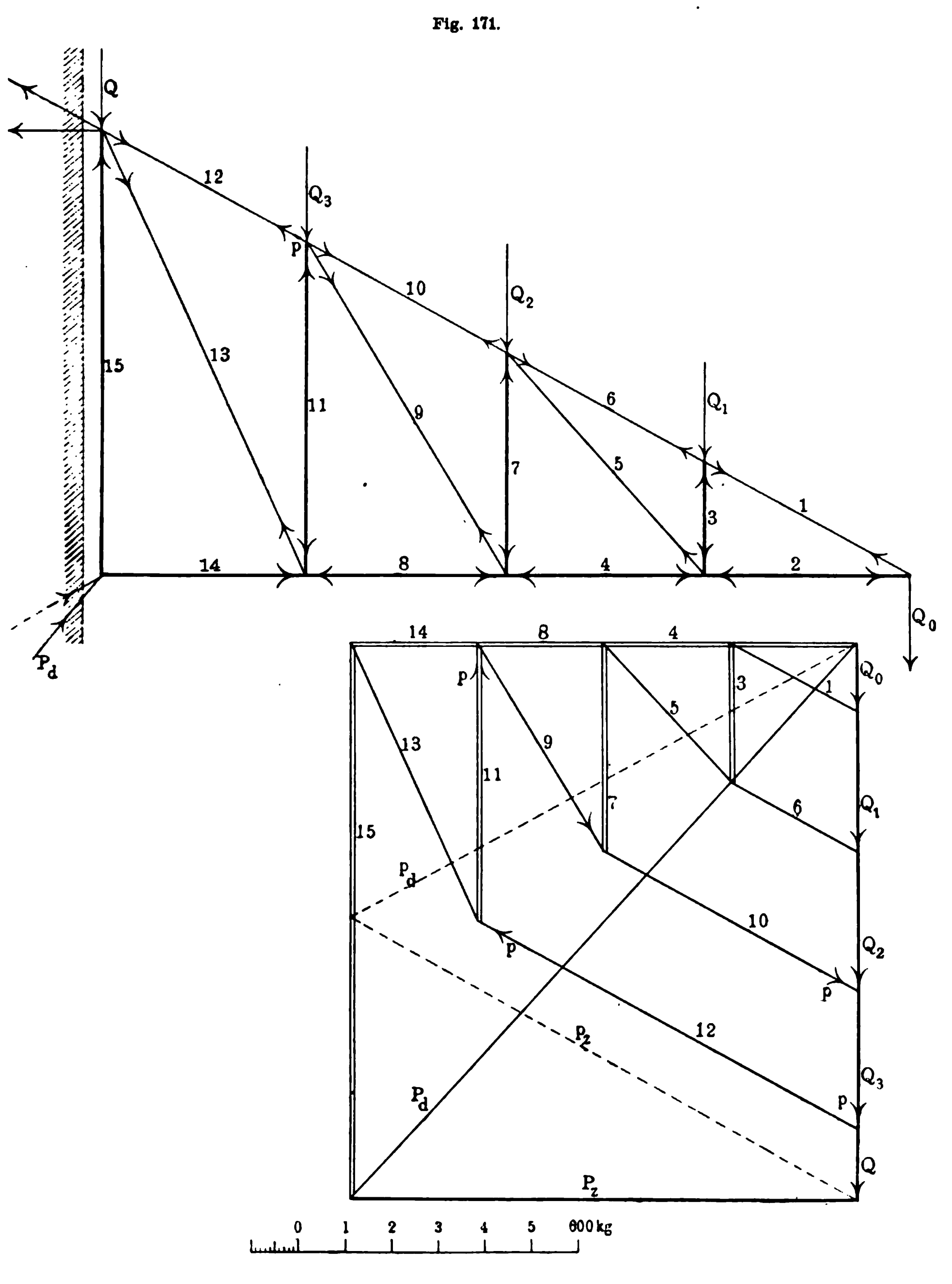
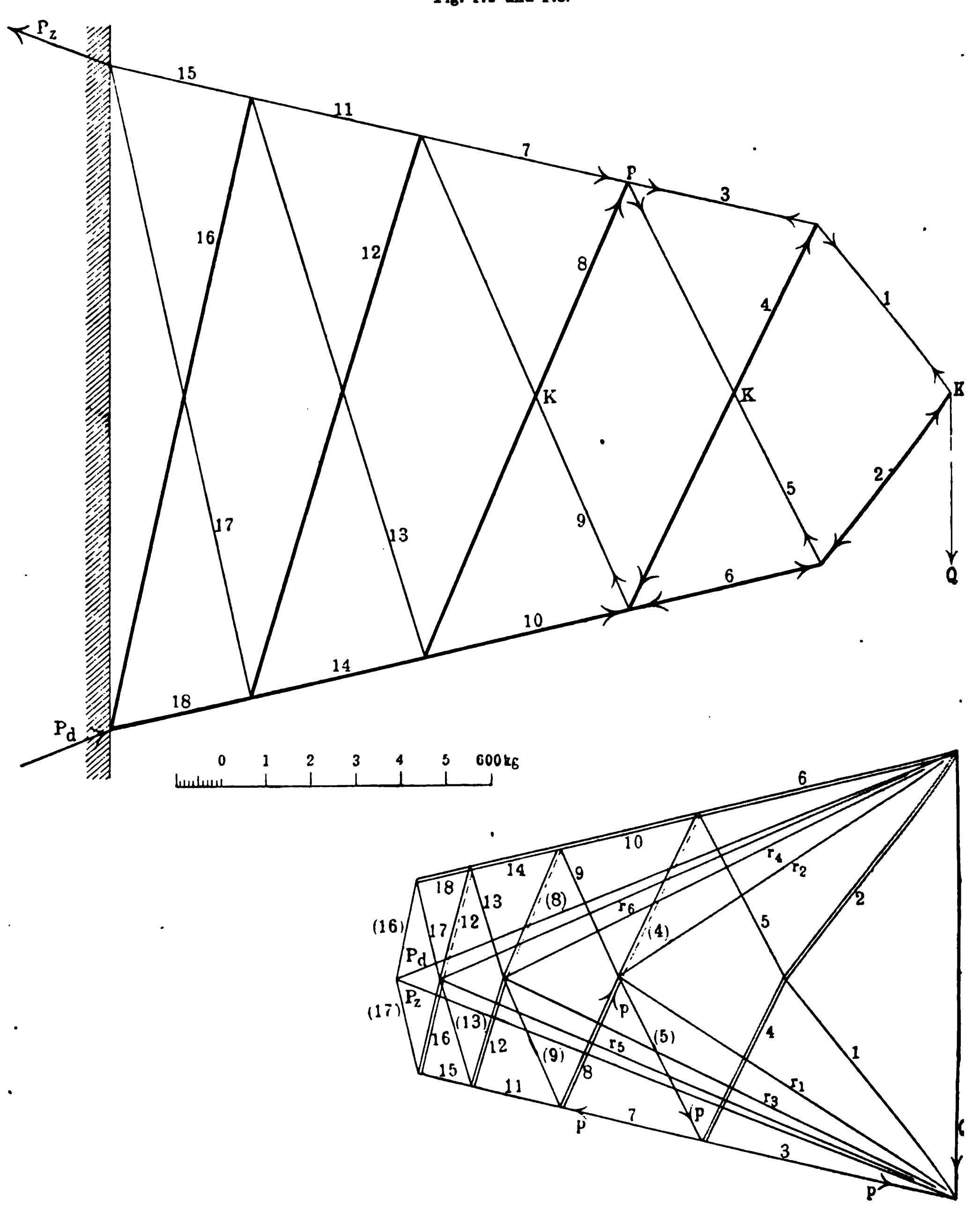

Q
12
Q_3
p
10
Q_2
15
13
11
9
6
Q_1
7
5
3
1
14
8
4
2
Q_0
P_d
14
8
4
p
3
1
Q_0
5
13
9
11
7
6
Q_1
15
P_d
10
p
Q_2
p
P_z
12
Q_3
P_d
p
Q
P_z
0 1 2 3 4 5 600 kg

Fig. 172 und 173.



horizontalen Sinne wirkend, gedacht ist. Die Konstruktion der Kräftepolygone ist in Fig. 170 auch abweichend durchgeführt. Man beginnt mit dem Knotenpunkt a_1 und trägt an a, Fig. 170, die Richtungen von 2 und 1 bis zum Dreieckschluss an. Die Strebenrichtung 3 steht auf 2 und 4 senkrecht, im Schnittpunkt derselben wirkt daher keine äussere Kraft, die Kraft in 3 wird sonach Null. Man bringt nun den Knotenpunkt der Kräfte Q, 1, 6, 5 durch das Polygon cde zum Schluss. Um das Polygon des Knotenpunktes der Kräfte in 4, 5, 7, 8 zum Schliessen zu bringen, überträgt man die Länge der Kraft in 5, die Linie de parallel nach cy, dadurch werden 7 und 8 im Polygon acfy bestimmt. Nun überträgt man 7, das ist die Länge fy, parallel nach e, und kann dadurch das Polygon der Kräfte 6, 7, 9, 10, Q ausführen; 9 wird wieder parallel nach f übertragen, um 11 und 14 zu bestimmen; 11 wird wieder an 9 und 10 angeschlossen u. s. w., bis zu den letzten Knotenpunkten zur Bestimmung der Aussenkräfte P_d und P_z. Diese letzteren bilden mit P_o, bezw. $\Sigma Q = 4Q$ das geschlossene Polygon ch. Zur Feststellung von Zug und Druck haben wir die Pfeilrichtungen der Knotenpunkte für p, p_1 und p_o angedeutet.

Das Wandgerüst, Fig. 171, hat dieselbe Belastung wie in Fig. 169 und 170 angenommen wurde, nur ist die Anordnung der Streben eine andere, aus diesem Grunde sind auch die senkrechten Stangen hier auf Druck, die schiefen Streben auch umgekehrt wie in Fig. 169 u. 170 beansprucht.

Die Befestigung des Gerüstes geschieht entweder durch die horizontale und schräge Klammer P_z und P_d, oder durch die beiden schrägen festen Stützen p_z und p_d, welche als Aussenkräfte mit ΣQ im Gleichgewicht sein müssen. Die Grössen der Zug- und Druckkräfte lassen sich aus dem beigefügten Massstab entnehmen. Die Richtungen P_d bezw. p_d müssen nach Annahme der Richtungen von P_z bezw. p_z aus dem Polygon in die Hauptfigur 171 übertragen werden.

In Fig. 172 u. 173 haben wir ein gekreuztes Strebennetz angenommen und eine Einzellast Q im Kreuzungspunkt von 1 und 2. Bei der Konstruktion der Polygone wurde vorausgesetzt, dass die Streben in den Punkten K, K . . nicht verbunden sind. Ausgehend von 1, 2, Q wird man die einzelnen Gleichgewichtsbestimmungen bis zur Vollendung des gesamten Kräftepolygons leicht verfolgen können. Laufen die Streben 3, 7, 11, 15 mit 1, und 6, 10, 14, 18 mit 2 in denselben Richtungen auf K_o zu, Fig. 172, dann verschwinden die Kräfte in dem Netzwerk, wie in Fig. 168 bereits angedeutet. Es ist natürlich nicht ausgeschlossen,

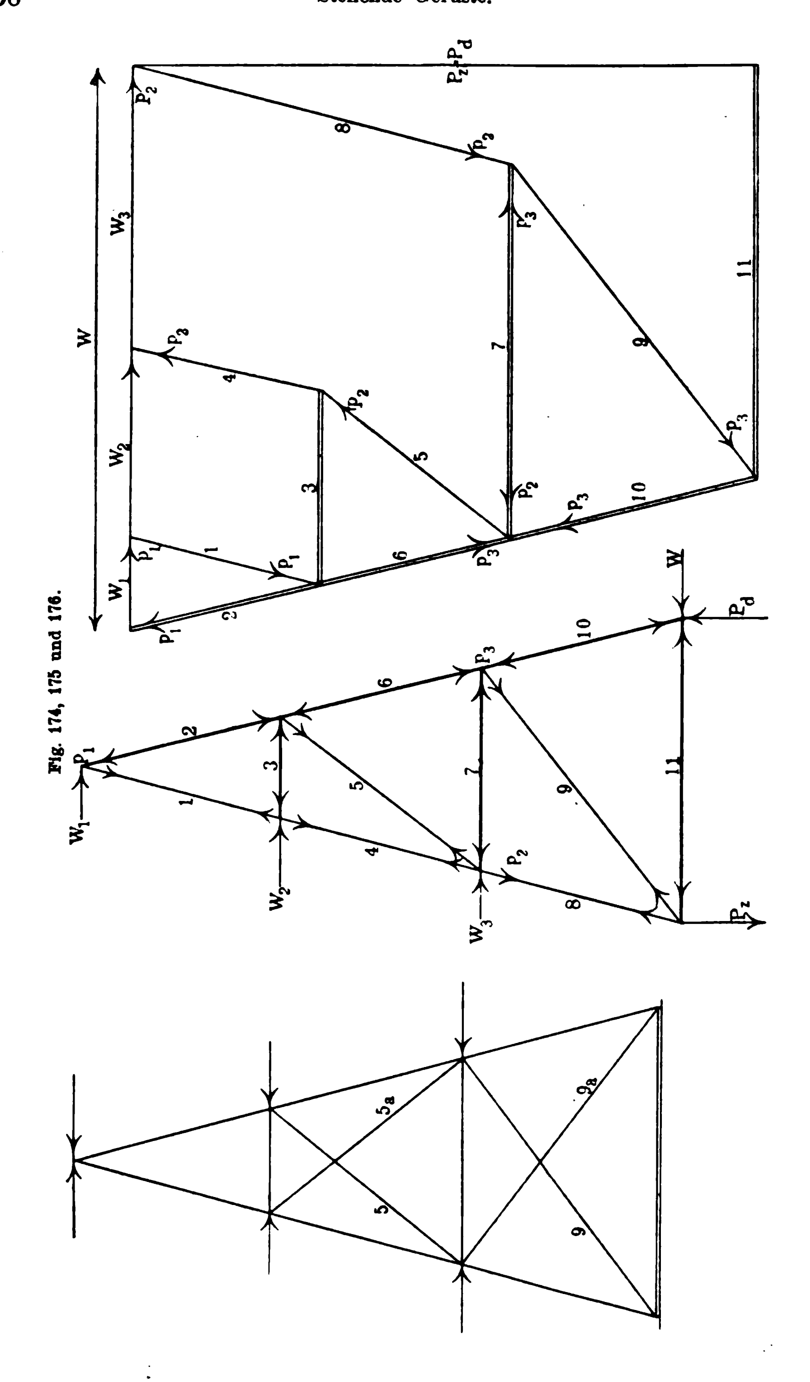
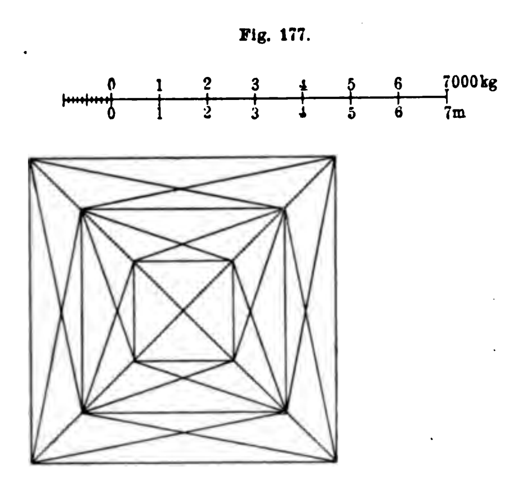


Fig. 174, 175 und 176.

um die Knicklängen der Druckstreben 4, 8, 12, 16 zu verringern, in der Ausführung Verbindungen in den Kreuzungspunkten K, K . . herzustellen.

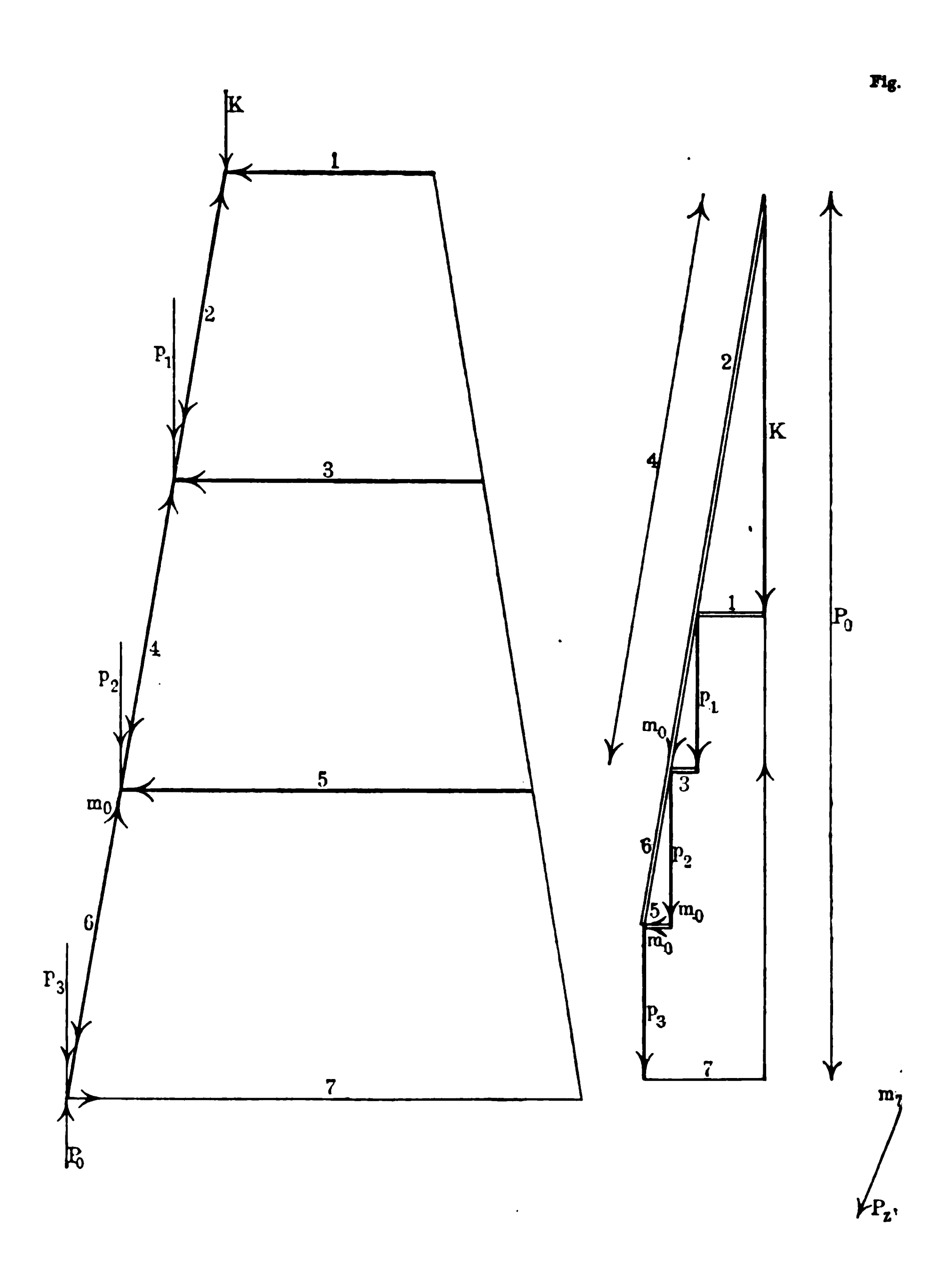
Fig. 177.



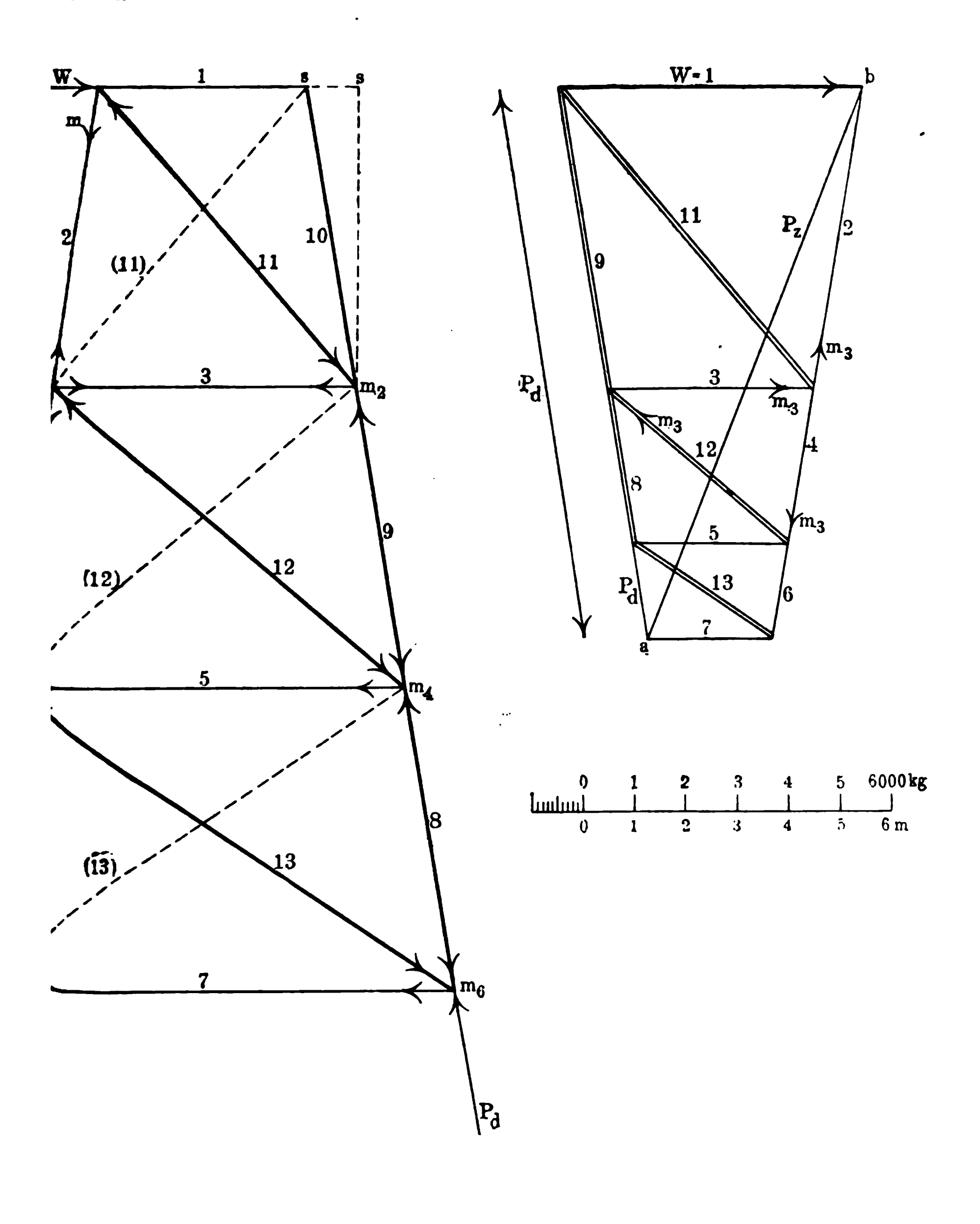
XIX. Die folgenden Figuren 174 bis 181 sind Grundformen von stehenden Gerüsten, deren analytische Berechnungen wir im I. Band. S. 263 u. f. bereits durchführten.

Das Turmgerüst, Fig. 174, ist, abgesehen vom senkrecht wirkenden Eigengewicht, auf die Seitenkräfte W (Windkräfte) beansprucht. Die Anordnung des Strebennetzwerkes ist aus dem Grundriss, Fig. 177, zu ersehen. Als Grundlage zur Konstruktion der Polygone dient Fig. 175. Wenn der Wind von der gezeichneten Seite wirkt, so kommen die Streben 3, 5, 7, 9, 11 in Betracht, von der andern Seite wirkend, müssen die Streben 5a, 9a . . . . ., Fig. 174, den Winddruck aufnehmen. Die Kreuzung der Streben ist also für alle 4 Felder (Fig. 177) durchzuführen, um jeder Windrichtung zu genügen. 3, 7 und 11 werden Wanddruckstreben; 5 und 7 können auf Zug berechnet werden. Die 4 Hauptständer 1, 4, 8 und 2, 6, 10 müssen auf Druck berechnet werden, weil die allerdings von der linken Windrichtung wirkenden Kräfte W in 1. 4, 8 Zug erzeugen, von der rechten Seite dennoch Druck erhalten. Da nun im allgemeinen die Druck- (Knickungs-) kräfte grössere Querschnitte liefern (s. Bd. II, S. 258 u. f.), so ist nur eine Kontrolle der Zugspannungen der Querschnitte erforderlich.

Die Konstruktion der Kräftepolygone dürfte aus Fig. 176 genügend zu ersehen sein. Denken wir uns die Kräfte W in Fig. 175 senkrecht


Fig.
K
1
2
P_1
3
4
P_2
m_0
5
6
P_3
7
P_0
4
2
K
1
P_0
P_1
m_0
3
6
P_2
5
m_0
m_0
P_3
7
m_z
P_z

und 181.


W
1
s
s
m
2
(11)
11
10
3
m2
9
(12)
12
5
m4
8
(13)
13
7
m6
Pd
W=1
b
11
Pz
2
9
m3
Pd
3
m3
m3
12
4
8
m3
5
Pd
13
6
7
a
0 1 2 3 4 5 6000kg
0 1 2 3 4 5 6 m

wirkend, bezw. die Achse des Gerüstes horizontal und die innern Streben entgegengesetzt gelagert, so würden wir nahezu auf das Beispiel in Fig. 169 zurückgreifen können.

Die Figuren 178 bis 181 stellen zwei Gerüste dar, welche, jedes für sich allein betrachtet, entweder nur senkrecht belastet ist, wie Fig. 178, 179, oder nur durch eine Seitenkraft W oberhalb, wie Fig. 180, 181. Denkt man aber beide Gerüste in ein einziges vereinigt, so ist dieses sowohl senkrecht als seitlich belastet; es kann dieser Fall bei Seilgerüsten vorkommen, ein vollkommen einseitiger Druck würde, abgesehen vom Eigengewicht, eintreten, wenn das Seil reisst. Die Kräfte p vertreten das Eigengewicht. Wirkt W von der andern Seite auf das Gerüst ein, so kommen die Wandstreben (11), (12), (13), Fig. 180, u. s. w. in Betracht. Man beginnt in Fig. 180, 181, ausgehend von der gegebenen Kraft W, mit dem Knotenpunkt der Kräfte W, 2 und 11. Die Streben 10 und 1 kommen nicht in Betracht, 10 erst dann, wenn W von der andern Seite wirken würde. Da W mit 11 und 2 bereits ein geschlossenes Kräftedreieck bildet, so hat 1 keiner Kraft Widerstand zu leisten, daher ist die Kraft in 10 Null und kann 10 ebensowohl senkrecht stehend betrachtet werden, wie dies durch sm_2 in Fig. 180 angedeutet ist. Man geht dann zum Knotenpunkt m_2, weiter zu m_3 u. s. w. über.

Nimmt man P_d in derselben Richtung wie 8 an und verbindet, Fig. 181, a mit b, dann ist $ab = P_z$; die Richtung dieser Fundamentkraft wird in die Hauptfigur übertragen. Es sind dann sowohl W, P_d und P_z die Aussenkräfte, als die Kräfte 6, 7 und P_z im Gleichgewicht, weil sie je ein Kräftedreieck bilden.

In Fig. 178 u. 179 geht man von K, 1 und 2 aus und schliesst hieran den Knotenpunkt für 2, 3, 4 und p_1 u. s. w. P_0 muss schliesslich der Summe der vertikalen Kräfte gleich werden.

Wir haben in diesen Figuren K = 8000 und $p_1 = p_2 = p_3 =$ 3000 kg angenommen. Die Verteilung der Kräfte in den Streben ist aus der folgenden Zusammenstellung zu entnehmen.

Kräfteplan des Gerüstes Fig. 178 und 179.

Bezeichn.	Äuss. Kr.	Zug	Druck	Bezeichn.	Äuss. Kr.	Zug	Druck
Gegeben K	8000	—	—	6	—	—	14100
1	—	—	1250	7	—	2300	—
2	—	—	8100	P_0	17000	—	—
3	—	—	500	p_1	3000	—	—
4	—	—	11120	p_2	3000	—	—
5	—	—	500	p_3	3000	—	—

Die Strebenspannungen und die äusseren Kräfte in Fig. 180 u. 181, wenn W = 6000 kg angenommen wird, sind in folgender Tabelle enthalten:

Kräfteplan des Gerüstes Fig. 180 und 181.

Bezeichn.	Äuss. Kr.	Zug	Druck	Bezeichn.	Äuss. Kr.	Zug	Druck
Gegeb. W	6000	—	(6000)	8	—	—	—
1	—	—	—	9	—	—	9000
2	—	5900	—	10	—	—	6000
3	—	4000	—	11	—	—	—
4	—	9100	—	12	—	—	7700
5	—	3000	—	13	—	—	4600
6	—	10900	—	P_z	11500	—	3300
7	—	2400	—	P_d	10900	—	—

Tritt nun der Fall ein, dass dasselbe Gerüst gleichzeitig von W und den senkrechten Kräften K, p_1, p_2, p_3 belastet ist, dann haben wir nur nötig, wie in der folgenden Übersicht geschehen ist, die Druck- und Zugkräfte der beiden vorigen Tabellen in geeigneter Weise, d. h. mit Rücksicht auf ihre Vorzeichen [Zug (+), Druck (—)] zu vereinigen:

Kräfteplan eines gleichzeitig senkrecht und seitlich belasteten Gerüstes Fig. 178, 179, 180 und 181.

Bezeichnung	Äussere Kraft	Zug	Druck	Bemerkungen
Gegeben W =	6000	—	—	Es ist angenommen,
„ K =	8000	—	—	dass W auf beiden
„ $p_1 = p_2 = p_3 =$	3000	—	—	Seiten wirken kann.
1	—	—	7250	(6000 + 1250)
2, 10	—	—	2200	
3	—	3500	—	(4000 — 500)
4, 9	—	—	17120	(11120 + 6000)
5	—	2500	—	
6, 8	—	—	23100	
7	—	4700	—	
11 (11)	—	—	7700	
12 (12)	—	—	4600	
13 (13)	—	—	3300	

XX. Ein festes oder in ab drehbares Ausladegerüst ist in Fig. 182 dargestellt. Das feste Gerüst, bestehend aus den Streben 5, 6, 7, kann event. in pyramidaler Form ausgeführt werden. Wenn die Fundamentbefestigung P_z in Richtung der Stange 6 liegt, dann würde

die Druckstange 7 in Wegfall kommen und P_d wäre parallel der Richtung m n, die sich aus den Polygonen ergiebt, in die Hauptfigur zu übertragen.

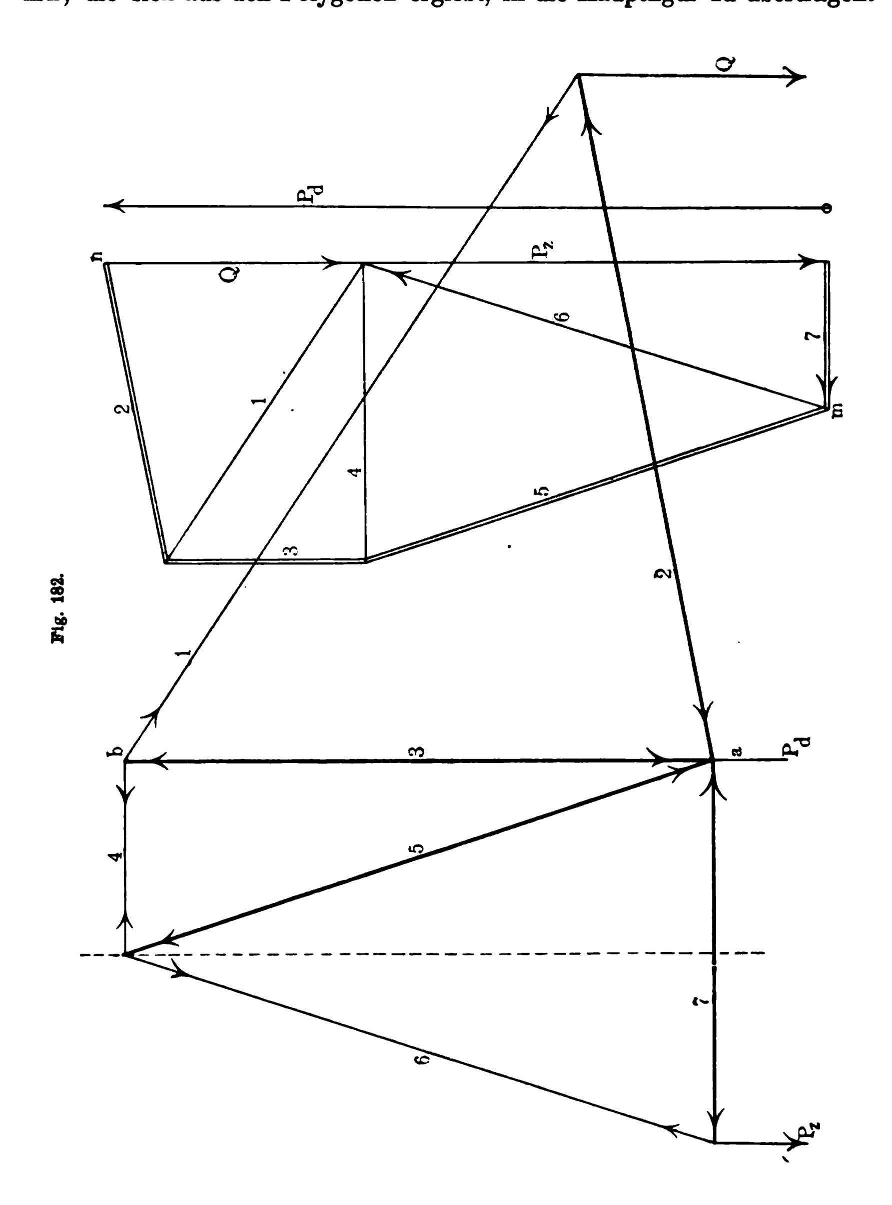
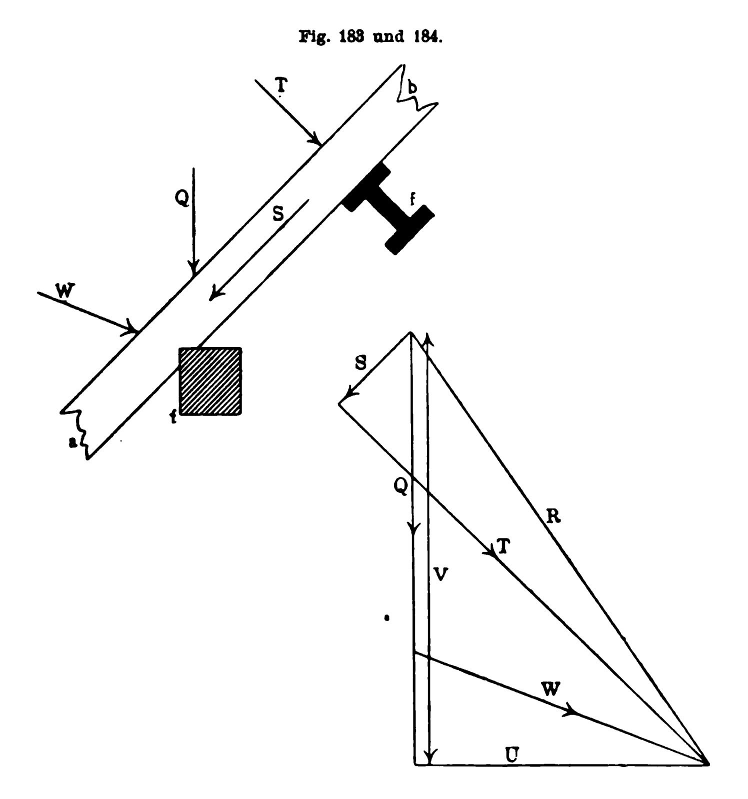


Fig. 182.

XXI. Eine hervorragende Anwendung findet das Kräftepolygon bei der Ermittelung der Spannungen in Dachstühlen, Dachbindern. Wir haben in den folgenden Figuren eine Reihe von verschieden belasteten Dachkonstruktionen zusammengestellt. Einige der Strebenberechnungen wurden bereits im I. Band auf analytischem Wege durchgeführt. Wir werden weiter unten während der Anwendung des Seilpolygones noch auf weitere Beispiele zurückkommen. Allgemeines über Dächer, auch Andeutungen über Winddruck, erwähnten wir bereits Seite 238, 247, Band I. Die praktischen Resultate über Belastungen, Neigung der Dächer, haben wir im Anhang angeschlossen. —

Fig. 183 und 184.



Die vorstehende Fig. 183 stellt Einzelbelastungen dar. Auf einen Dachsparren wirkt der Winddruck W und die senkrechte Belastung Q. beide bilden die Resultante R, Fig. 184. Zerlegt man diese in eine in Richtung der Sparren und eine senkrecht auf diese wirkende Kraft, so beansprucht S den Sparren auf Knickung, und wirkt bis zum Auflager des

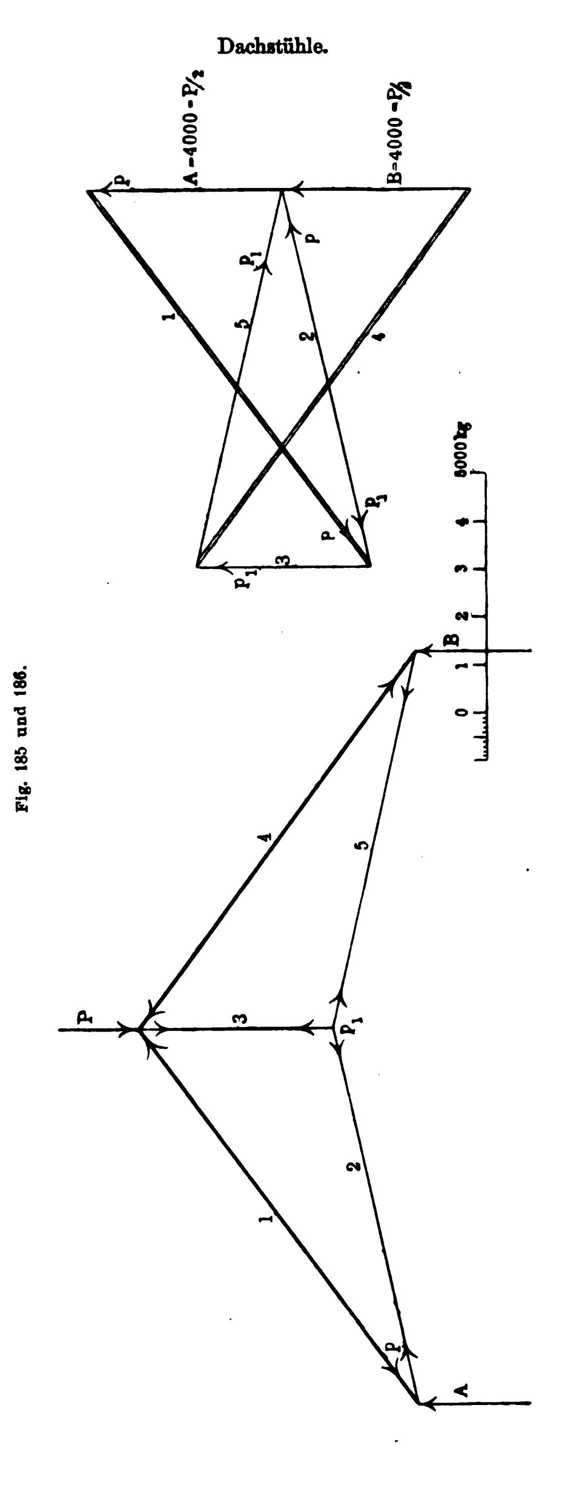
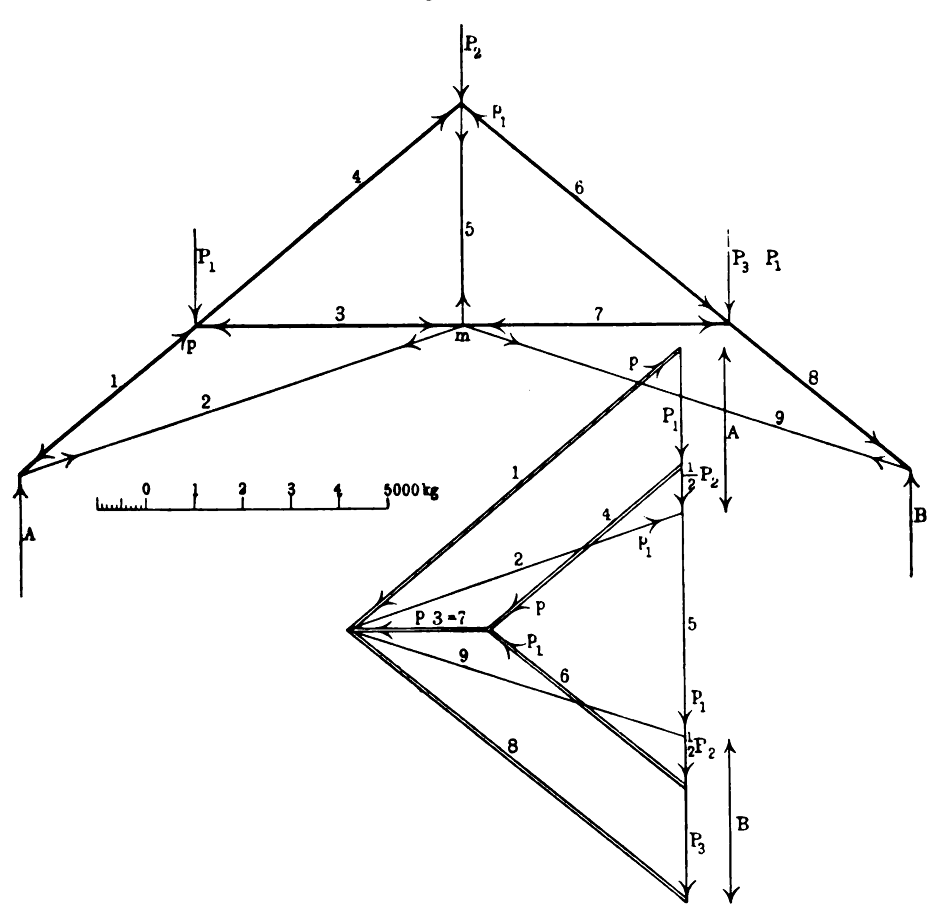


Fig. 185 und 186.

Sparrens. T hingegen beansprucht den Sparren oder die denselben unterstützende hölzerne oder eiserne Pfette f auf Biegung. Die Pfette übernimmt eine etwaige Durchbiegung des Sparrens; S beansprucht die Pfette gleichzeitig auf Abscherung, und ist für f eine Schubkraft. Zerlegt man

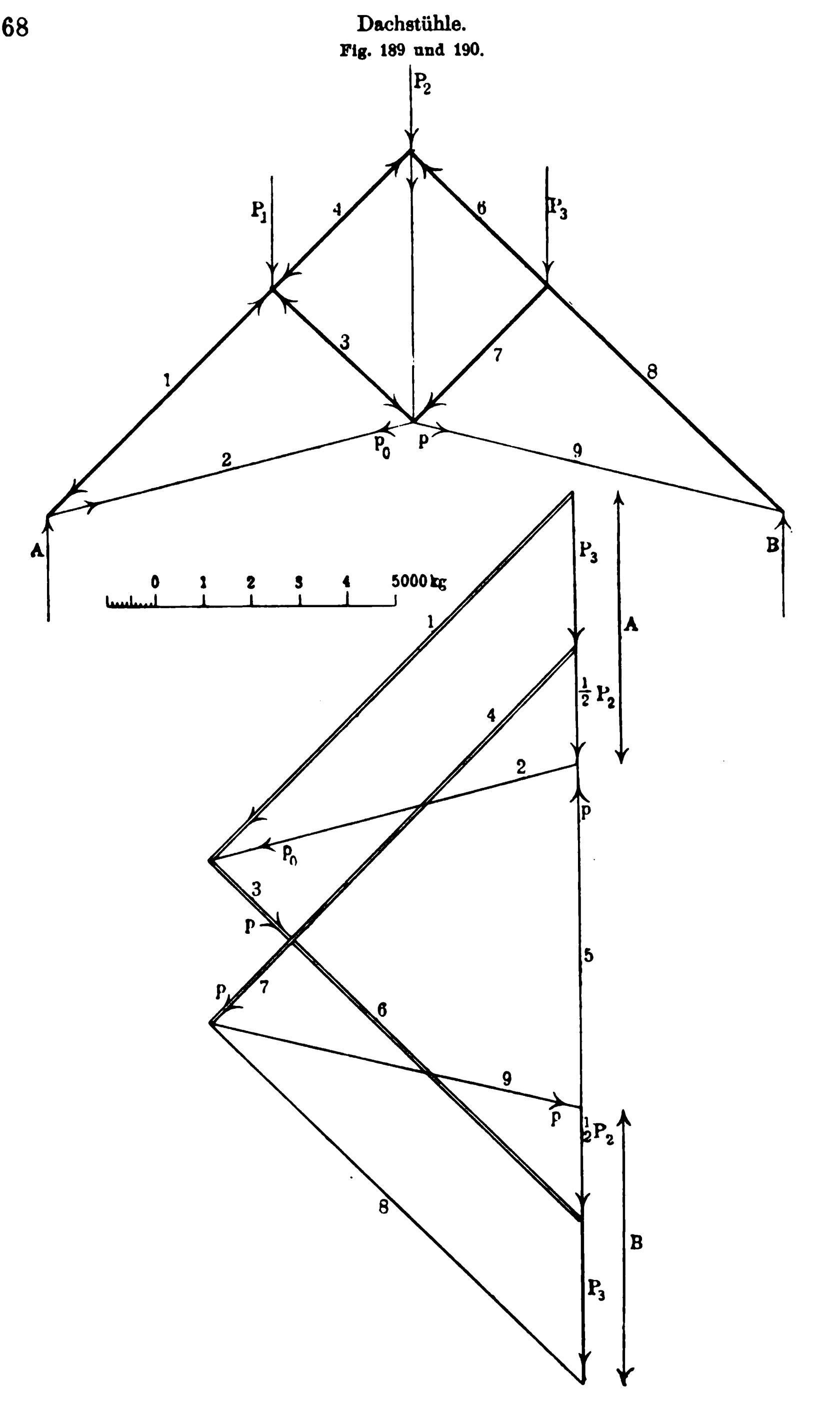
Fig. 187 und 188.

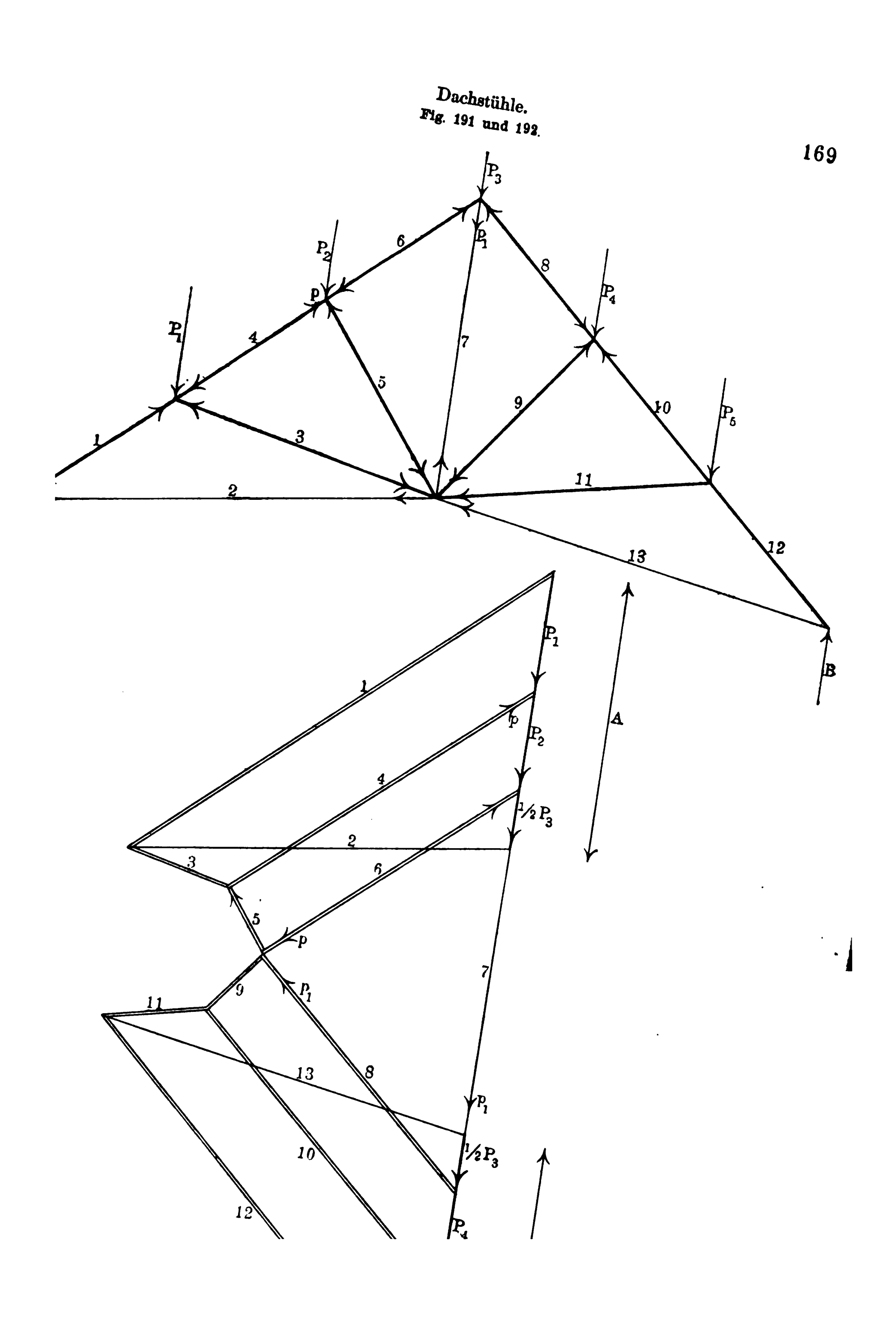


R in V und U, dann ist V die Vertikalkraft, U die horizontale Seitenkraft, auf welche die Sparren bezw. die Pfette beansprucht ist.

Die Figuren 185 bis 192 sind Dachstühle mit freien und ein oder mehrfach verstrebten Dachsparren. Wir berechnen die gesamte Belastung der Dachfläche, verteilen sie auf die einzelnen, meist in 1 bis 4 m Entfernung liegenden Bindern und auf deren Knotenpunkte.

Fig. 189 und 190.




P_3
p_1
P_2
p
6
8
P_4
P_1
4
7
5
9
10
P_5
1
3
11
2
13
12
B
A
P_1
1
p
P_2
4
$^1/_2 P_3$
2
3
6
5
p
7
9
p_1
11
13
8
p_1
$^1/_2 P_3$
10
12
P_4

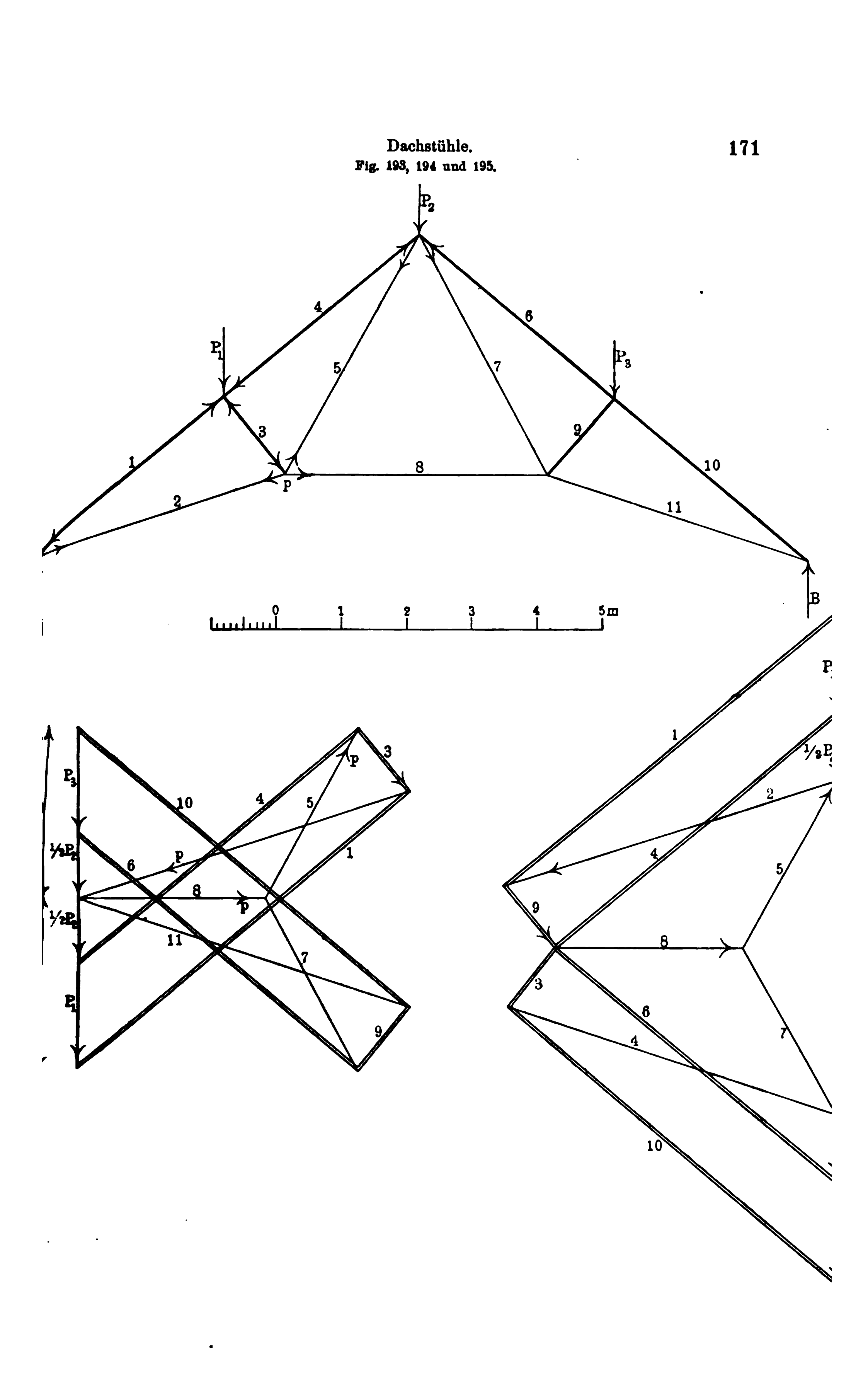
Die beiden Auflagerdrücke A und B sind bei allen 4 Dachkonstruktionen gleich gross, da die Lasten regelmässig (symmetrisch) verteilt sind. Bei der Konstruktion der Kräftepolygone geht man am zweckmässigsten immer von den Strebespannungen in den Auflagern aus, reiht Knotenpunkt an Knotenpunkt und verwendet die bekannten Aussenkräfte A, B, P_1 P_2 .. zur Bestimmung von Zug und Druck. In denjenigen Knotenpunkten, in welchen keine Aussenkräfte vorhanden sind, geht man, um Zug und Druck festzustellen, von bekannten Spannungen solcher Streben aus, welche mit dem betreffenden Knotenpunkt im Zusammenhang stehen. Im Knotenpunkt p, Fig. 187 u. 189 (in der Hauptfigur muss die Zahl 5 in der senkrechten Zugstange ergänzt werden), ebenso in m, Fig. 187 und p_1 in Fig. 185, sind keine Aussenkräfte vorhanden, die Bestimmung von Druck und Zug in den diesen Knoten kreuzenden Streben könnte hier aber füglich entbehrt werden, weil die Pfeilrichtungen, also Zug und Druck, sich bereits aus den anschliessenden Knotenpunkten ergeben. Will man beispielsweise für p, Fig. 189, dennoch eine Bestimmung vornehmen, so trägt man, event. von der Strebe 2 (Zug) ausgehend, den betreffenden Pfeil p_0 in die Polygonseite 2, Fig. 190, ein und schliesst die Pfeilrichtungen durch 3, 7, 9 und 5, überträgt diese dann schliesslich nach p in die Streben um den Knotenpunkt.

Um vollkommen sicher zu sein, dass ein Bauwerk, ein Dachstuhl, eine Brücke allen Belastungsanforderungen entspricht, so ist es nötig, alle möglichen Belastungen in Rücksicht zu ziehen und die Spannungen bei allen Belastungsarten zu untersuchen. Eine solche Untersuchung haben wir auch bei dem einfachen Polonceaubinder, Fig. 193 bis 203, durchgeführt.

Der Träger Fig. 193 ist symmetrisch belastet mit $P_1 = P_3$ und P_2 kg; P_1 und P_3 wurden hier kleiner als P_2 angenommen. In den Fig. 194 u. 195 haben wir zwei Lösungen zur Bestimmung der Spannungen durch die Kräftepolygone aufgezeichnet. Diese Figuren bedürfen wohl keiner weiteren Erörterung.

In den Fig. 196 bis 198 ist der Dachstuhl einseitig belastet gedacht, und zwar sind, Fig. 196, die rechten Knotenpunkte nur mit dem Eigengewicht, die linken noch mit einer zufälligen Last belastet, z. B. Schneelast. In Fig. 196 nahmen wir $P_1 = P_2 = P_3$ und $P_4 = P_5 = P_6$ kg, und zwar $P_1 = 2\,P_6$ u. s. w. an. In Fig. 198 ist die rechte Seite unbelastet, die linke mit $P_1 = P_2 = P_3$ kg belastet. In beiden

Fig. 193, 194 und 195.



Fällen sind die Auflager A und B ungleich gross; vorläufig stellen wir sie durch Rechnung fest (s. Band I, S. 111), weiter unten graphostatisch.

Nach den in Fig. 196 eingetragenen Längenbezeichnungen ist die Auflagerreaktionsgleichung

$$A \cdot 4a = P_1\,4a + P_2\,3a + P_3\,2a + P_4\,2a + P_5\,a,$$

woraus

$$4\,A = 4\,P_1 + 3\,P_2 + 2\,P_3 + 2\,P_1 + P_5,$$

setzt man nun

$$P_1 = P_2 = P_3 \text{ und } P_4 = P_5$$

ein, so folgt $4\,A = 9\,P_1 + 3\,P_4$.

In Fig. 197 nahmen wir ferner $P_1 = 2\,P_4$ an, erhalten sonach

$$A = \frac{21}{4}\,P_4 = 5^1/_4\,P_4 = 5^1/_4\,P_3 = 5^1/_4\,P_6 \text{ u. s. w.}$$

Zur Bestimmung von A in Fig. 198 dient uns die Gleichung

$$A\,4a = P_1\,4a + P_2\,3a + P_3\,2a, \text{ woraus } P_1 = P_2 = P_3 \text{ eingeführt,}$$
$$A = {}^9/_4\,P_1 = {}^9/_4\,P_2 \ldots \text{folgt.}$$

Die Konstruktion der Kräftepolygone, Fig. 197 u. 199, ausgehend von A und B, wird wie oben durchgeführt.

Denselben Binder haben wir in Fig. 200 u. 202 durch Seitendruck (Winddruck), senkrecht auf den Sparren wirkend, belastet. Die Spannweite des Binders sei so gross, dass man genötigt ist, das eine Auflager als bewegliches, als Rollenlager auszuführen, auf der andern Seite ist der Dachstuhl mit dem Mauerwerk fest verbunden. Man rechnet die Ausdehnung durch die Wärme gewöhnlich 0,0006 der Länge; bei 20 m Spannweite würde sich ein Träger um $20 \cdot 0{,}0006 = 0{,}012$ m = 12 mm verlängern, hierzu tritt noch die Durchbiegung; auf beides muss namentlich bei grösseren Brückenträgern Rücksicht genommen werden.

Auf der beweglichen Seite des Dachstuhles, also im Rollenlager, kann nur ein senkrechter Auflagerdruck eintreten, weil der Dachstuhl hier lose aufliegt, und in allen Lagen und bei allen seitlichen Kräftewirkungen, die oberhalb der Horizontalen fallen, einen senkrechten Druck nach unten ausübt. Da, wo der Dachstuhl starr mit der Unterlage in Verbindung steht, ist der Auflagedruck von der Richtung der Seitenkraft abhängig. Der Angriffspunkt der Mittelkraft der Windkräfte ΣW, welche auf den Sparren symmetrisch verteilt sind, liegt in der Mitte des Sparrens, und schneidet den rechtwinkeligen Auflagedruck in m. Verbindet

Fig. 196 und 197.

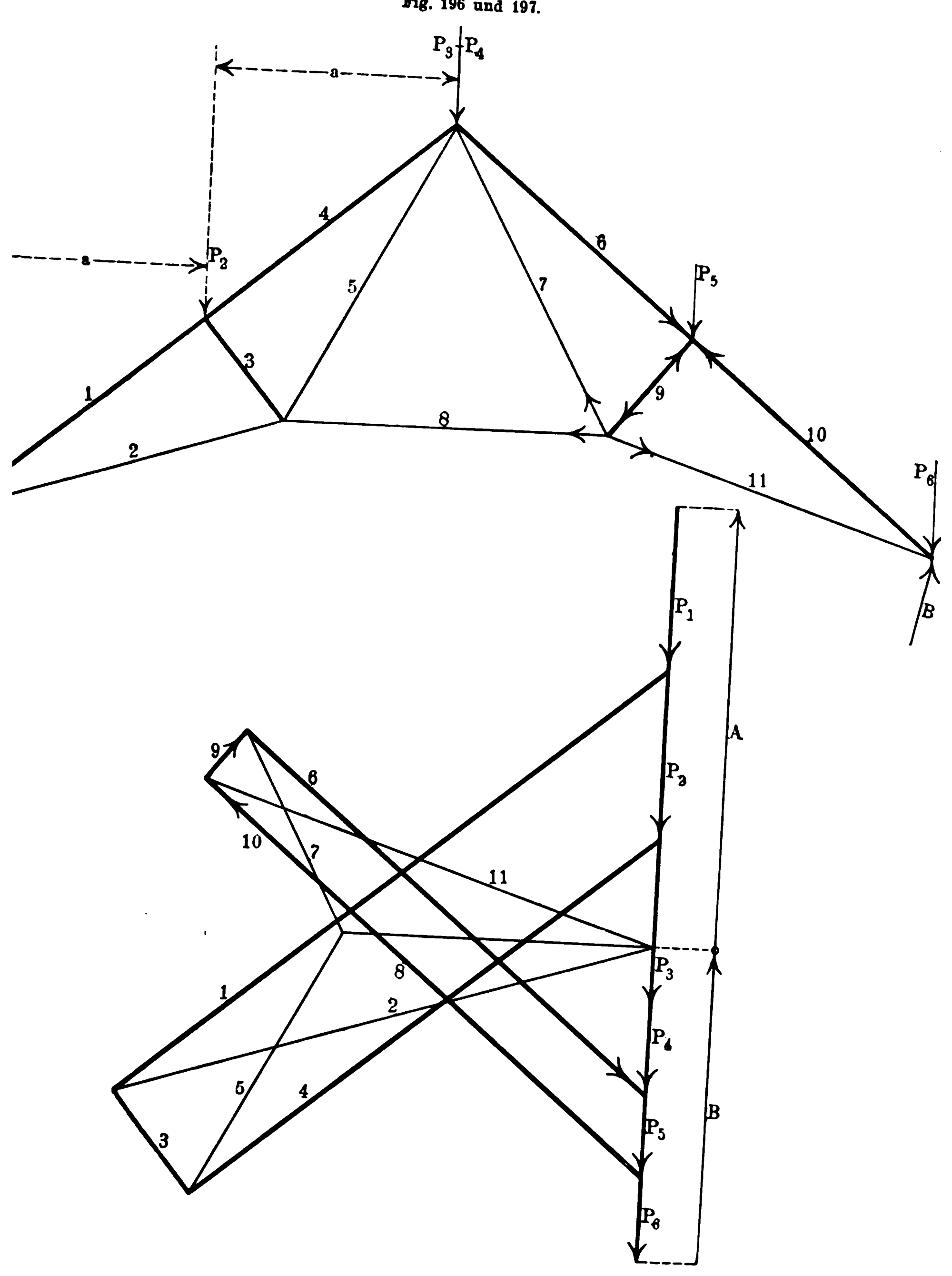
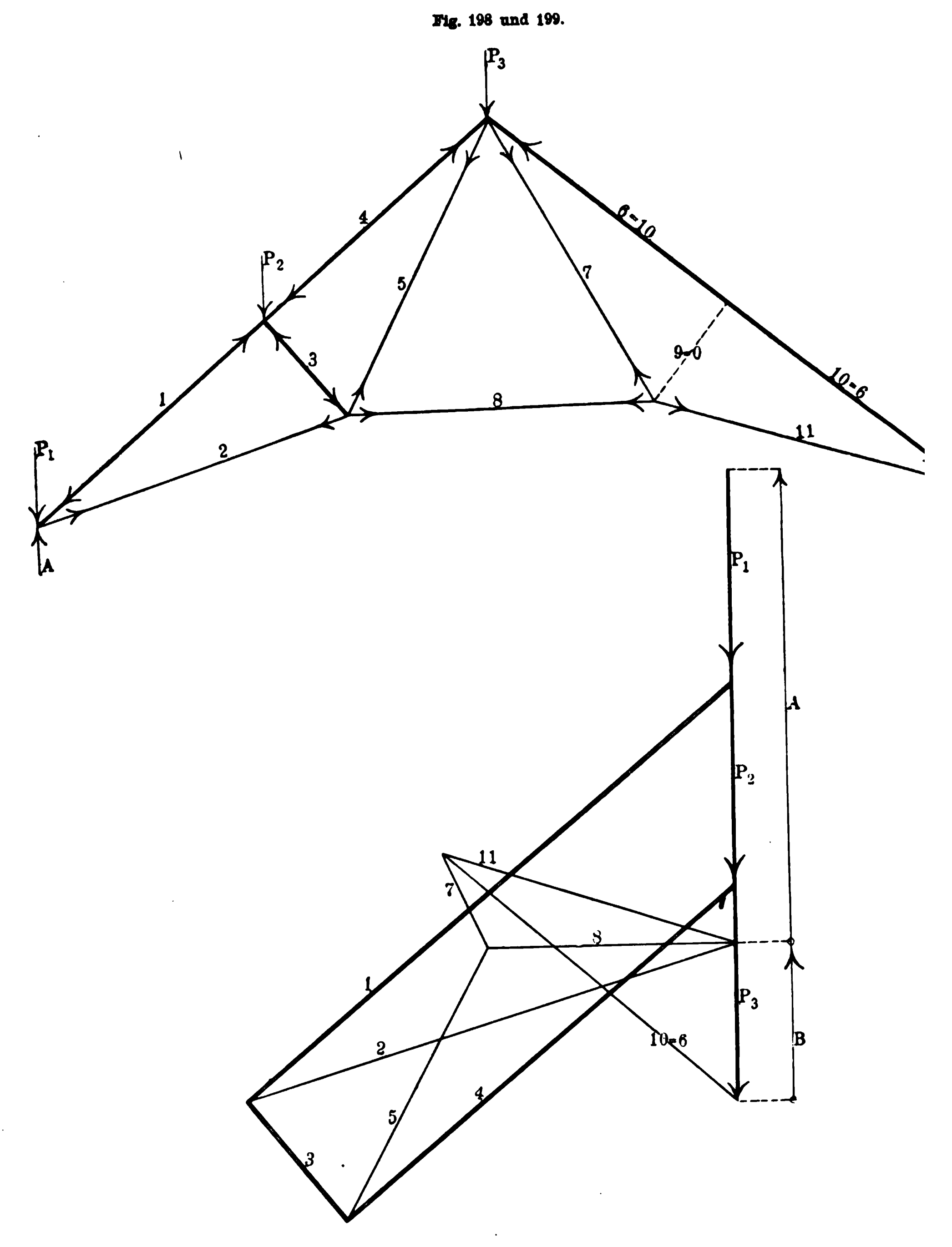


Fig. 198 und 199.



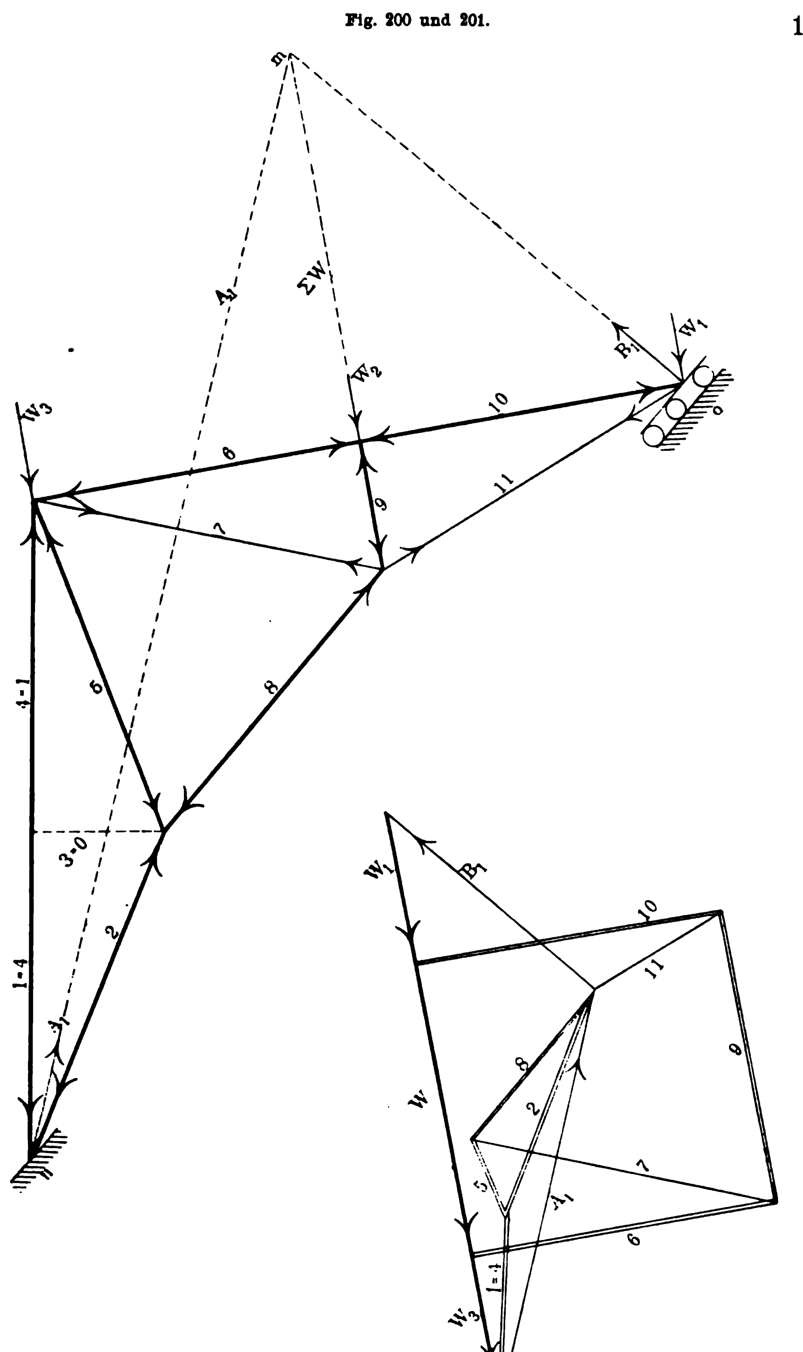
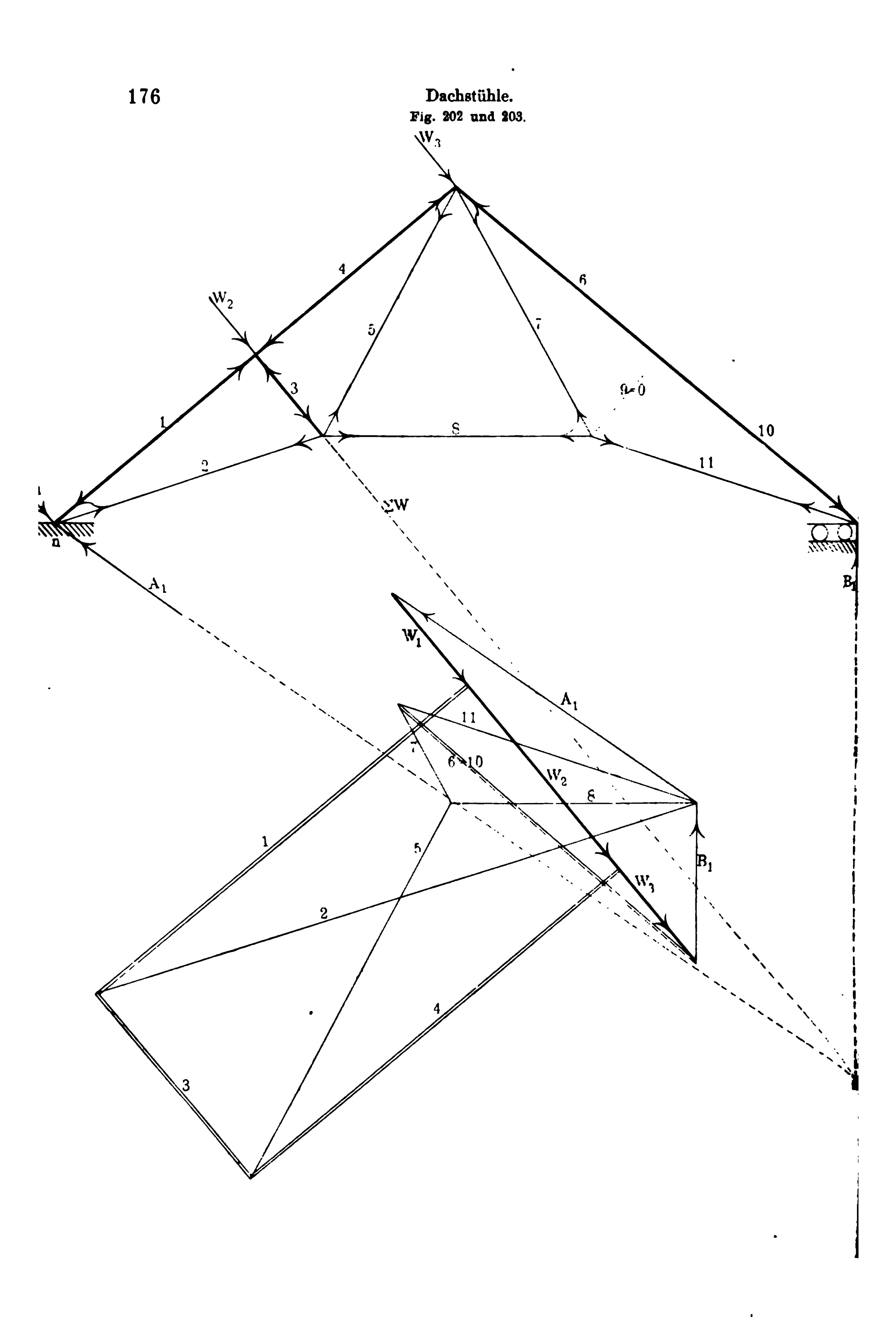

m
ΣW
W1
W2
W3
B1
A1
W
o
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
1-4
3-0

Fig. 202 und 203.



man m mit n, so stellt mn die Richtung des anderen Auflagerdruckes dar.

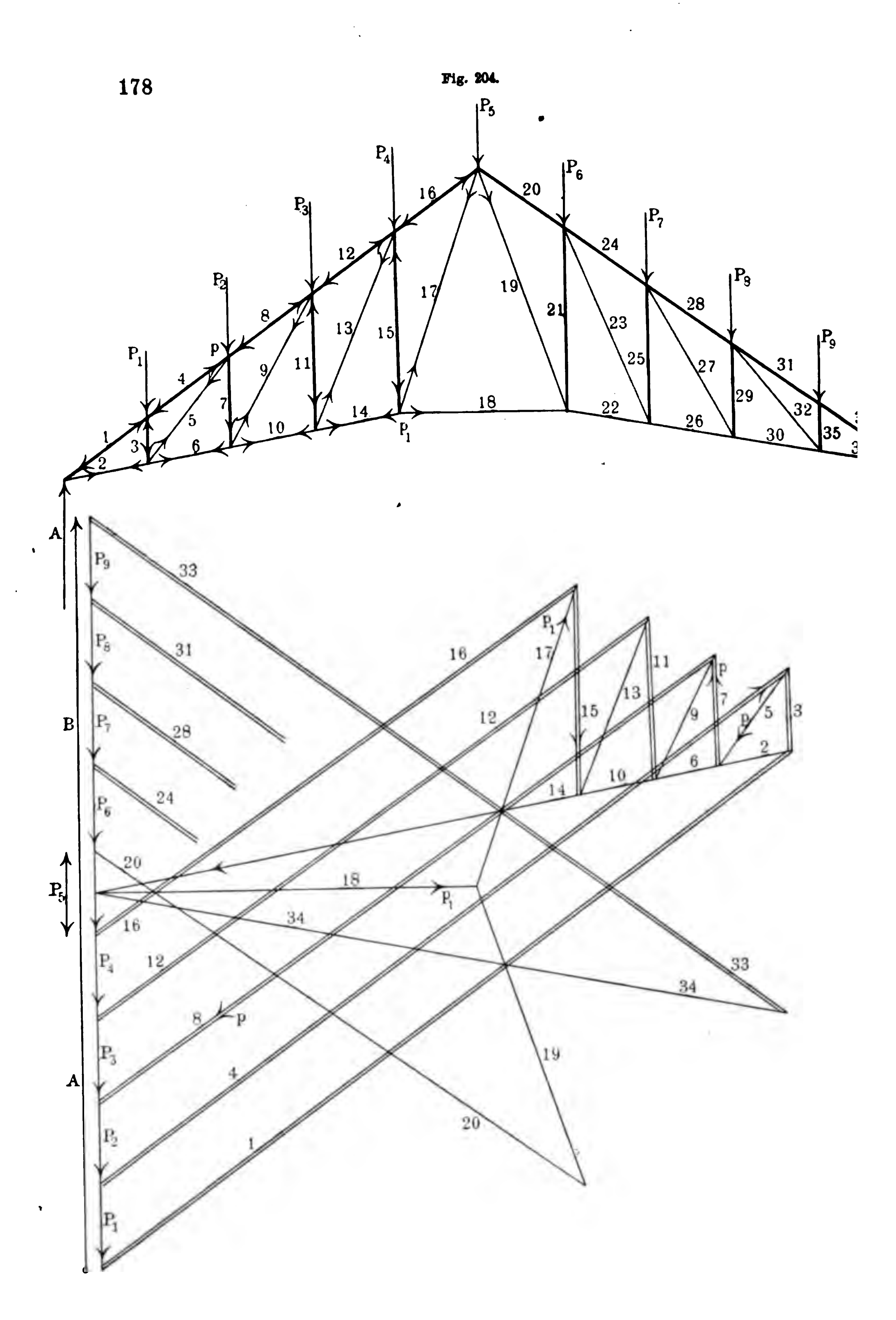
In Fig. 203 haben wir die Spannungen konstruiert, wenn der Wind von links, in Fig. 201, wenn er von rechts einwirkt.

In beiden Fällen tragen wir die Grössen der Kräfte, $\Sigma W = W_1 + W_2 + W_3$, auf, und ziehen Parallelen zu den Richtungen mn und mo, wir erhalten dadurch die Grössen A_1 und B_1 durch das geschlossene Kräftedreieck, indem sich die Kräfte A_1, ΣW und B_1 in m das Gleichgewicht halten müssen. Nun verfahren wir wie oben und stellen das Gleichgewicht für jeden Knotenpunkt her. Zunächst beginnt man mit dem Knotenpunkt n für die Kräfte A_1, W_1, 1 und 2 in Fig. 202, und für B_1, W_1, 10 und 11 im Knotenpunkt 0, Fig. 200; hieran schliesst man das Polygon W_2, 1, 3, 4, Fig. 202, und W_2, 6, 10, 9 in Fig. 200 u. s. w. Man findet dann schliesslich, dass 9 in Fig. 203 und 3 in Fig. 200 spannungslos sind. Zug und Druck bestimmen wir wieder, ausgehend von den äusseren Kräften, wie oben. Man stellt dann schliesslich die sämtlichen Zug- und Druckspannungen, wie wir es mehrfach oben ausgeführt haben, tabellarisch zusammen für jeden einzelnen Belastungsfall und summiert aus diesen dann endgültig die Spannungstabelle, nach welcher die Berechnung der Strebenquerschnitte vorgenommen wird. Es ist wohl kaum zu bemerken, dass die Längen- und Belastungsmassstäbe in allen Figuren dieselben sein müssen, was wir hier bei den zerstreut liegenden Figuren nicht durchführen konnten. Wesentlich kommt es hier in Betracht, die Spannungen bei voller und gleichzeitig einwirkender Windbelastung zu addieren; ebenso bei Eigengewichts- und einseitig voller und gleichzeitiger Windbelastung.

Den Dachstuhl, Fig. 204, haben wir in den Knotenpunkten mit $P_1 = P_2 = \ldots . P_9$ gleich grossen Kräften belastet. Die Konstruktion der Kräftepolygone ist aus der Hilfsfigur zu ersehen.

In Fig. 205 haben wir einen ähnlichen Dachstuhl gezeichnet, den sogen. englischen Dachstuhl, dessen Strebenrichtungen entgegengesetzt der in Fig. 204 liegen (siehe Band I, Seite 258, analytische Berechnung). Die Spannweite ist 15,2 m, die Firsthöhe 4 m, die einzelnen Binder liegen in 4 m Entfernung. Auf einen Quadratmeter der Grundfläche haben wir 120 kg gerechnet; für einen Binder folgt demnach $15{,}2 \cdot 4 \cdot 120 \backsim 7200$ kg Belastung; da nun 8 Felder vorhanden sind, so ist ein Feld mit $\frac{7200}{8} = 900$ kg belastet, welche wir

Fig. 204.



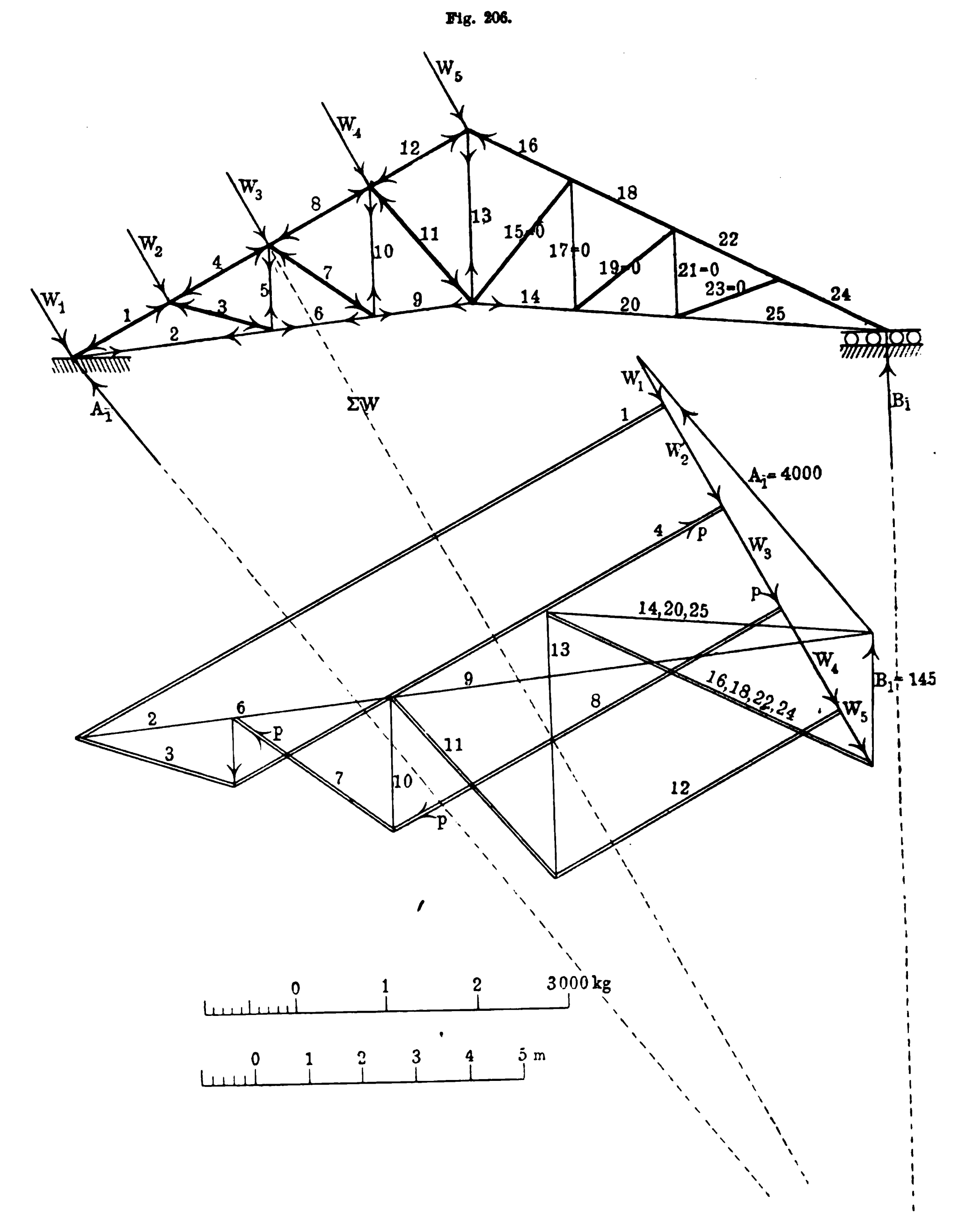
P1
P2
P3
P4
P5
P6
P7
P8
P9
p
A
B
A
P5
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35

in den Knotenpunkten derart verteilt haben, dass auf $P_1 = P_9 = 450$ kg kommen und die übrigen Knotenpunkte mit $P_2 = P_3 = \dots . P_8$ mit

Fig. 205.

900 kg belastet sind. Die Konstruktion der Kräftepolygone ist wieder aus der Nebenfigur zu ersehen, ebenso sind wie oben die Zug- und

Fig. 206.


W1
W2
W3
W4
W5
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15=0
16
17=0
18
19=0
20
21=0
22
23=0
24
25
A1
B1
ΣW
A1 = 4000
B1 = 145
14,20,25
16,18,22,24
p
0 1 2 3000 kg
0 1 2 3 4 5 m

Druckkräfte unterschiedlich angedeutet. Die folgende Tabelle enthält die aus der Figur entnommenen Kräfte:

Kräfteplan des engl. Dachstuhls Fig. 205, volle Belastung.

Bezeichnung	Äussere Kräfte	Zug	Druck
Gegeben $P_1 = P_9 =$	450	—	—
„ $P_2 = P_3 = \ldots . P_8 =$	900	—	—
Auflager $A = B$	3600	—	—
1	—	—	8270
2	—	7300	—
3	—	—	1130
4	—	—	7060
5	—	400	—
6	—	6200	—
7	—	—	1300
8	—	—	5870
9	—	5170	—
10	—	900	—
11	—	—	1650
12	—	—	4550
13	—	3400	—

In Fig. 206 ist derselbe Dachstuhl verzeichnet mit einem Rollenauflager rechts; wir haben einen einseitigen Winddruck von 150 kg auf den qm als Belastung zu Grunde gelegt, die Windfläche ist, aus der Figur die Länge des Bindersparrens entnommen, $8{,}5 \cdot 4 = 34$ qm, somit die Belastung $150 \cdot 34 = 5100$ kg. Diese verteilt sich auf die vier Felder in der Weise, dass auf jedes Feld abg. 1300 kg zu nehmen sind, im ganzen also $\Sigma W = 5200$ kg angenommen werden.

Die Konstruktion der Kräftepolygone der einzelnen Knotenpunkte ergiebt, dass eine Reihe von Spannungen verschwinden, die Streben auf der Windseite übernehmen bereits den grössten Teil des Winddruckes. Die folgende Tabelle giebt die Windspannungen, wie sie nach dem beigefügten Massstab aus der Zeichnung entnommen wurden.

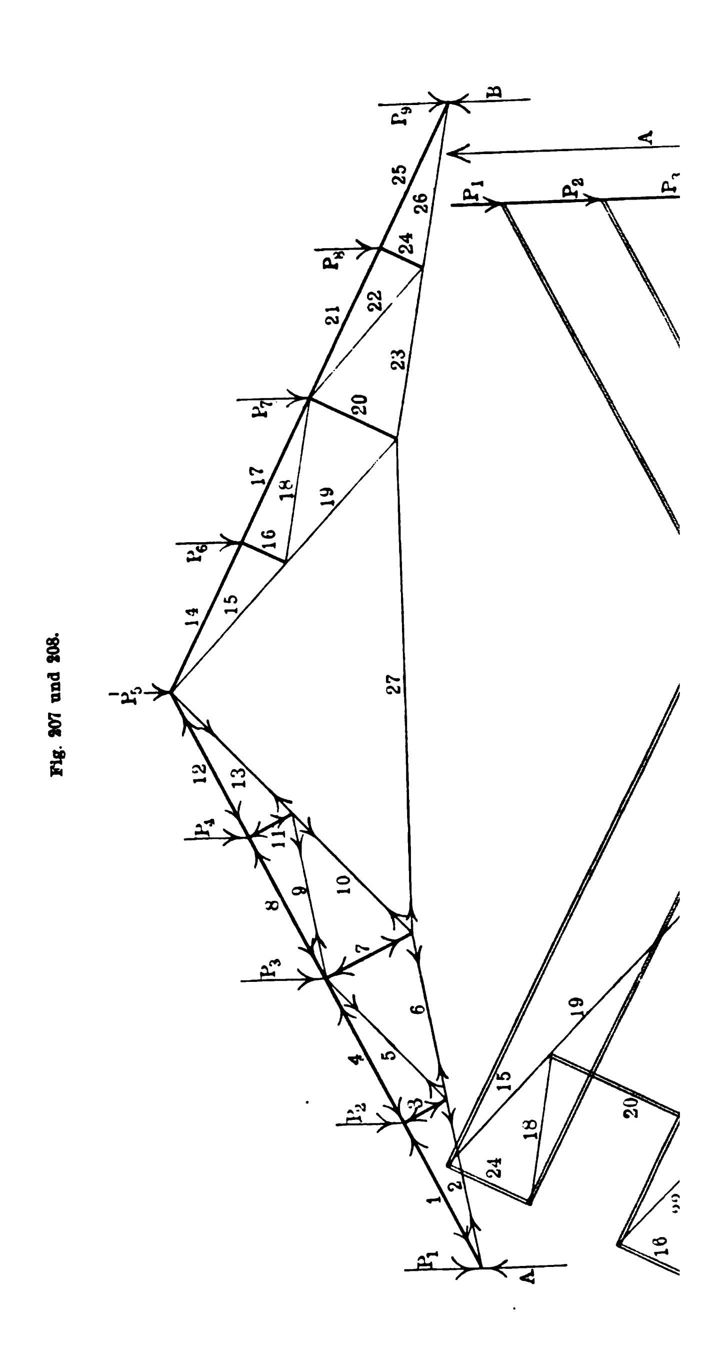
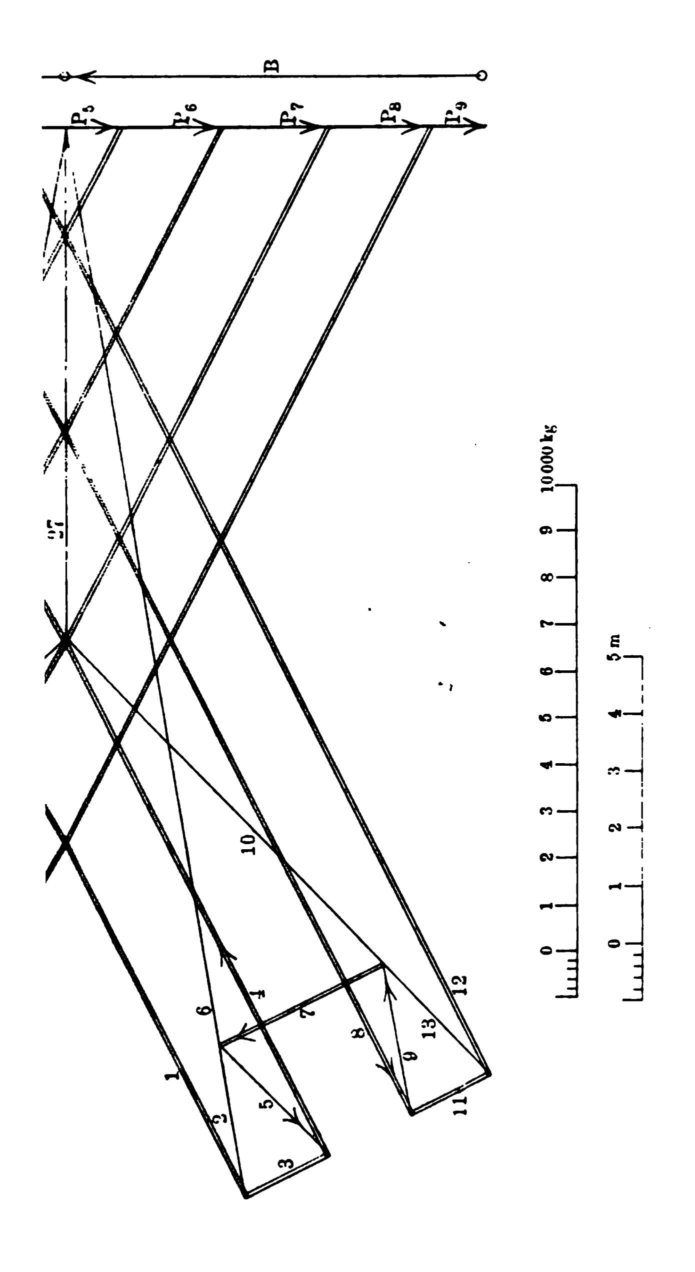


Fig. 207 und 208.


B
P5
P6
P7
P8
P9
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10000 kg
0 1 2 3 4 5 m

Kräfteplan des engl. Dachstuhles Fig. 206, einseitige Windbelastung.

Bezeichnung	Äussere Kräfte	Zug	Druck
Gegeben $W_1 = W_5 =$	650	—	—
„ $W_2 = W_3 = W_4 =$	1300	—	—
Gefunden A_1	4000	—	—
B_1	1450	—	—
1	—	—	7460
2	—	8820	—
3	—	—	1820
4	—	—	6200
5	—	720	—
6	—	7100	—
7	—	—	2160
8	—		4900
9	—	5300	—
10	—	1500	—
11	—	—	2700
12	—	—	3620
13	—	2880	—
14	—	3500	—
15	—	—	—
16	—	—	3900
17	—	—	—
18	—	—	3900
19	—	—	—
20	—	3500	—
21	—	—	—
22	—	—	3900
23	—	—	—
24	—	—	3900
25	—	3500	—

Aus beiden Tabellen ergiebt sich durch Addition die folgende Tabelle, wenn die beiden Belastungsarten, volle und linksseitige Windbelastung, genügen sollen, wenn also von einer rechtsseitigen Windwirkung und von einer einseitigen Belastung abgesehen werden kann.

Berechnungstabelle aus den Kräfteplänen der Fig. 205.

Bezeichn.	Zug	Druck	Bezeichn.	Zug	Druck	Bezeichn.	Zug	Druck
Strebe 1	—	15730	9	10470	—	17	900	—
2	16120	—	10	2400	—	18	—	9770
3	—	2950	11	—	4350	19	—	1300
4	—	13260	12	—	8170	20	9700	—
5	1120	—	13	6280	—	21	400	—
6	13300	—	14	8800	—	22	—	10960
7	—	3460	15	—	1650	23	—	1130
8	—	10770	16	—	8450	24	—	12170
						25	10800	—

In Fig. 207 bis 210 haben wir die gleiche Rechnung für einen grösseren Polonceaubinder durchgeführt.

Der Dachstuhl hat 20 m Spannweite, 5 m Firsthöhe und die mittlere Zugstange liegt 1 m über der Horizontalen, die Binder liegen in 4 m Entfernung. Die Belastung haben wir nach dem Anhang zusammengestellt und zu 220 kg a. d. qm zu Grunde gelegt. Man erhält dann als Gesamtbelastung $20 \cdot 4 \cdot 220 = 17600$ kg; auf ein Feld kommen $\frac{17600}{8} = 2200$ kg, die einzelnen Kräfte der Knotenpunkte können dann angenommen werden zu

$$P_1 = P_9 = \frac{2200}{2} = 1100, \; P_2 = P_3 \ldots = P_8 = 2200 \text{ kg}.$$

A und B werden gleich gross: 8800 kg. Nach diesen äusseren Kräften sind die Polygone, Fig. 208 aufgetragen. Bei der Konstruktion derselben von Knotenpunkt zu Knotenpunkt kommt insofern die Symetrie des Dachstuhles zu statten, als man von beiden Seiten, von beiden Auflagern aus, konstruieren kann. Vom theoretischen Standpunkt aus ist es richtiger, die Zugstange 27 entweder analytisch zu berechnen (s. S. 256, Mech. I), oder eine weiter unten behandelte Zwischenkonstruktion anzuwenden; als Momentengleichung erhält man für die Rechnung den Angriffspunkt der Kraft P_5 als Drehpunkt zu Grunde gelegt,

$$8800 \cdot 10 - P_1\, 10 - P_2\, 7{,}5 - P_3\, 5 - P_4\, 2{,}5 - P_{27} \cdot 4 = 0{,}2,$$

hieraus folgt

$$P_{27} = \frac{8800 \cdot 10 - (1100 \cdot 10 + 2200 \cdot 7{,}5 + 2200 \cdot 5 + 2200 \cdot 2{,}5}{4} = 11000 \text{ kg},$$

dadurch lässt sich die gegebene Richtung der Streben 5, 9 graphostatisch bestimmen, da man sonst genötigt wird, die Höhenlage der horizontalen Zugstange 27 zu verändern.

Die von der vertikalen vollen Belastung verursachten Spannungen sind in der folgenden Tabelle enthalten:

Kräfteplan des Polonceaubinders, Fig. 207. Vertikale Belastung.

Bezeichnung	Äuss. Kr.	Zug	Druck	Bezeichn.	Äuss. Kr.	Zug	Druck
Gegeb. $P_1 = P_9 =$	1100	—	—	6	20000	—	—
„ $P_2 = P_3 = P_8 =$	2200	—	—	7	—	3900	—
Berechnet $A = B =$	880	—		8	—	23600	—
	1	—	26600	9	3300	—	—
	2	23300	—	10	9700	—	—
	3	—	2000	11	—	2000	—
	4	—	24700	12	—	21600	—
	5	3300	—	13	13100	—	—
				14 = 12	—	21600	—
				15 = 13	13100	—	—
				27	11000	—	—

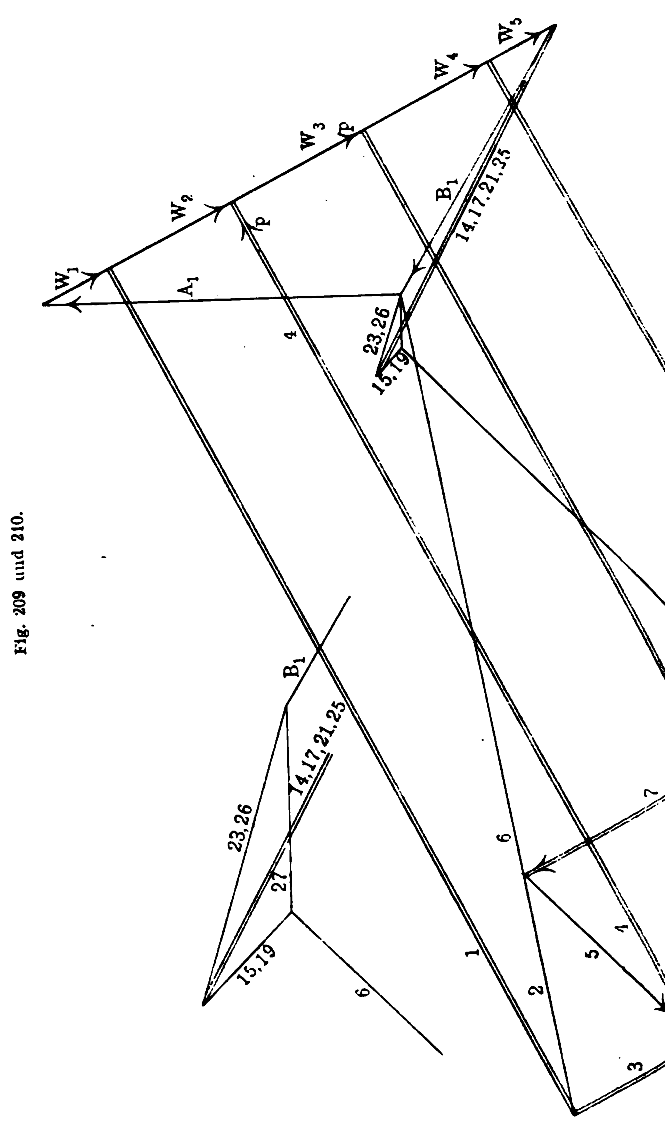
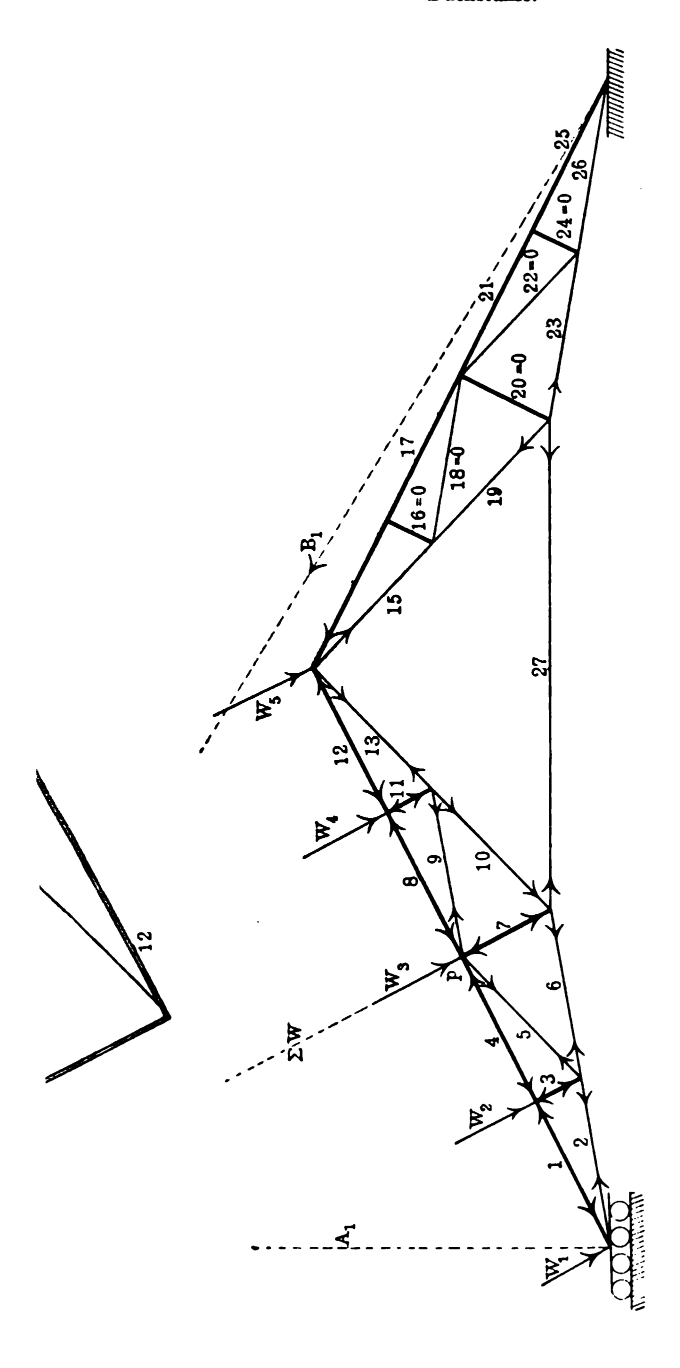


Fig. 209 und 210.


W1
A1
1
2
W2
3
4
5
6
ΣW
W3
P
7
8
9
10
W4
11
12
13
W5
B1
15
16=0
17
18=0
19
20=0
21
22=0
23
24=0
25
26
27
12

Setzen wir den Winddruck zu 150 kg auf den qm fest, so wirkt auf die eine Dachseite der Druck $150 \cdot 4 \cdot 10 = 6000$ kg, jedes Feld ist sonach belastet mit $\frac{6000}{4} = 1500$ kg; nach den Bezeichnungen der Fig. 210 sind dann die Knotenpunktsbelastungen $W_1 = W_9 = \frac{1500}{2}$, $W_2 = W_3 = W_4 = 1500$ kg. Die Konstruktion der Polygone wird in der gleichen Weise mit Rücksicht auf das linke bewegliche Lager wie in Fig. 206 ausgeführt. In der folgenden Übersicht sind die Druck- und Zugkräfte, aus der Figur entnommen, zusammengestellt.

Kräfteplan des Polonceaubinders, Fig. 210, einseitiger Winddruck.

Bezeichnung	Äuss. Kr.	Zug	Druck	Bezeichn.	Äuss. Kr.	Zug	Druck
Gegeb. $W_1 = W_9 =$	750	—	—	13	—	8150	—
„ $W_2 = W_3 = W_4 =$	1500	—	—	14	—	—	4000
Gefunden $A_1 =$	3700	—	—	15	—	3800	—
$B_1 =$	3200	—	—	16	—	—	—
1	—	—	9940	17	—	—	4000
2	—	8600	—	18	—	—	—
3	—	—	1500	19	—	3800	—
4	—	—	9940	20	—	—	—
5	—	2500	—	21	—	—	4000
6	—	6100	—	22	—	—	—
7	—	—	3400	23	—	900	—
8	—	—	9940	24	—	—	—
9	—	2500	—	25	—	—	4000
10	—	5500	—	26	—	900	—
11	—	—	1500	27	—	600	—
12	—	—	9940				

Setzen wir wieder voraus, dass eine rechtseitige Windbelastung nicht in Betracht kommt, ebenso eine einseitige Belastung nicht in Rücksicht zu ziehen ist, dann bietet die Zusammensetzung beider Tabellen im Sinne der obigen keine weiteren Schwierigkeiten.

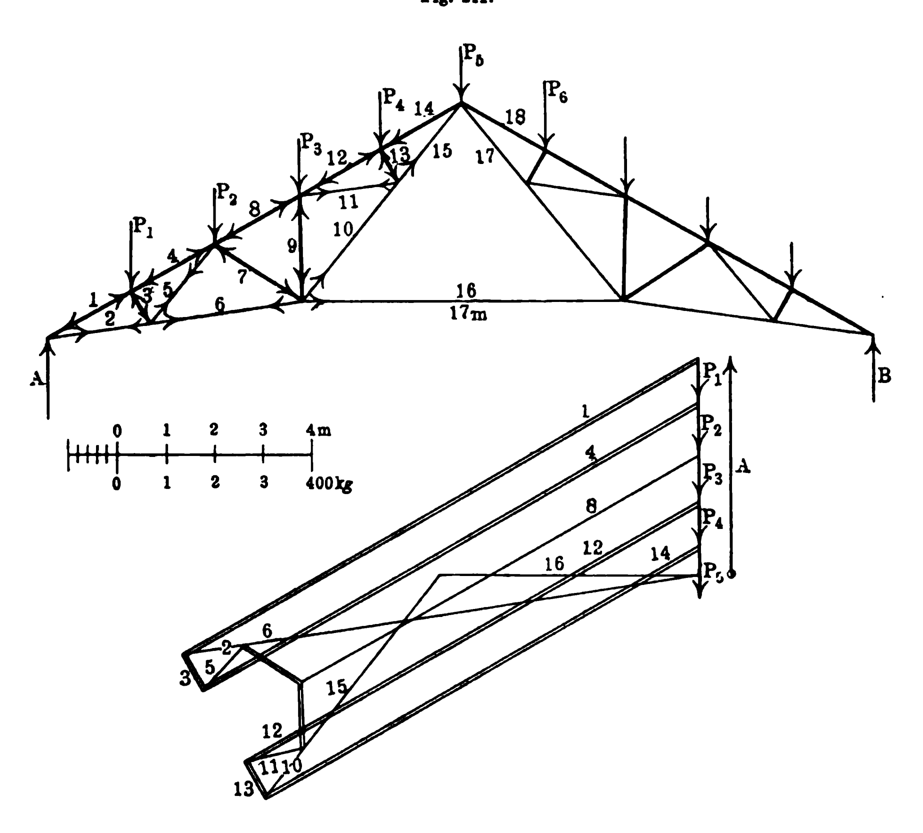
Der Kräfteplan des Dachstuhles, Fig. 211, lässt sich ohne Zwischenkonstruktion auch nur dadurch feststellen, dass man die mittlere Zugstrebe, hier mit 16 bezeichnet, berechnet.

Die Belastungen der Knotenpunkte sind gleich und zwar zu $P_1 = P_2 = P_3 \ldots . P_9 = 100$ kg angenommen, die Spannweite zu 17 m. Die Momentengleichung, um die Spannung in 16 zu ermitteln, ist

$$100 \cdot 6,8 + 100 \cdot 5,1 + 100 \cdot 3,35 + 100 \cdot 1,65 + P_{16}\, 4,05 = A \cdot 8,5 = 450 \cdot 8,5,$$

aus dieser folgt $P_{16} = 534$ kg.

Fig. 211.



Die Aufstellung des Kräfteplanes bietet keine besonderen Schwierigkeiten.

Der Dachstuhl, Fig. 212, ist ein grösserer Polonceaubinder mit besonders verstrebten Sparren, welche infolge ihrer grösseren Spannweite besondere Träger für sich bilden. Die gleichmässig verteilte Last ist auf 17 Knotenpunkten verteilt, diese sind mit $P_1 = P_{17}$ und $P_2 = P_3 \ldots . P_{16}$ kg belastet.

Zunächst müssen die Hauptstreben $\overline{mo}$, a, b, c, d... die gesamte Belastung übernehmen, es ist also notwendig die Belastung auf die Hauptknotenpunkte m, n, o, m_1 und n_1 zu reduzieren.

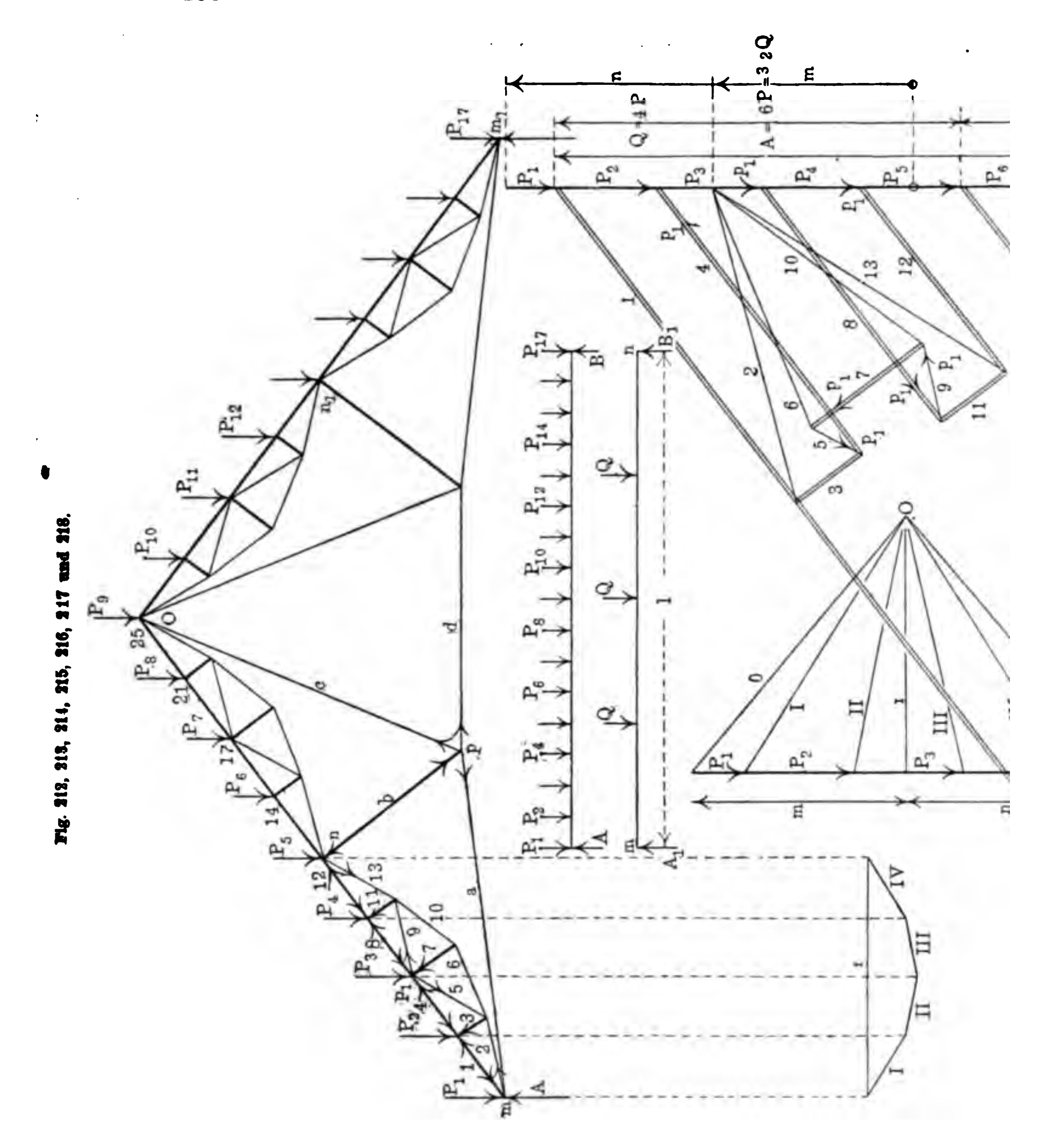
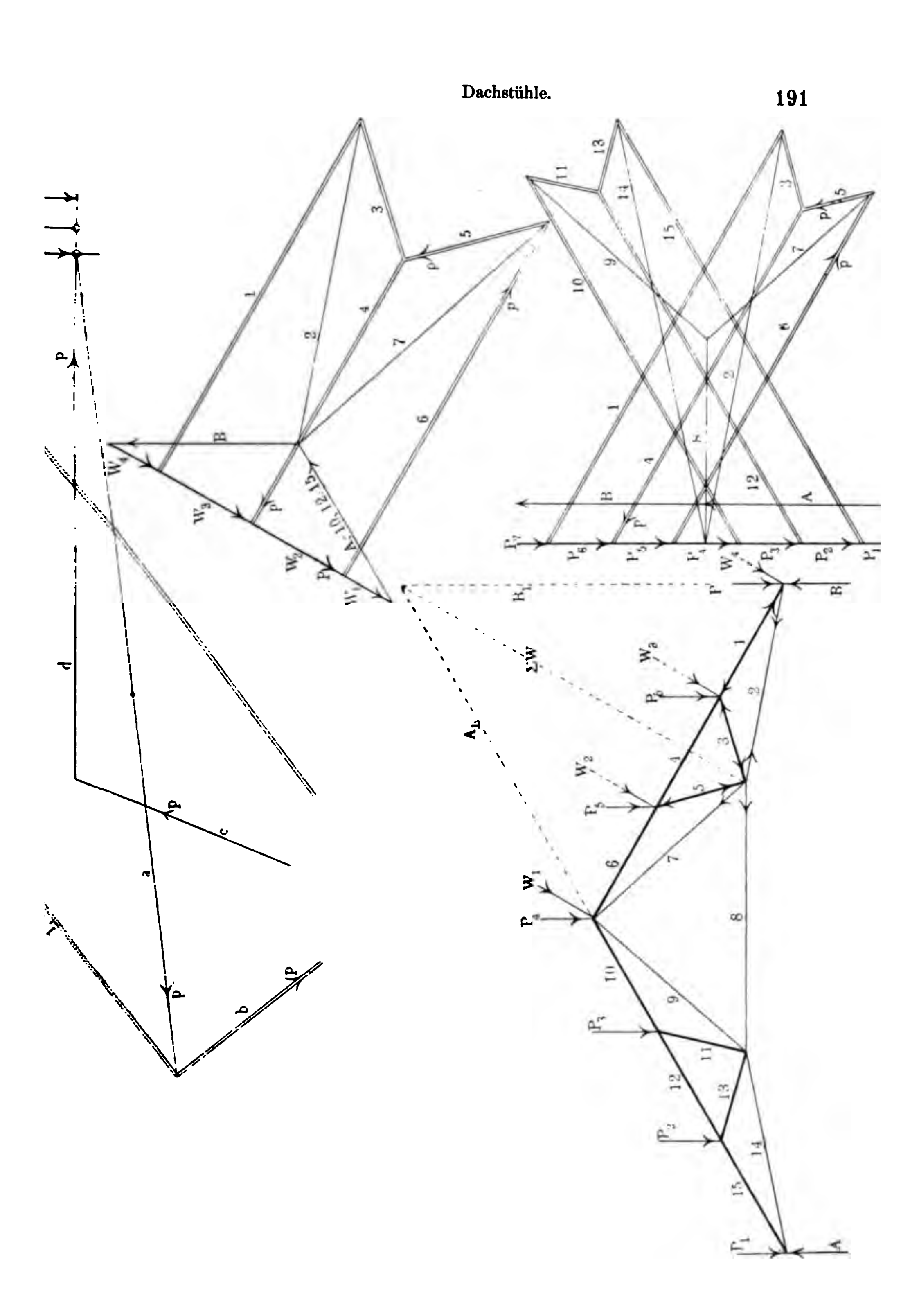


Fig. 212, 213, 214, 215, 216, 217 und 218.



Wir denken uns die Gesamtbelastung der 16 Felder, 16 P, gleichmässig verteilt und wollen mit Q die Belastungen in den Hauptknotenpunkten n, o, n_1 ... bezeichnen, wie es die Fig. 213 unterhalb der Hauptfigur andeuten soll. Es muss dann das grösste Moment von P_1, bezw. von $P_2 = P_3 \ldots P_{16}$ und das grösste Moment der Belastungen Q gleich sein. Das grösste Moment der gleichmässig verteilten Belastung ist $M = 16 P\, l/_8$, das der Belastungen Q in der Mitte 0 gerechnet, ist $M = A_1\, l/_2 - Q\, l/_4$, oder, weil das Auflager $A_1 = \frac{3}{2} Q_1$, $M = \frac{3}{2} Q\, l/_2 - Q\, l/_4$, es gilt somit zur Bestimmung der Werte Q die Gleichung

$$16 P\, l/_8 = \tfrac{3}{2} Q\, l/_2 - Q\, l/_4.$$

Hieraus folgt $Q = 4 P$ und demnach $A_1 = \frac{3}{2} Q = 6 P$.

Wir tragen also zunächst an P_1 in Fig. 214, welche Kraft den Wert $\frac{P}{2}$ hat $6 P = P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + P_7$ an, das ist die Auflagerreaktion A_1 für den Hauptträger, deren Streben 1 bis 25 und a, b, c, d ... sind; für diese konstruieren wir zunächst die Kräftepolygone der Knotenpunkte m, n, o, p ..., wie aus Fig. 214 zu ersehen, ist die Konstruktion zur Hälfte durchgeführt. Hierauf konstruieren wir das Kräftediagramm für einen der Träger m n der Hauptfigur. Die Auflagerreaktionen sind gleich gross, wie wir später noch aus den Hilfsfiguren 215 durch die Linien I, II, III ... erkennen werden und wie sich infolge der symmetrischen Verteilung auch ohnedies ergiebt,

$$\text{Auflager m} = \text{Auflager n} = \frac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5}{2}.$$

Wir haben die Konstruktion der Kräftepolygone in Fig. 214 mit eingezeichnet. Der Verfolg des Gleichgewichtszustandes jedes einzelnen Knotenpunktes durch das jedesmalige geschlossene Kräftepolygon ergiebt dann das gesamte Gleichgewicht des ganzen Dachstuhles.

In Fig. 216, 217 und 218 haben wir noch einen sog. französischen Dachstuhl aufgezeichnet, welcher durch vertikale und rechtsseitige Kräfte belastet ist. Das Kräftediagramm der vertikalen Belastung $P_1\, P_2 \ldots P_7$ ist in Fig. 217 verzeichnet. Die rechtsseitige Belastung ist wieder mit W_1 bis W_4 bezeichnet, die Resultierende dieser Kräfte $\Sigma W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4$ wirkt in der Mitte des Dachsparrens, trägt man dieselbe, wie in Fig. 218 geschehen, parallel der Richtungen W auf, so ergiebt sich der senkrechte Auflagerdruck B_1, aus dessen Schnittpunkt mit ΣW ebenfalls der Auflagerdruck A_1; fällt die Richtung des Auflagerdruckes A_1 in die des linken Sparrens, so werden, wie aus Fig. 218 leicht zu ersehen, die Spannungen in den Streben 8, 9, 11, 13 und 14 Null.

XXII. Die weiteren Figuren 219 bis 242 stellen Kräftepläne zum Teil für verstrebte Balken, zum Teil für Brückenträger mit voller Belastung dar. Auf eine teilweise Belastung, wie sie entstehen muss, wenn die Last allmählich über die Träger hinwegschreitet, werden wir erst nach Besprechung des nächsten Kapitels eingehen, um etwaige analytische Zwischenrechnungen durch graphische Berechnungen ersetzen zu können. Man berücksichtigt bei derartigen Trägern und Brücken bekanntlich neben der zufälligen, beweglichen (mobilen) oder Verkehrs-Last das Eigengewicht, welches, wie aus Bd. II, S. 162 u. f. zu ersehen, durch Rechnung, oder, wie im Anhang, auf empirischem Wege, näherungsweise bestimmt werden kann. Diese gesamte Belastung verteilt man auf die Trägerknotenpunkte, das sind auch hier die Kreuzungspunkte der Streben und Gurtungen. Die empirischen Werte der beweglichen Belastungen haben wir auch im Anhang angeschlossen. Die Konstruktion der Kräftepolygone erfolgt nun nach den uns bekannten Grundsätzen, ausgehend von den äusseren Kräften, man reiht die Kräftepolygone aneinander, bis das vollständig geschlossene Kräftediagramm des ganzen Bauwerkes das Gleichgewicht bestätigt.

Die Zeichnungen, Fig. 219 u. 223, stellen einfach verstrebte (armierte) Balken dar, welche mit den Kräften P belastet sind. Die Fig. 221 u. 222 sind mehrfach verstrebte Balken, welche an 3 Knotenpunkten belastet sind.

In den Fig. 220 u. 224 sind einfache Hängewerke dargestellt mit voller in den Knotenpunkten verteilter Belastung. Die Kreuzstreben zwischen den parallelen Gurtungen, Fig. 220, können bei voller Belastung entbehrt werden, bei einseitiger Belastung, bei Verwendung dieses Hängewerkes als Brücke, müssen sie, wie wir noch sehen werden, vorhanden sein. In Fig. 234 ist der Symmetrie wegen die eine Hälfte des Kräfteplanes gezeichnet, daher die Bezeichnung $\frac{1}{2}7$ in Strebe 7.

Die 4 folgenden Figuren sind Brücken-, Fachwerks-Träger mit parallel laufenden Gurtungen. Die Belastung wirkt in den Knotenpunkten der oberen Gurtung ein; die senkrechten Stangen sind Zugstreben in den Fig. 225 u. 226; die schiefen, welche in diesen Konstruktionen nach innen gerichtet sind, werden auf Druck beansprucht. In Fig. 227 u. 228 ist die Beanspruchung eine umgekehrte, die senkrechten Stangen sind auf Druck, die den Diagonalen in Fig. 225 u. 226 entgegengesetzt gelegten schiefen Streben sind Zugstreben. Die untere Gurtungist stets auf Zug, die obere auf Druck beansprucht. Auf die Einteilung der Felder, ob eine gerade oder ungerade Zahl zu Grunde gelegt wird, ist auch Rücksicht zu nehmen. In Fig. 225 ist die mittlere Zugstange bei voller Belastung

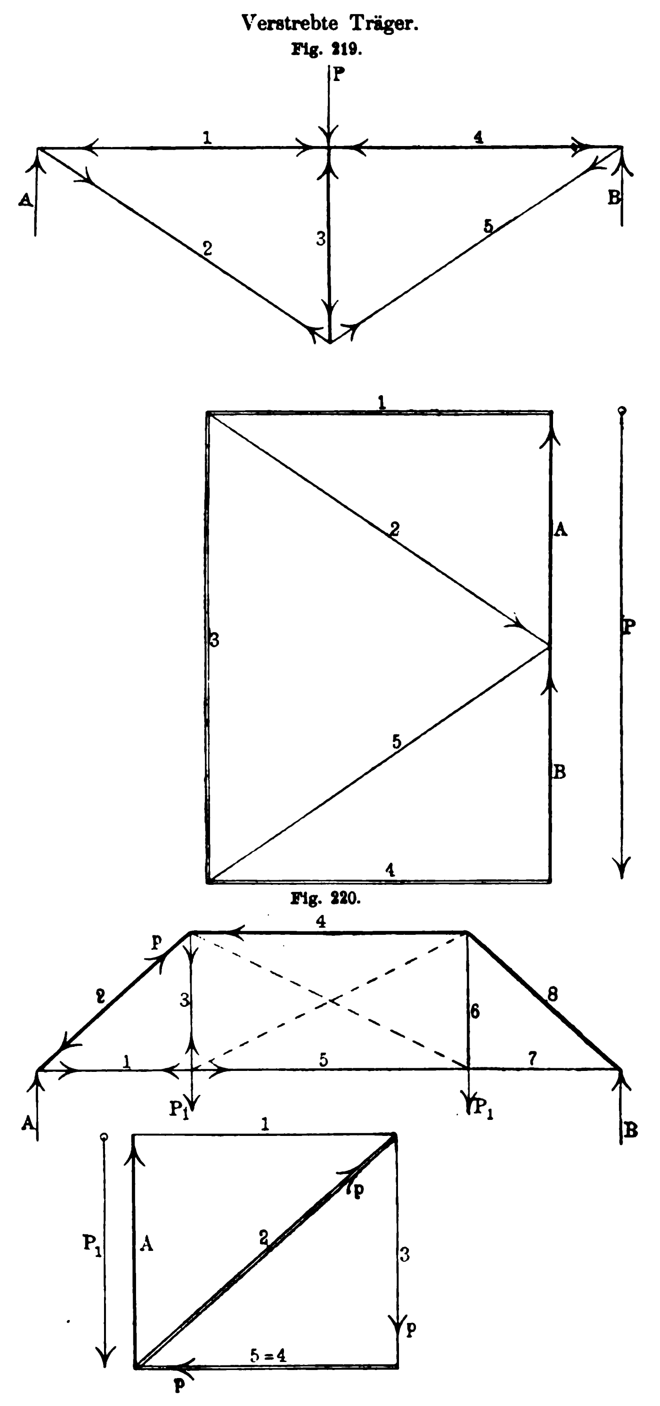


Fig. 219.

Fig. 220.

Fig. 221.

Fig. 222.

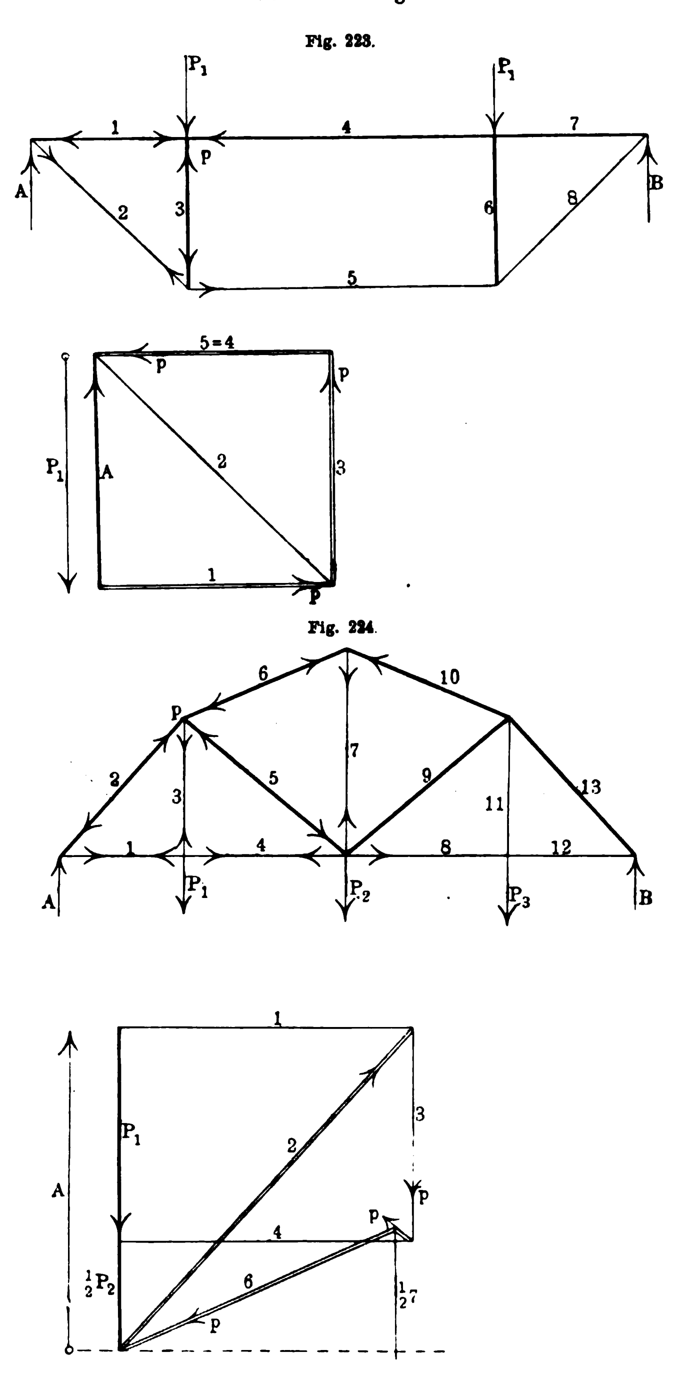


Fig. 223.

Fig. 224.

ganz entbehrlich; in Fig. 226 sind die Zugkräfte in 15 und 18 Null, Kreuzstreben sind hier auch keine erforderlich, hingegen in Fig. 225 in der Mitte, also bei gerader Felderteilung — ein mittleres Feld ist hier nicht vorhanden — müssen Druckstreben angewendet werden. In der Hauptfigur 225 ist p in den vierten Knotenpunkt bei P_4 hinzusetzen, ferner ist in der Nebenfigur die Bezeichung 14 = 17 = 19 = 21 in 14 = 17 = 16 = 21 umzuändern. In Fig. 228 fallen im mittleren Feld, also bei ungerader Felderzahl (hier ist der Träger in 9 Felder geteilt), die Spannungen in den Wandstreben Null aus; die Streben sind wieder entbehrlich, hingegen in Fig. 227 bei gerader Felderzahl sind ausser der senkrechten Druckstrebe noch 2 Zugstreben nötig. Aus den Kräftepolygonen ersieht man, dass die Wandspannungen von den Auflagern nach der Mitte zu abnehmen, die Spannungen in den parallelen Gurtungen sind in der Mitte am grössten und nehmen nach den Auflagern zu ab. Wie wir bereits früher (im I. Band, S. 274, 275 etc.) andeuteten, werden die Wandungen nach den Vertikal- (Quer-, Schub-) kräften berechnet, die Gurtungen nach den Momenten. Die ersteren, welche wir mit V bezeichneten, erreichen in den Auflagern ihr Maximum, und werden Null, wo die Momente ihren grössten Wert erlangen; in Band I, S. 108, 110 u. s. w. bei der Betrachtung der unterstützten und belasteten Träger haben wir auf diese Sätze bereits hingewiesen. Die graphischen Darstellungen der Kräfte in Fig. 225 bis 228 und auch die noch weiter unten zu betrachtenden liefern uns unmittelbar die Kräfte, und zwar in demselben Sinne der Abnahme und Zunahme ihrer Grössen, wie wir sie nach den analytischen Anschauungen früher auf Grund der Momente M und Quer- oder Vertikalkräfte V berechnet haben.

Diese Übereinstimmung des graphischen und des analytischen Rechnungsverfahrens ist für die Praxis und besonders als Kontrolle bei den Berechnungen solcher Bauwerke von grossem Wert.

Die Verteilung der Spannungen wird, wie wir schon oben erwähnten, eine etwas andere, wenn die Knotenpunkte ungleich belastet sind, bezw. auch, wenn die Last allmählich über die Brücke schreitet, wie wir noch in einem späteren Kapitel kennen lernen werden.

Die Wanddruckstreben sind nun stets auf Druck mit Biegung, das ist auf Knickung, zu berechnen und der Querschnitt aus den Trägheitsmomenten zu nehmen*). Die Entfernung der Knotenpunkte in der auf Druck (Knickung) beanspruchten Gurtung, z. B. die Stäbe 4, 8, 12, 14 ... Fig. 227, 228, nimmt man in der Praxis so gering an, dass eine

*) S. Bd. II, S. 81.

Fig. 225.

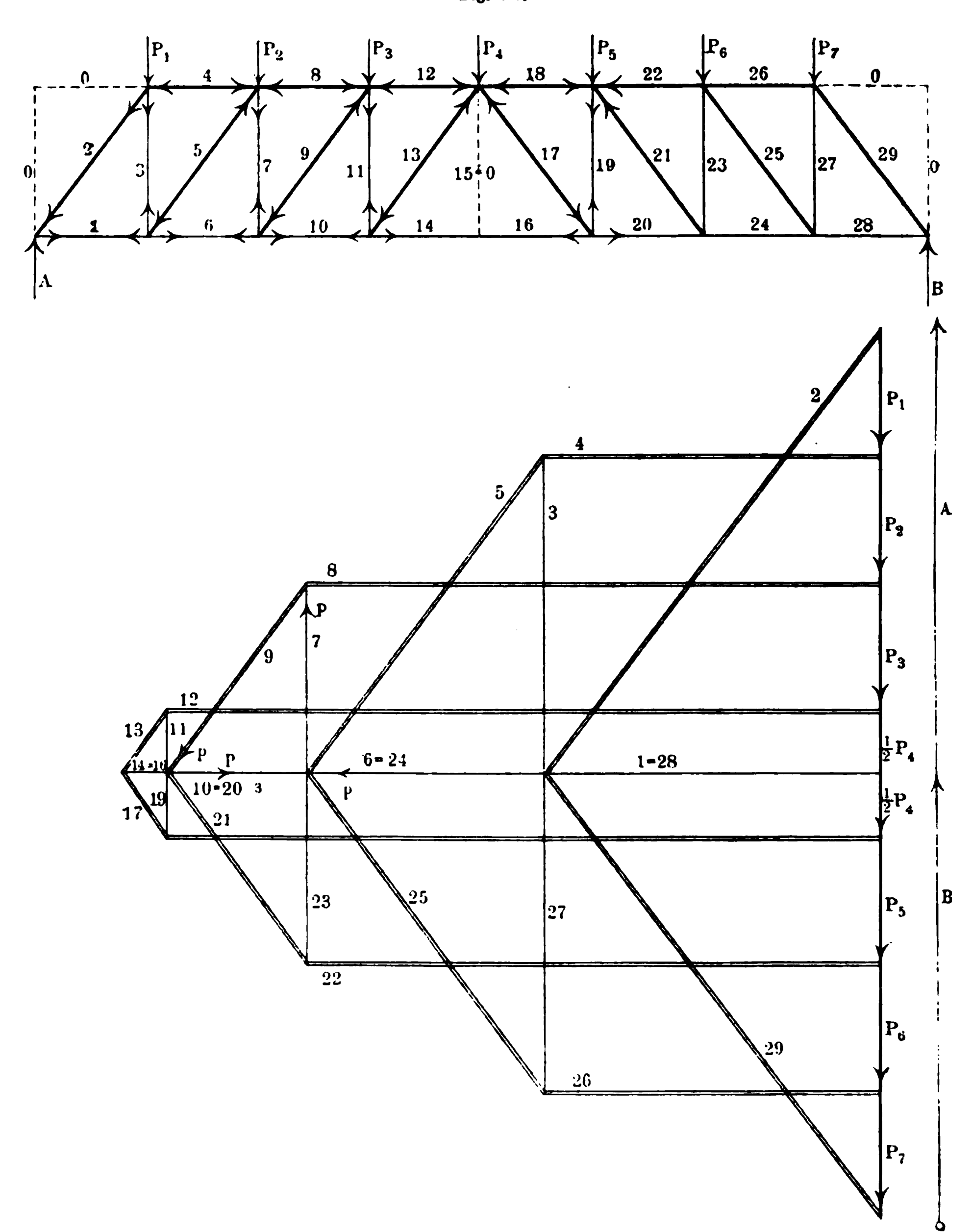


Fig. 226.

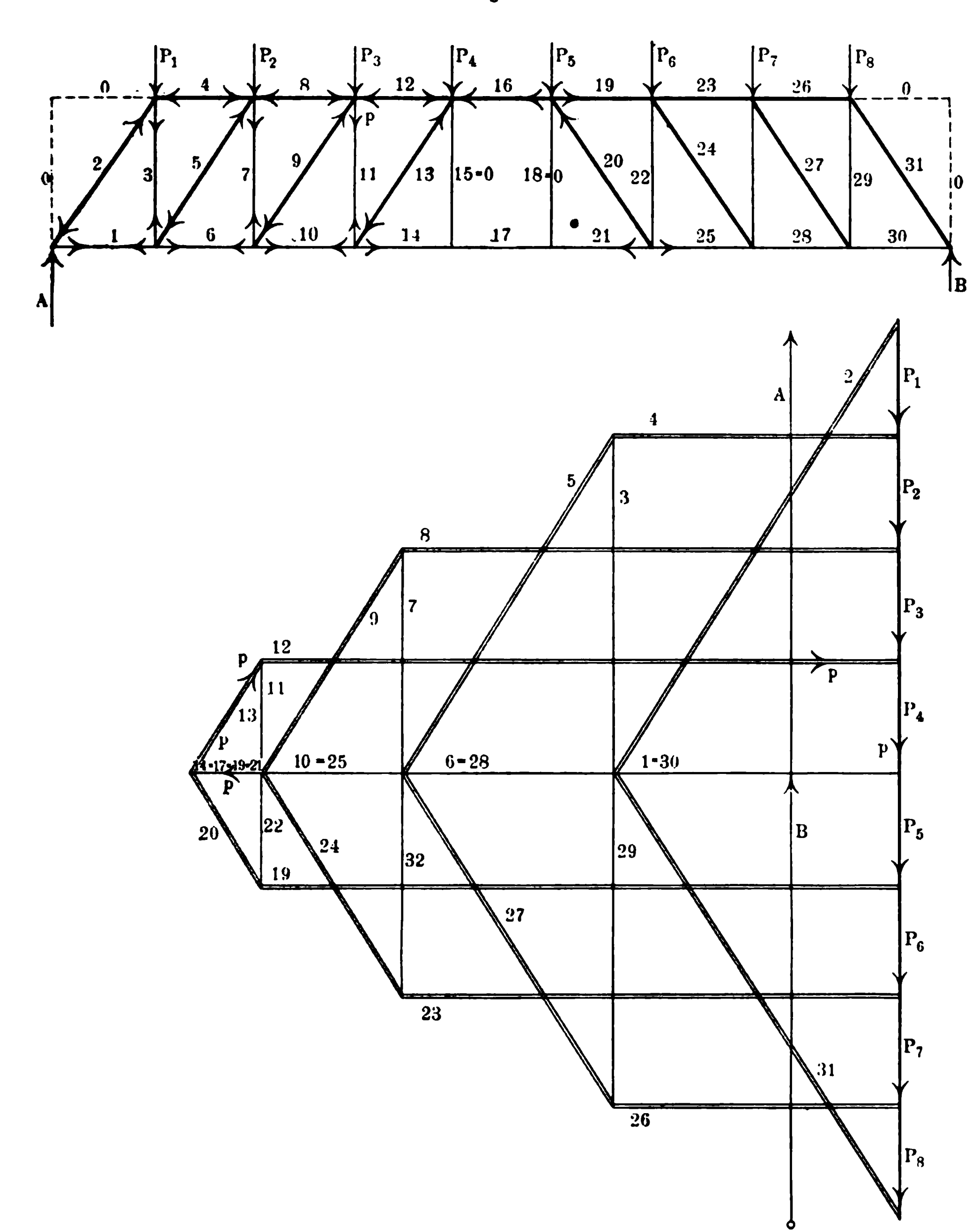


Fig. 227.

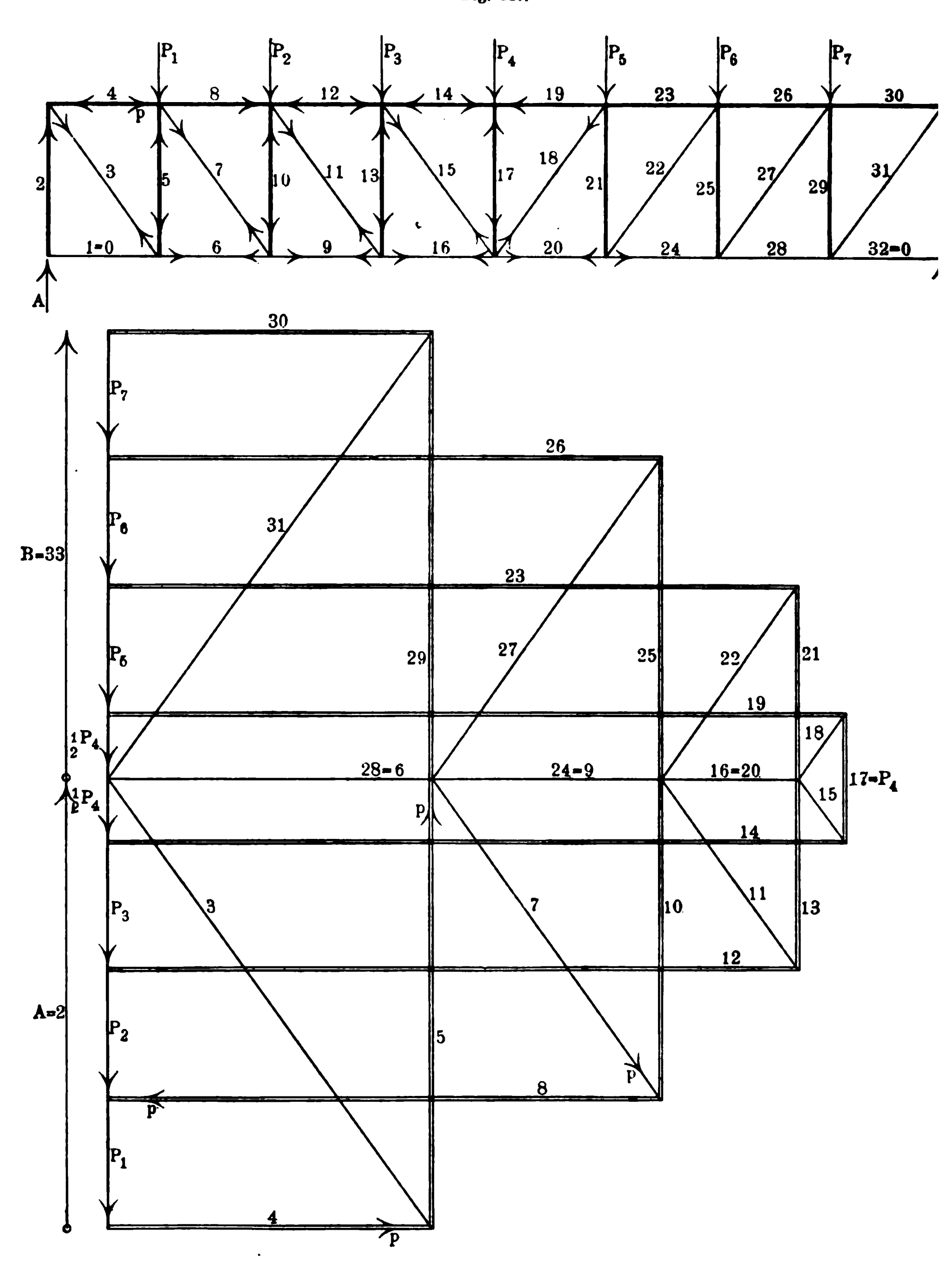
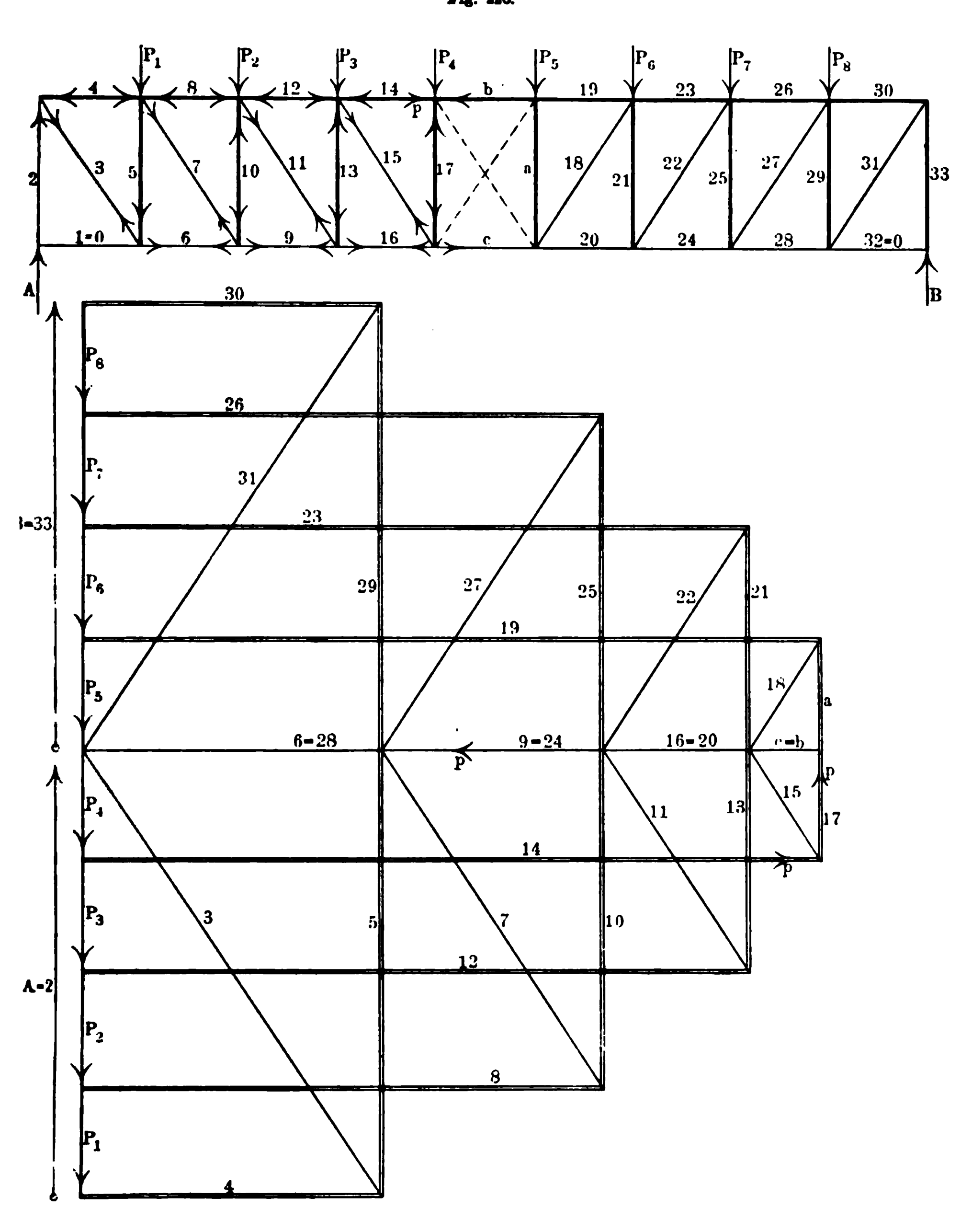

P1
P2
P3
P4
P5
P6
P7
4
8
12
14
19
23
26
30
2
3
5
7
10
11
13
15
17
18
21
22
25
27
29
31
1=0
6
9
16
20
24
28
32=0
A
B=33
A=2
28=6
24=9
16=20
17=P4
p

Fig. 228.


P1
P2
P3
P4
P5
P6
P7
P8
4
8
12
14
b
19
23
26
30
p
2
3
5
7
10
11
13
15
17
a
18
21
22
25
27
29
31
33
1=0
6
9
16
c
20
24
28
32=0
A
B
6=28
9=24
16=20
c=b
B=33
A=2

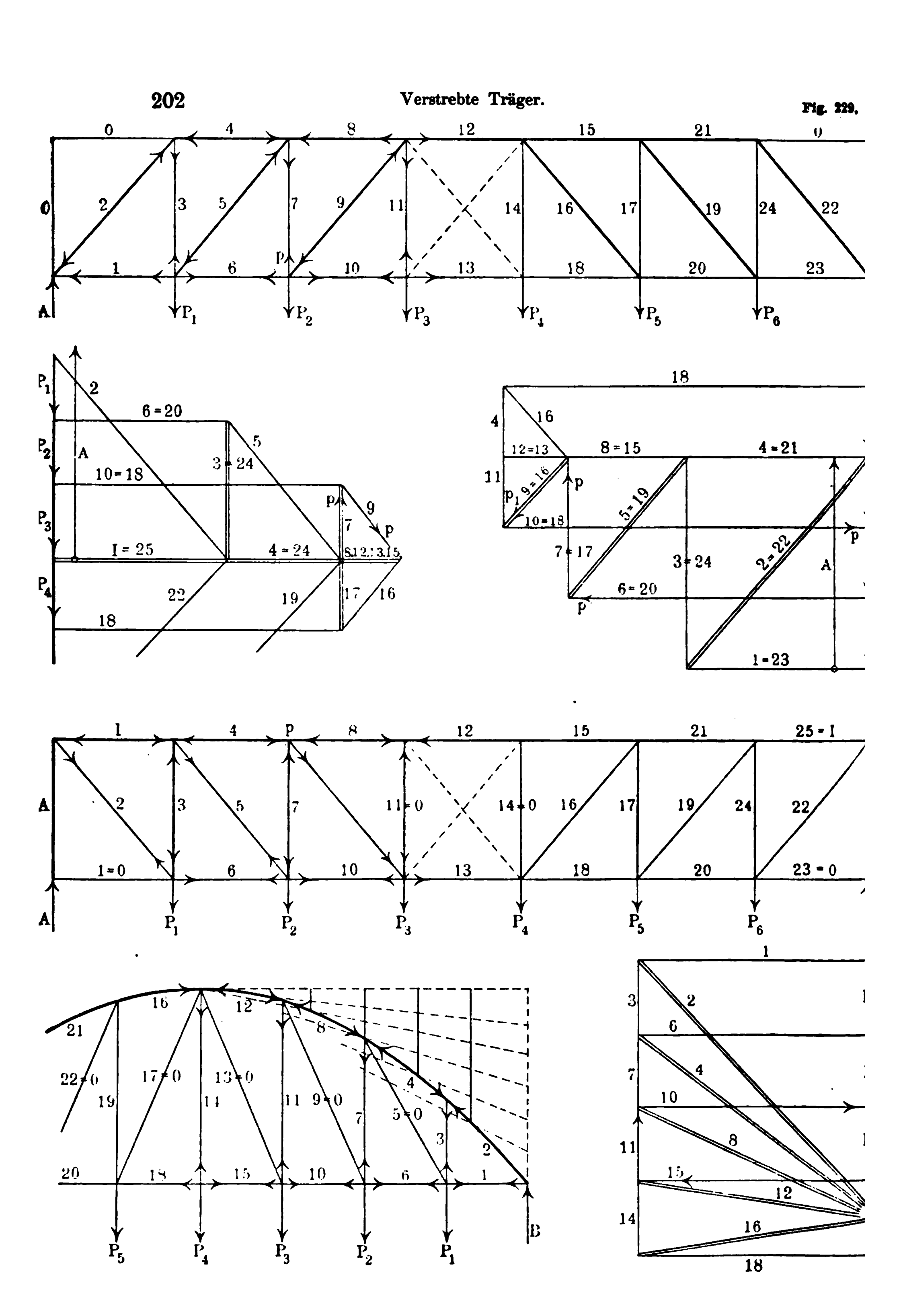
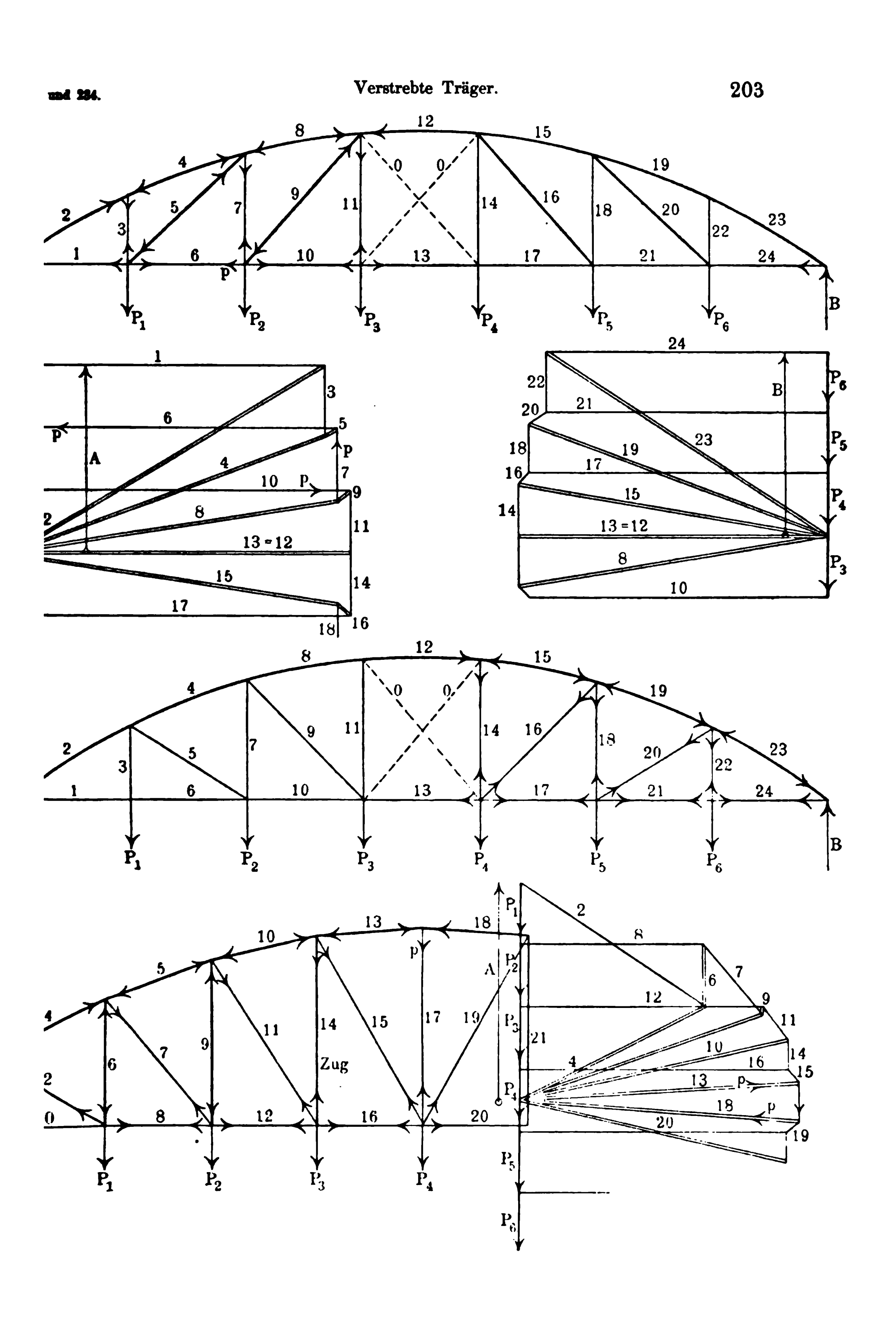


Fig. 229.



P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6
B
A
p
13 = 12
Zug

Druckbiegung (Knickung) meist ausgeschlossen ist*), die in der Praxis meist kastenförmige Form der gesamten Gurtung, die Verbindung der Gurtungsplatten (Lamellen) mit der Wandung durch Kopfplatten und Winkeleisen unterstützt die gewöhnliche Berechnung des Gurtungsquerschnittes nach dem zulässigen Flächendruck**) wesentlich. Andererseits wird man aber auch die Entfernung der Querträger und Querverbände, welche nicht mit den Vertikalstreben verbunden werden, welche also zum Teil die Länge eines Feldes (etwa 2 bis 4 m) bedingen, nicht allzu gross annehmen, damit diese und die Längsverbände, welche die Brückenbahn unmittelbar aufnehmen, nicht zu starke Dimensionen erhalten. Je mehr Quer- und Längsträger angewendet werden, um so mehr verteilt sich die bewegliche Last, um so geringere Dimensionen erhalten diese Verbände. Endlich wird in Bezug auf die Lage der Wandstreben ein Winkel von etwa 45° aus theoretischen und praktischen Gründen einer zu flachen oder zu steilen Lage vorgezogen.

Zum besseren Verständnis der noch weiter unten zu betrachtenden Trägerkonstruktionen waren wir genötigt, wenigstens auf einige allgemeine Grundsätze, wenn sie auch dem speciellen Brückenbau zukommen, einzugehen.

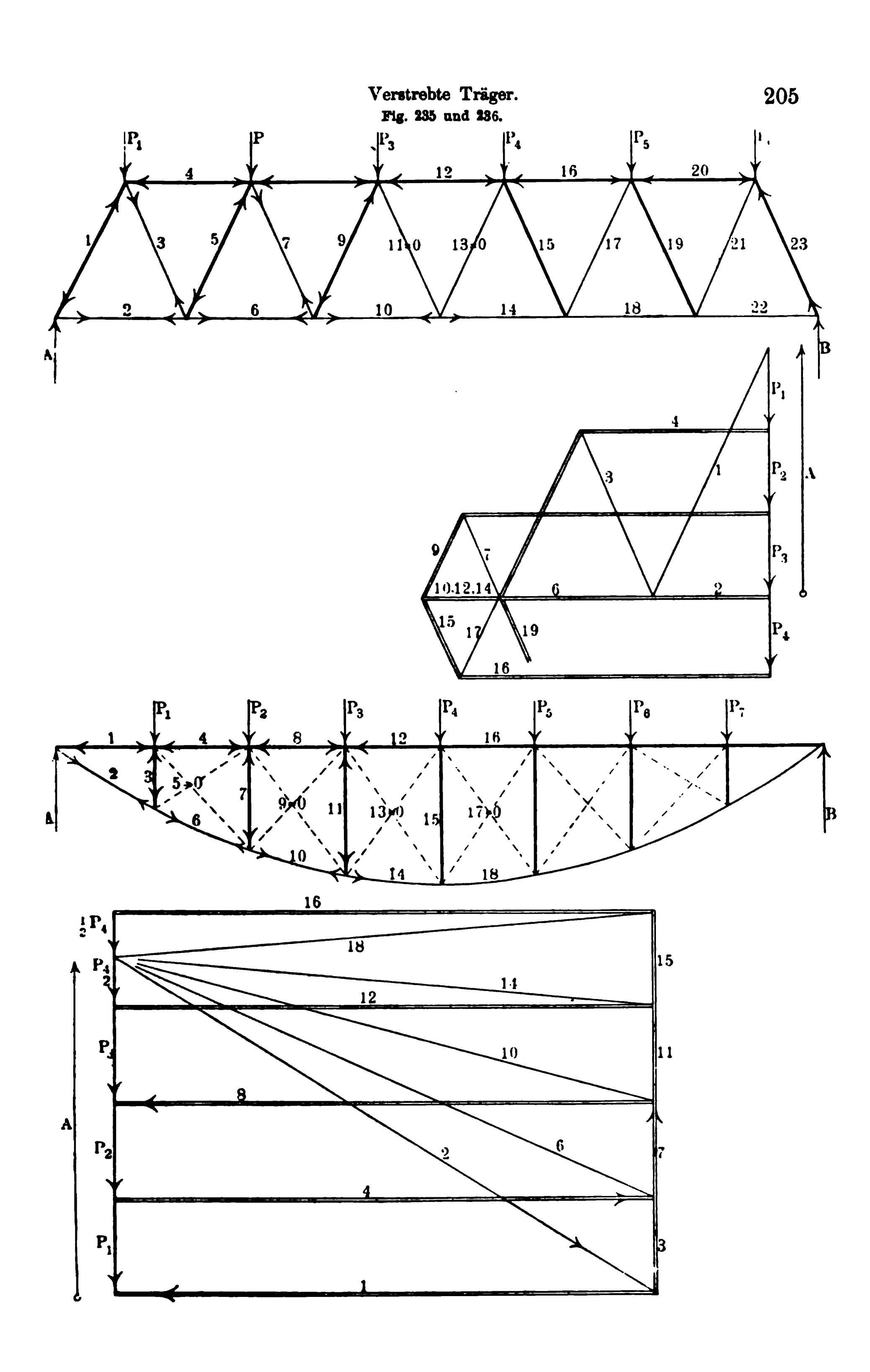
In den Trägerkonstruktionen, Fig. 229 u. 230 sind die Belastungen der Knotenpunkte an der unteren Gurtung angreifend gedacht. Die Widerlager oder Auflagerreaktionen A und B sind wieder gleich gross, $A = B = \frac{\Sigma P}{2}$, ausgehend von diesen bietet die Konstruktion der Kräftepolygone keine Schwierigkeiten, aus denselben übersieht man, dass die Wandspannungen nach der Mitte zu kleiner, die Gurtungsspannungen grösser werden. Die Berechnung der Gurtungsspannung, wie Seite 201 schon angedeutet, erfolgt nach der Formel $S = \frac{M}{h}$ (s. Bd. I, Gl. 99); h ist konstant, M, das Moment, wird in der Trägermitte am grössten. Von der Richtung der schiefen Streben ist wieder die Verteilung von Druck und Zug in den Wandstreben abhängig.

In Fig. 235 haben wir bei parallelen Gurtungen ein sog. unsymmetrisches Fachwerksystem angenommen, bei welchem die senkrechten Streben in Wegfall kommen. Die Belastung greift in der oberen Gurtung an. Teilt man die untere Gurtung, statt wie hier in eine gerade, in eine ungerade Anzahl Teile ein, wie in dem der analytischen Berechnung

*) S. die Knickungsgrenzen, Bd. II, S. 258.

**) S. Bd. II, Druckfestigkeit, S. 22.

Fig. 235 und 236.



zu Grunde gelegten Träger Seite 282, Band I, geschehen, so werden die Spannungen in den mittleren Streben 11 und 13 nicht Null, bei voller symmetrisch verteilter Belastung der Knotenpunkte erhalten die Streben Spannungswerte. Die Verteilung von Zug und Druck in der Wandung ist aus der Figur zu ersehen.

Die folgenden Beispiele der Brückenträger sind mit teils gekrümmten Gurtungen ausgeführt. In Fig. 231 u. 236 ist eine Gurtung in Parabelform ausgeführt, man nennt derartige Träger Parabelträger (parabolische Brücken). Die Last greift an der horizontalen Gurtung an, das heisst auf der letzteren ruht die Brückenbahn.

Ist die untere Gurtung horizontal, wie in Fig. 231, dann wird die obere, parabolische zur Druckgurtung, die senkrechten Wandstreben sind auf Zug beansprucht. Das Umgekehrte ist in Fig. 236 der Fall. Charakteristisch für beide parabolische Träger ist, dass die schiefen Wandstreben bei symmetrisch verteilter Belastung spannungslos sind.

Wendet man, wie in Fig. 232 u. 233 ausgeführt, einen Kreisbogen an für die eine, hier obere Gurtung, so erhalten die Wandstreben Spannungen; die Verteilung von Druck und Zug in diesen hängt, wie aus den Entwickelungen der Kräftepolygone ersehen werden kann, von der Lage der schiefen Streben ab.

Die folgende Ausführung, Fig. 234, stellt einen sog. halbparabolischen Träger dar. In der Hauptfigur sind die Streben 14 und 21 fälschlich als Druckstreben gezeichnet, wie aus der Kräfteverteilung zu ersehen, sind sie auf Zug beansprucht.

Der Brückenträger, Fig. 237, hat 39 m Spannweite und sollen bei voller symmetrischer Belastung der Knotenpunkte an der oberen Gurtung, die Wandspannungen untersucht werden. Die Brückenbahn hängt an senkrechten Stangen, welche aber nicht als Brücken- oder Trägerstreben zu betrachten sind.

Das gesamte Eigengewicht der Brücke ist nach empirischen Formeln (s. d. Anhang) für eine Eisenbahnbrücke von 1 m Spannweite $35\,l + 550$ kg a. d. lf. m, das sind $35 \cdot 39 + 550 = 1900$ kg.

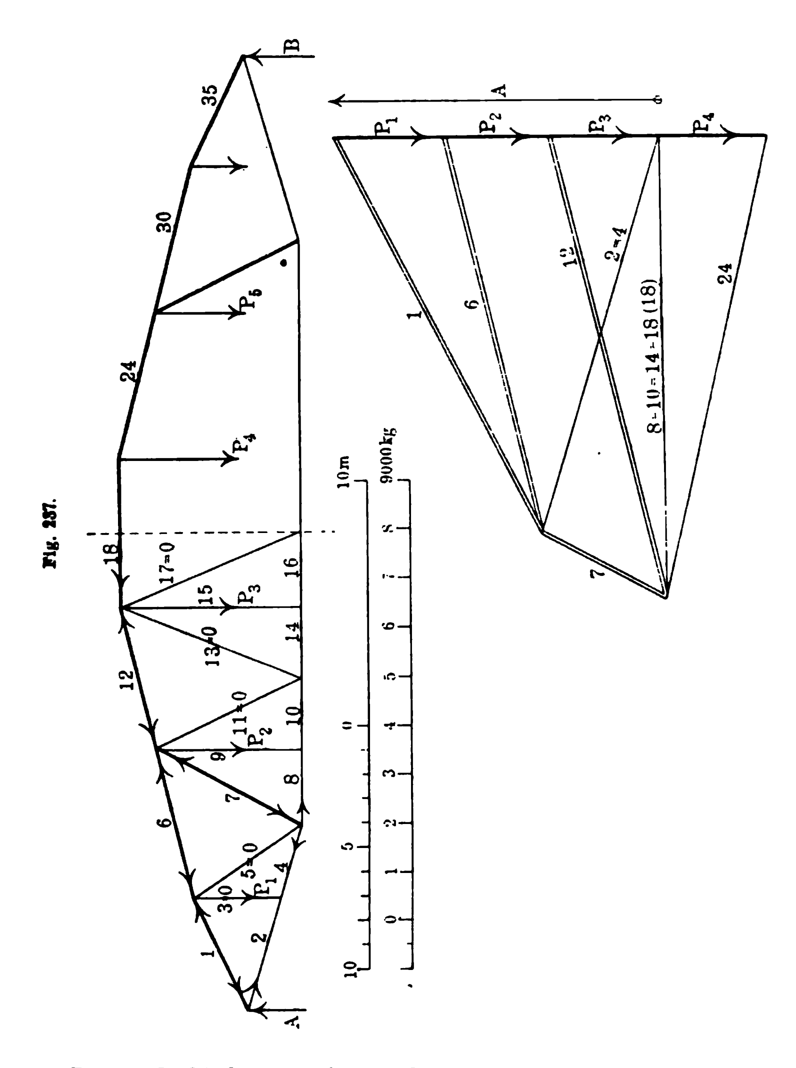
Auf der Brücke haben 3 Lokomotiven und 3 Tender Raum zum stehen, rechnen wir Lokomotive und Tender je dreiachsig, die erstere mit 15000 kg Achsenkraft, den Tender mit 9000 kg, dann ist die bewegliche Last der Brücke

$9 \cdot 15000 = 135000$ kg Lokomotivachsenlast

$9 \cdot 9000 = 81000$ „ Tenderachsengewicht,

in Summa 216000 kg; hierzu kommt das obige Eigengewicht $39 \cdot 1900$

= 74000 kg, also zusammen 216000 + 74000 = 290000 kg. Auf einen Träger reduziert $\frac{1}{2}$ 290000 = 145000 kg, auf 7 Felder verteilt, ergiebt sich für 1 Feld 21000 kg. In Fig. 237 haben wir für die Kräfteverteilung 6 belastete Knotenpunkte angenommen und diese zu $P_1 = P_2 =$


Fig. 237.

$P_3 \ldots P_6$ = 22000 kg gerechnet. Die in der Zeichnung gewählte Form des Trägers liefert bei symmetrischer Belastung einen Druckstab in dem Wandverband. Die Verteilung ist die folgende:

Kräfteplan des Brückenträgers, Fig. 237, bei symmetrischer Belastung.

Bezeichnung	Äuss. Kr.	Zug	Druck	Bezeichn.	Äuss. Kr.	Zug	Druck
Gegeben $P_1 = P_2 \ldots P_6 =$	22000	—	—	9	—	—	—
$A = B =$	66000	—	—	10	—	9500	—
1	—	9000	—	11	—	—	—
2	—	8600	—	12	—	9700	—
3	—	—	—	13	—	—	—
4	—	8600	—	14	—	9500	—
5	—	—	—	15	—	—	—
6	—	8200	—	16	—	9500	—
7	—	—	3000	17	—	—	—
8	—	9500	—	18	—	9500	—

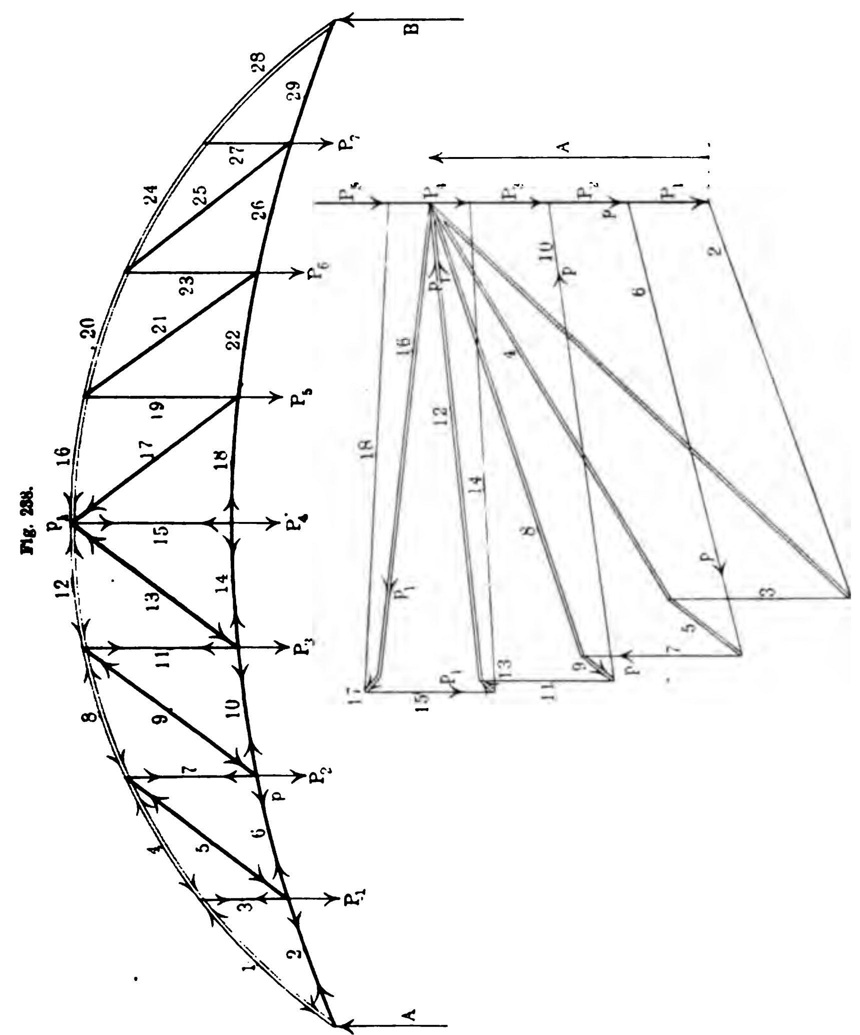
Die beiden folgenden Figuren 238 u. 239 sind Sichelträger. Beide Gurtungen sind kreisbogenförmig gekrümmt, die Wandung in Fig. 238 ist mit senkrechten Streben und hier infolge der an der unteren Gurtung angreifenden Belastung mit Zugstangen auszuführen. Die schiefen Streben sind auf Knickfestigkeit zu berechnen. Fig. 239 stellt wieder ein unsymmetrisches Wandsystem ohne senkrechte Streben dar. Die Belastung P_1 bis P_6 ist auch symmetrisch verteilt und wirkt auf die obere Gurtung. Ausser den Streben 5 und 11 besteht die Wandung aus Zugstreben.

Kräftepläne der Sichelträger, Fig. 240 und 241.

Bezeichnung	Äussere Kräfte	Kreisbogenform		Parabelform	
		Zug	Druck	Zug	Druck
$P_1 = P_9 =$	2250	—	—	—	—
$A = B =$	4500	—	—	—	—
1	—	—	41100	—	46300
2	—	34400	—	40000	—
3	—	3300	—	2800	—
4	—	—	38000	—	42700
5	—	1100	—	—	—
6	—	33800	—	—	39500
7	—	2200	—	2800	—
8	—	—	35300	—	40000
9	—	—	400	—	—
10	—	34700	—	34300	—
11	—	1000	—	2800	—
12	—	—	35000	—	39300
13	—	700	—	—	—
14	—	34000	—	39100	—
15	—	2600	—	2800	—
16 = 12	—	—	35000	—	39300
17 = 13	—	700	—	—	—
18 = 14	—	—	34000	39100	—

Die Entwickelung der Kräftepolygone ist aus den Hülfsfiguren ersichtlich.

Die folgenden letzten Figuren 240 u. 241 dieses Abschnittes sind zwei für das gleiche Dach konstruierte Sichelträger: In Fig. 240 sind die Gurtungen als Kreisbögen ausgeführt, in Fig. 241 vergleichsweise


Fig. 238.

als Parabeln. Die Belastungen in den Knotenpunkten sind wieder symmetrisch verteilt.

Die Spannweite ist 40 m, die obere Pfeilhöhe ist 7,5, die der unteren Gurtung 2,5 m, die Trägerhöhe über der Horizontalen sonach 8 m. Die Binder liegen in 5 m Entfernung voneinander. Nehmen wir

die Belastung zu 180 kg auf den qm Grundfläche an, so hat ein Binder die Last zu tragen:

$$180 \cdot 40 \cdot 5 = 36000 \text{ kg; sonach ein Feld}$$

$$\frac{36000}{8} = 4500 \text{ kg.}$$

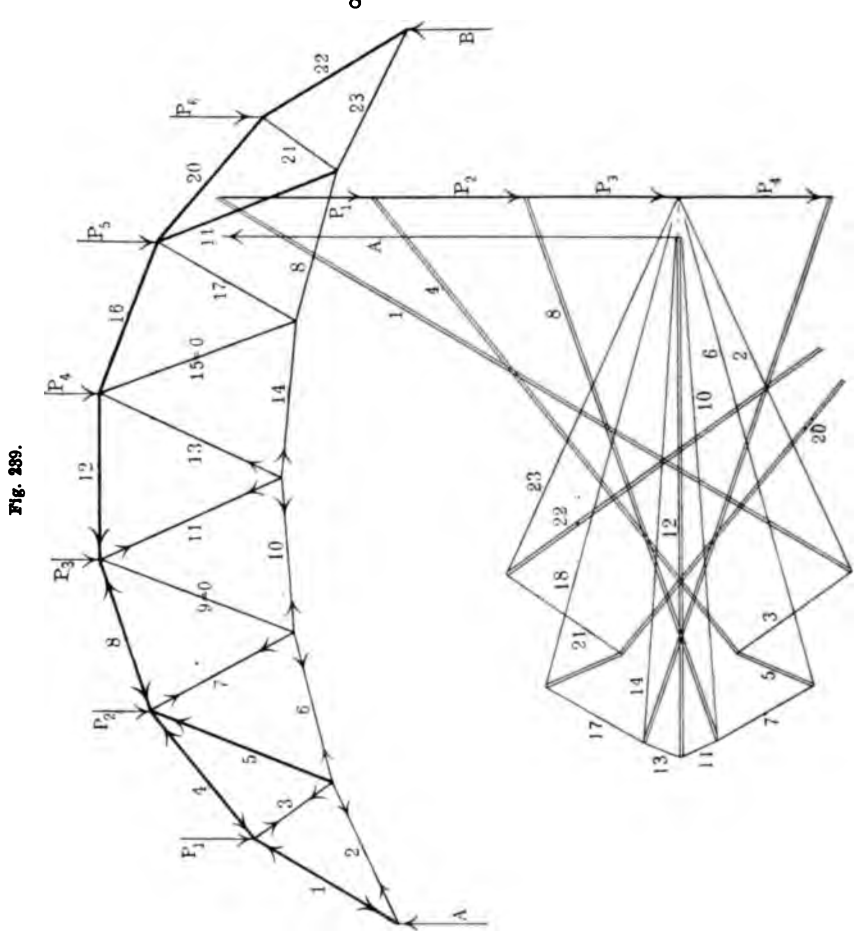


Fig. 239.

In Fig. 240 haben wir, wie auch aus den beigefügten Massstäben zu entnehmen ist, die Knotenlasten angenommen zu

$$P_1 = P_9 = 2250 \text{ kg und } P_2 = P_3 \ldots P_8 = 4500 \text{ kg.}$$

In dem Parabelsichelträger, Fig. 241, werden die schiefen Streben spannungslos. Die Verteilung der Kräfte in den Streben ist für beide Träger in der vorhergenden Tabelle enthalten. (Die Kräfte in Fig. 241 wurden auf den Massstab der Fig. 240 reduziert.)



Fig. 240 und 241.

B. Das Seilpolygon.

In unseren obigen Anschauungen gingen wir vom Parallelogramm der Kräfte aus, indem wir uns die Aufgabe stellten, für eine Reihe von Kräften, welche in verschiedenen Richtungen von einem Punkt O aus (Fig. 242) auf diesen einwirken, die Resultierende zu suchen, die Schluss-

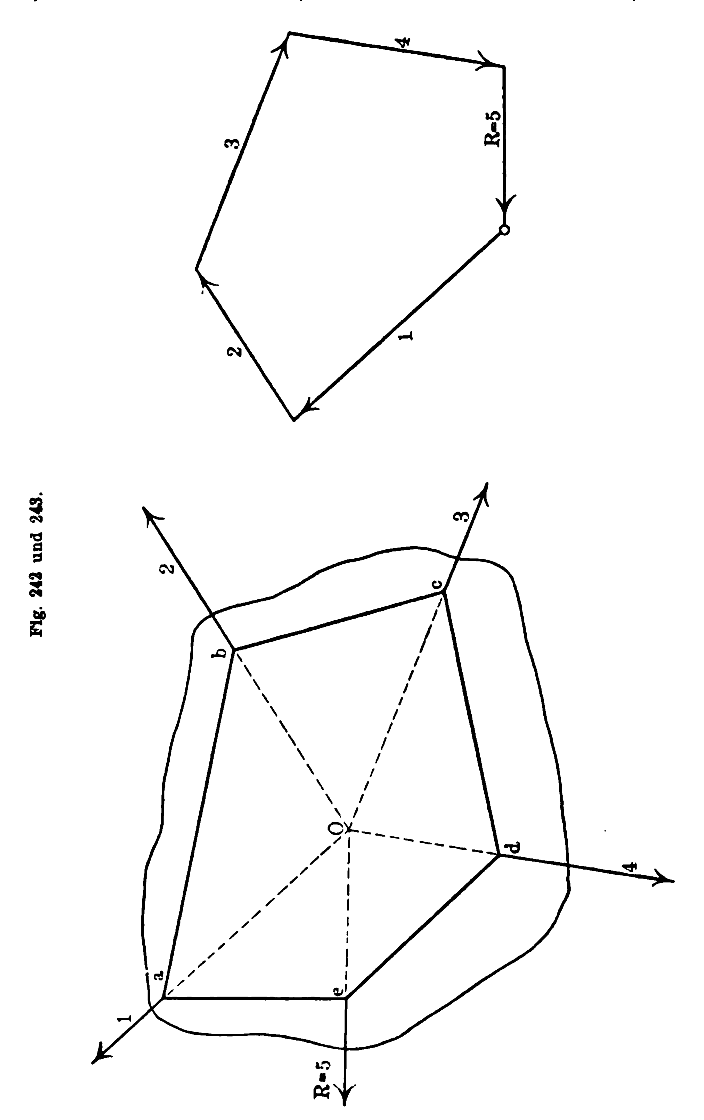


Fig. 242 und 243.

linie des uns bekannten Kräftepolygons liefert uns dieselbe; denken wir uns dieselbe noch als letzte Kraft auf O einwirkend angebracht, so zeigt uns das geschlossene Kräftepolygon den Gleichgewichtszustand um O an. Nimmt nun der Punkt O die Ausdehnung einer Fläche an, und lassen wir die Kräfte noch in derselben früheren Richtung in den Punkten a, b, c, d, e angreifen, so ist dies gleichbedeutend, als ob wir zwischen den Punkten

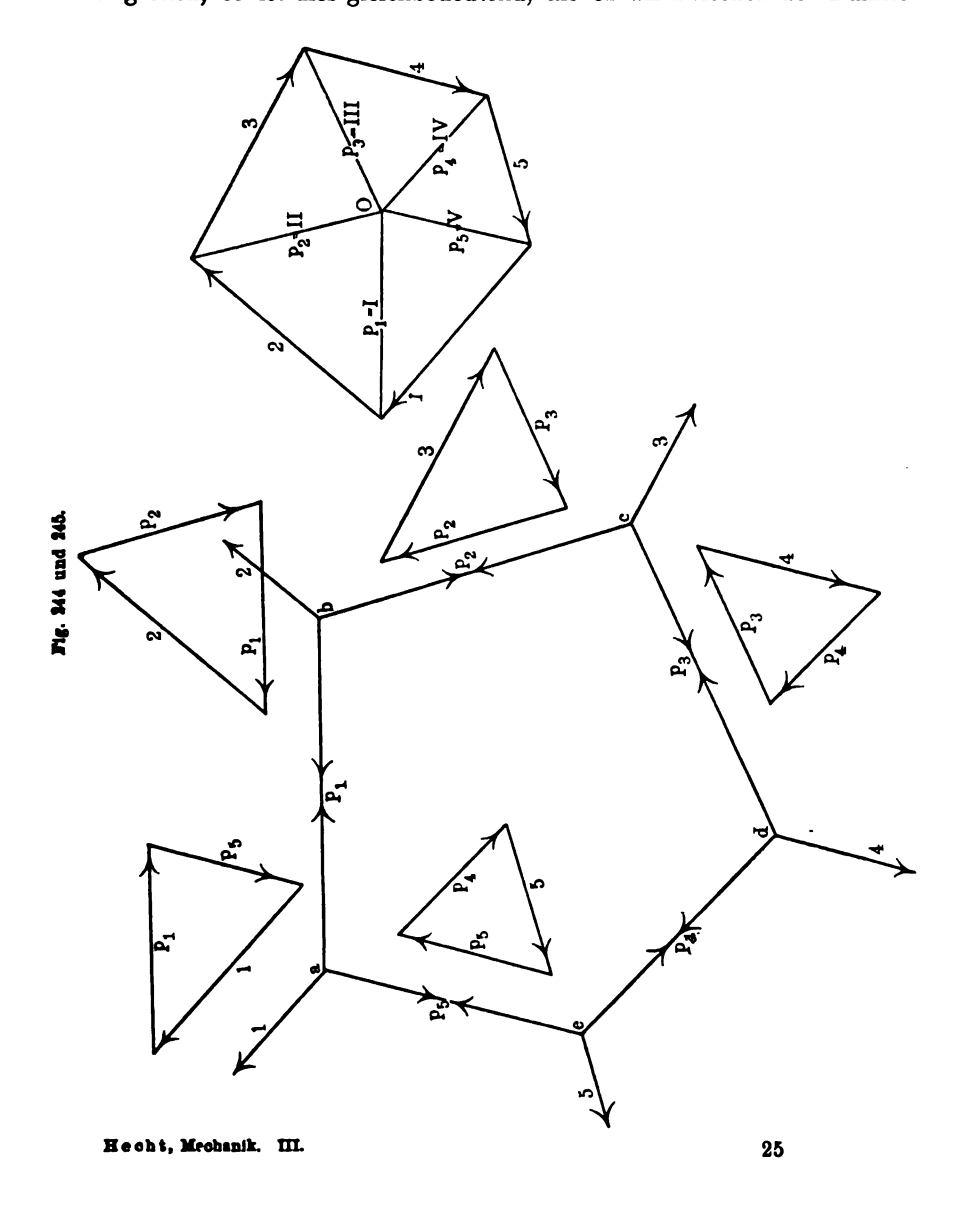


Fig. 244 und 245.

a und b, b und c, d und e, e und a ein Seil, eine Kette, ein Band oder Gelenkstangen einspannen würden, welche, wenn der Gleichgewichtszustand eingetreten ist, einem gespannten Seil, Ketten- oder Gelenkpolygon gleichkommt, Fig. 242.

Wir wollen uns nun zunächst die Aufgabe stellen, Lage und Gestalt eines solchen Seilpolygons a b c d e f, Fig. 244, durch Konstruktion zu finden.

Zerschneiden wir jeden Seilstrang, und bringen wir an den Schnittpunkten die Kräfte $\pm p_1$, $\pm p_2$, $\pm p_3$ u. s. w. an; die Kraft p_1 beispielsweise wirkt in a nach rechts, in b nach links u. s. w., so lässt sich jeder Gelenk- oder Seilknotenpunkt a, b, c ... als geschlossenes Kräftedreieck darstellen; um a wirken die 3 Kräfte 1, p_1 und p_5, um b die Kräfte

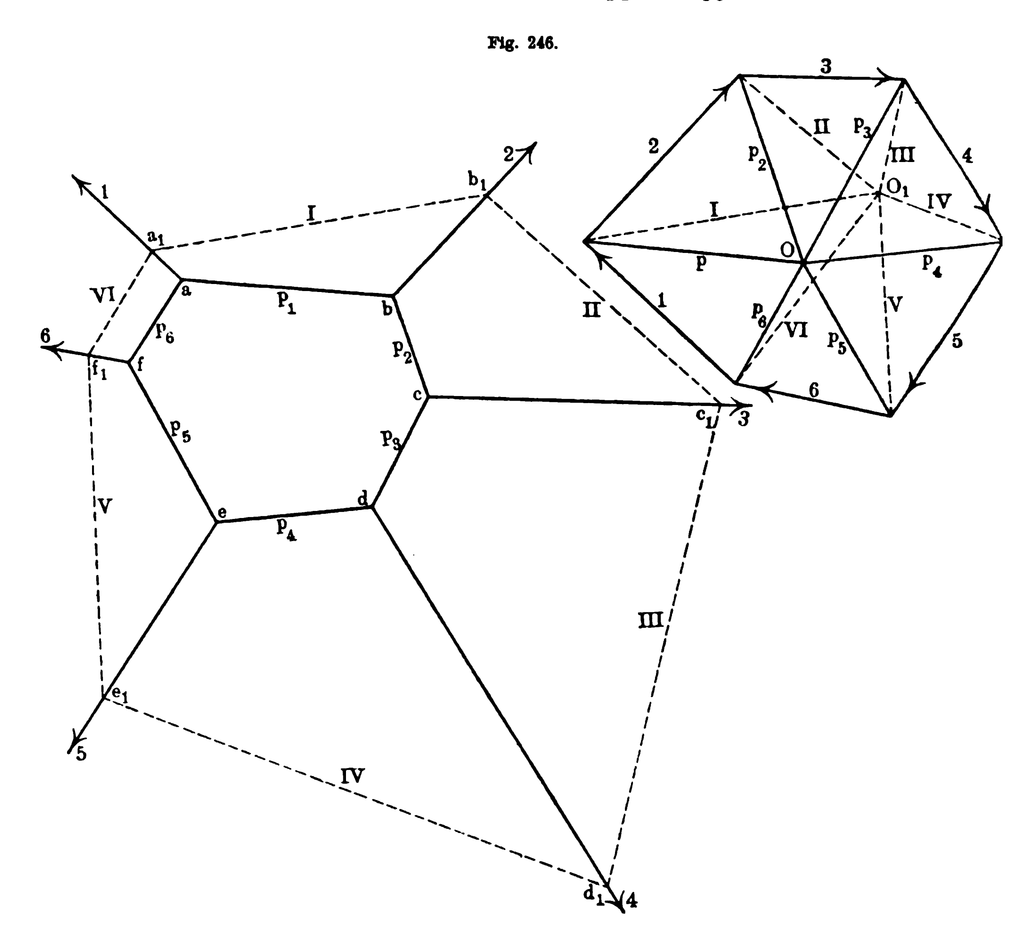
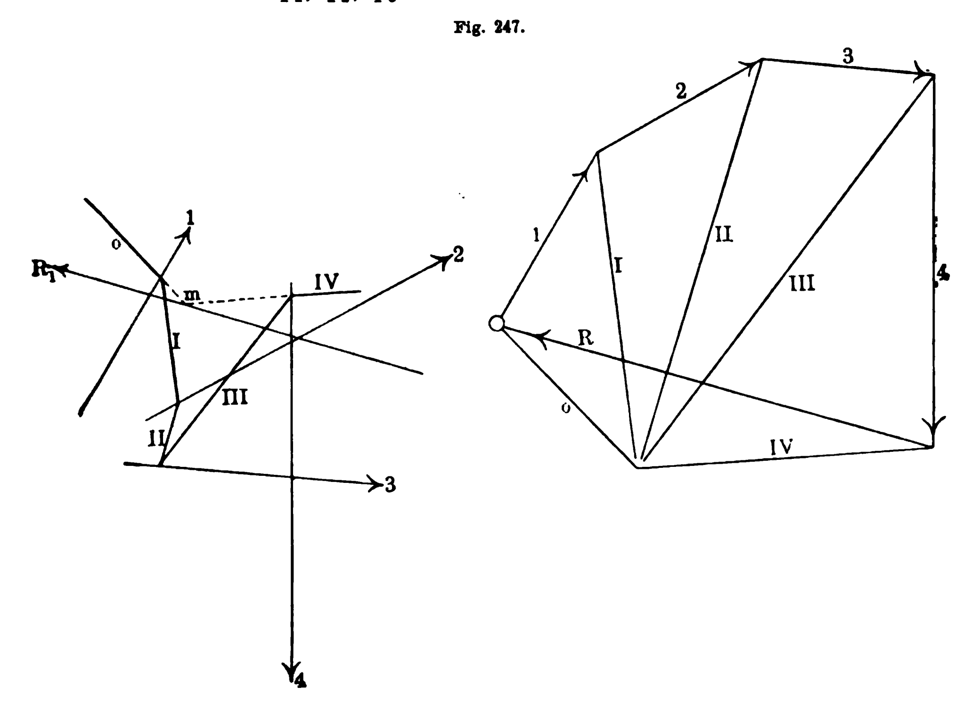


Fig. 246.

p_1, 2 und p_2 u. s. w. In Fig. 244 haben wir neben jedem Knotenpunkt das Kräftedreieck aufgezeichnet.

Wir stellen uns nun, wie in Fig. 245 geschehen, die sämtlichen Dreiecke in der Weise zusammen, dass sich die gleich bezeichneten Seiten decken, also vom Gelenkpunkt a, p_1 mit p_1 des Kräftedreiecks des Knotenpunktes b u. s. w. Es entsteht dann endgültig eine vollständig geschlossene Figur, deren äusserer Abschluss das Kräftepolygon 1, 2, 3, 4, 5 bildet, die sämtlichen Seilkräfte p_1, p_2, p_3 ... schneiden sich aber dann in einem Punkt O, dem Polpunkt; würden wir diesen umgekehrt angenommen haben und von demselben nach den Endpunkten des Kräftepolygons die sogenannten Polstrahlen I, II, III ... ziehen, so stellen diese Seilkräfte p_1, p_2, p_3 ... dar.

Fig. 247.



Jede andere Lage des Polpunktes bedingt offenbar eine andere Lage des Seilpolygons; in Fig. 246 haben wir zwei andere Polpunkte O_1 und O gewählt, wir können sonach den Schluss ziehen, dass es unendlich viel Möglichkeiten der Konstruktion des Seilpolygons giebt; man wird die Konstruktion desselben in der Weise ausführen, dass man den Polpunkt O wählt, die Polstrahlen (die Seilkräfte) zieht und diese

in die gegebenen Kräfte überträgt; in dieser Weise ist Fig. 246 ausgeführt. Man nimmt O_1 an, zieht die Seilkräfte I, II u. s. w. und überträgt diese derart, dass I zwischen 1 uud 2, II zwischen 2 und 3, III zwischen 3 und 4 u. s. w. zu liegen kommt.

Wir haben in vorstehender Fig. 247 mehrere beliebige Kräfte 1, 2, 3, 4 in der Ebene angenommen und konstruieren zunächst, von der Kraft 1 ausgehend, das Kräftepolygon, dessen Schlusslinie R die Resultierende der Kräfte ist. Den Polpunkt müssen wir ferner so legen, dass das Seilpolygon nicht zu weit von der Zeichenebene abweicht, so dass die zu übertragenden Polstrahlen I, II, III... möglichst in die gegebenen Kräfte oder in deren kurze Verlängerungen fallen, in der Hilfsfigur liegt er unterhalb R. Zwischen 1 und 2 wird I, zwischen 2 und 3 die Seilkraft II, zwischen 3 und 4 III in die Hauptfigur innerhalb der gegebenen Kräfte parallel übertragen. Die Endkräfte IV und o liegen zwischen 4 und R, und 1 und R; sie werden an die betreffenden angeschlossen, o an I und 4 an III, ihre Verlängerung liefert den Schnittpunkt m, von hier aus wird m R_1 parallel zu R gezogen, die 3 Kräfte o, IV und R_1 sind im Gleichgewicht, weil sie von ihrem geschlossenen Kräftedreieck o R IV übertragen wurden. Da nun die Kräfte 1, 2, 3, 4 im Kräftepolygon im richtigen Massstab aufgetragen wurden, so stellt R die Grösse und Richtung, m R_1 die Lage der Resultante dar.

Es kann nun ebensowohl der Fall eintreten, dass eine Reihe paralleler Kräfte gegeben sind, 1, 2, 3, 4, 5, Fig. 248; das Kräftepolygon dieser ist eine gerade Linie, ab = R, die Resultierende. Der angenommene Polpunkt 0 muss hier ausserhalb der Kräfte fallen. Übertragen wir die Seilkräfte 0, I, II, III, IV in derselben Weise wie oben, so dass zwischen 1 und 2, I, zwischen 2 und 3, II, zwischen 3 und 4, III u. s. w. zu liegen kommt, schneiden o und V in m und ziehen R parallel R_1, so ist $R = \Sigma P$ die Mittelkraft der parallelen Kräfte; bei Annahme einer Linie xy ist S der Schwerpunkt, Sm ist Schwerlinie. Die Kräfte o, V und R bilden wieder das geschlossene Kräftedreieck abO.

Man findet also den Schwerpunkt einer Geraden, auf welche parallele Einzelkräfte wirken, mit Hülfe eines Seilpolygons der Kräfte. Diejenige Gerade, welche durch den Schnittpunkt der ersten und letzten Seite dieses Seilpolygons parallel zu der Richtung der gegebenen Kräfte gezogen wird, geht durch den gesuchten Schwerpunkt.

In Fig. 249 sind 5 Kräfte gegeben 1...5., welche unter sich parallel auf einen Balken einwirken; man trägt dieselben der Reihenfolge nach auf st auf und wählt in beliebiger Entfernung den Polpunkt

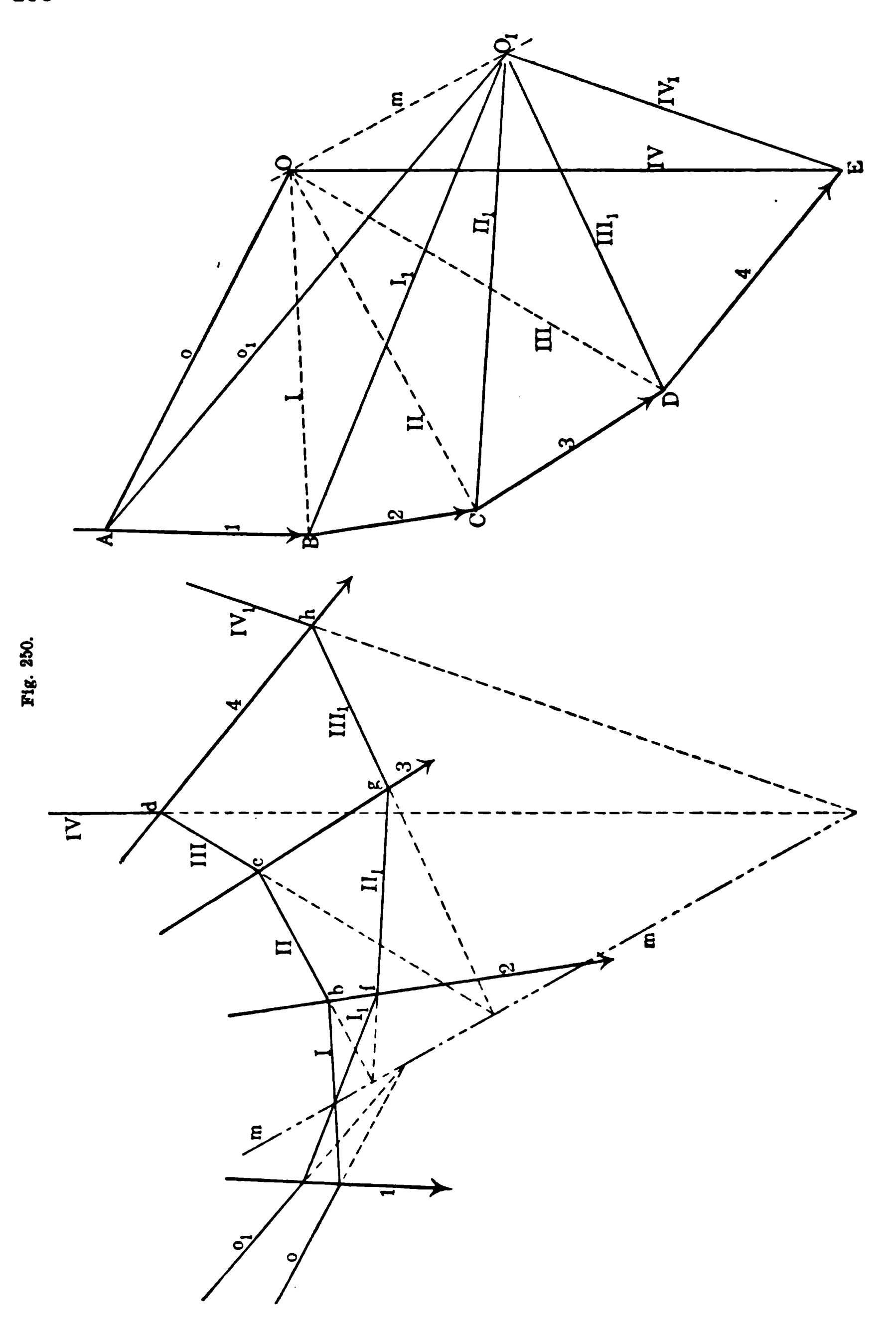


Fig. 250.

O, zieht die Seilkräfte 0, I, II, III, IV, V, überträgt diese in die Belastungslinien 1, 2 ... 5, verlängert die äussersten Linien O und V bis zum Schnittpunkt m, und zieht schliesslich mn parallel st, der Schnittpunkt S ist Schwerpunkt.

Es sind, Fig. 250, mehrere beliebige Kräfte gegeben, 1, 2, 3, 4; diese sind in der Nebenfigur unter A B C D E aneinander getragen. Wählt man nun zwei Polpunkte O und O_1 und konstruiert die beiden Seilpolygone I II III ... und $I_1\, II_1\, III_1$ ..., so erhält man durch die Verbindungslinie m m der Schnittpunkte der gleichnamigen Seilkräfte $o\, o_1$; $I\, I_1$; $II\, II_1$; $III\, III_1$; $IV\, IV_1$ eine gerade Linie, welche bei genauer Zeichnung der Verbindungslinie m der Pole $O\, O_1$ parallel ist. Durch diese Konstruktion wird zugleich eine Kontrolle für die Richtigkeit der Zeichnung geboten.

Im Viereck $C D O O_1$ ist $C O = II$ parallel b c
$D O_1 = III_1$ „ g h
$c g = P_3$ „ C D;

im Viereck $D O E O_1$ ist $O D = III$ parallel c d
$E O_1 = IV_1$ „ IV_1 durch h gezogen,
$d h = P_4$ „ D E

u. s. w., so dass schliesslich m m parallel $O\, O_1$ werden muss.

Beispiele. I. Der Schwerpunkt eines Kreisbogens, Fig. 251, soll graphisch bestimmt werden. Derselbe liegt zunächst in der Symmetrie- bezw. Mittellinie, zugleich Schwerlinie o p. Teilen wir nun den Bogen in (hier) 5 gleiche Teile 1, 2, 3, 4, 5, so stellt ein solches Element ein Gewichts- oder Kraftelement dar, welches wir uns unter einer der Schwerlinie p o nicht parallelen Richtung wirkend, denken können. Diese Kräfte tragen wir parallel auf s t auf, nehmen O an und konstruieren das Seilpolygon wie oben, die zu s t parallele Linie durch m geht durch S, den gesuchten Schwerpunkt.

II. Es soll der Schwerpunkt eines nach einer Seite unsymmetrischen doppelt Tförmigen Querschnittes bestimmt werden. Um den Schwerpunkt von Flächen zu suchen, müssen wir, wenn nicht Symmetrie vorliegt, zwei Schwerlinien konstruieren; ferner müssen wir die Flächen in symmetrische Elemente einteilen, von deren Mittelpunkten aus wir Kräfte angreifen lassen, welche den Flächeninhalten proportional sind. Den Querschnitt, Fig. 252, teilen wir in 3 Elemente, deren Flächengrössen mit 1, 2, 3 bezeichnet, als Kräftelinie aufgetragen wird. Nach Annahme von O ziehen wir die Polstrahlen 0, I, II, III, übertragen diese parallel in

die Kräfte und finden S als Schwerpunkt, indem die Schwerlinie m S die Symmetrielinie des Querschnittes in S schneidet.

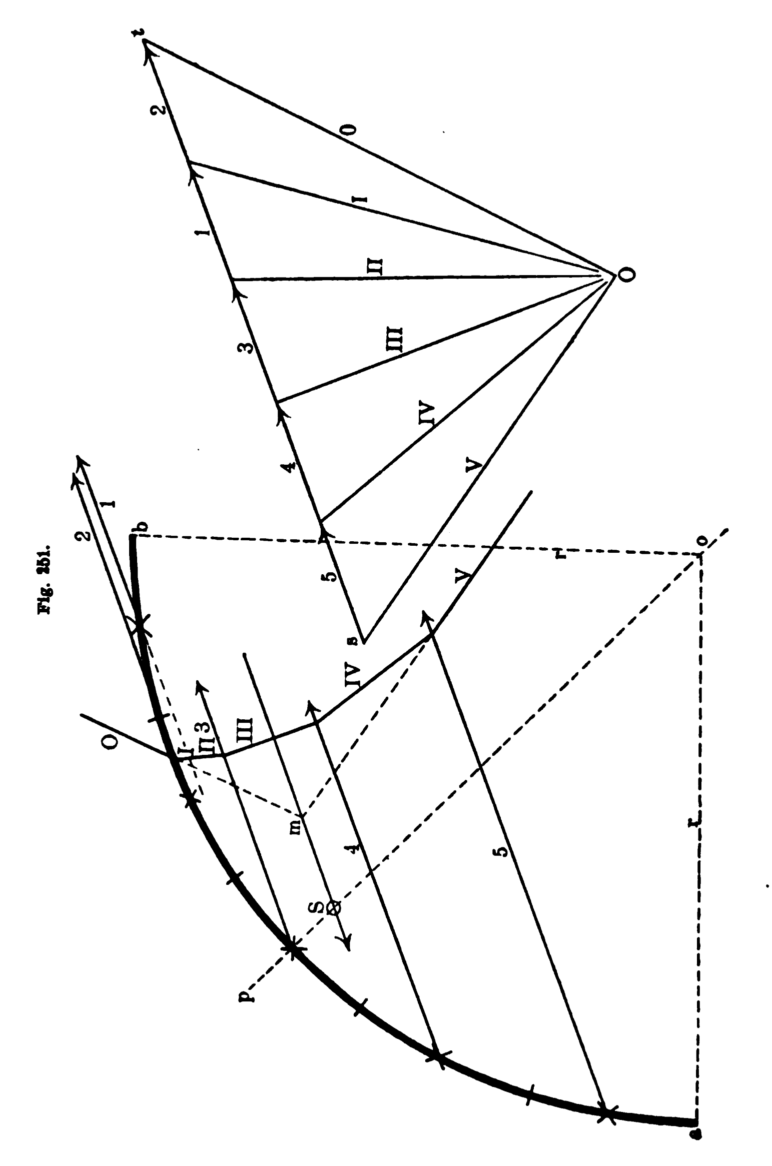


Fig. 251.

III. In nachstehendem einfachen Tförmigen Querschnitt, Fig. 253, sind nur zwei Flächenelemente erforderlich, welche man als Kräfte am

Fig. 252.

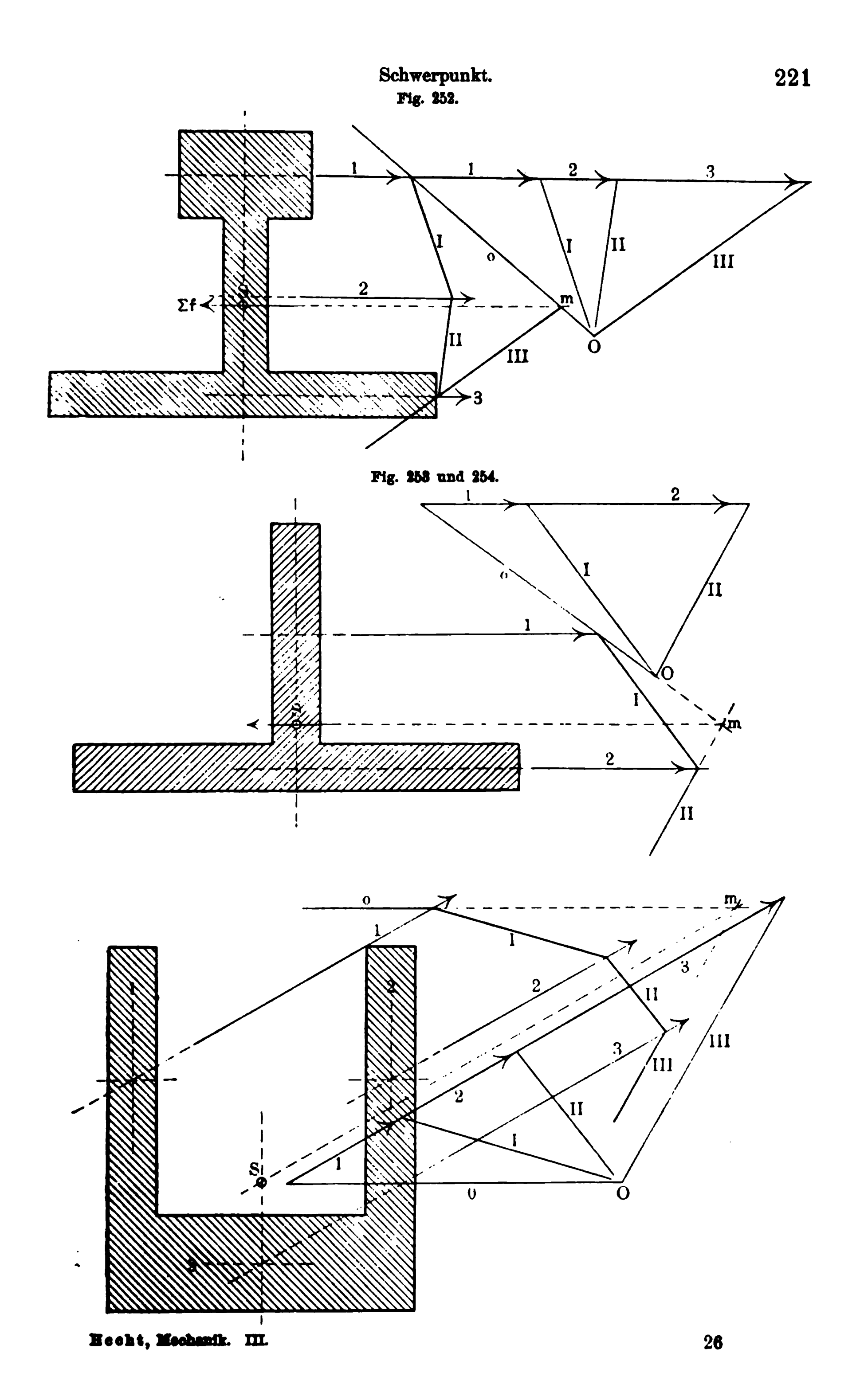


Fig. 253 und 254.

besten senkrecht zur Symmetrielinie wirkend, aufträgt. Die Ausführung der Konstruktion ist die gleiche wie oben.

IV. Die Fig. 254 stellt einen Uförmigen Querschnitt dar, dessen Schwerpunkt ermittelt werden soll. Man zerlegt den Querschnitt in drei Elemente, 1, 2, 3, deren Inhalte massgebend für die Kräfte sind; die Angriffspunkte der letzteren liegen in den Mittelpunkten der Elemente. Die Ausführung der Zeichnung schliesst sich der obigen unmittelbar an.

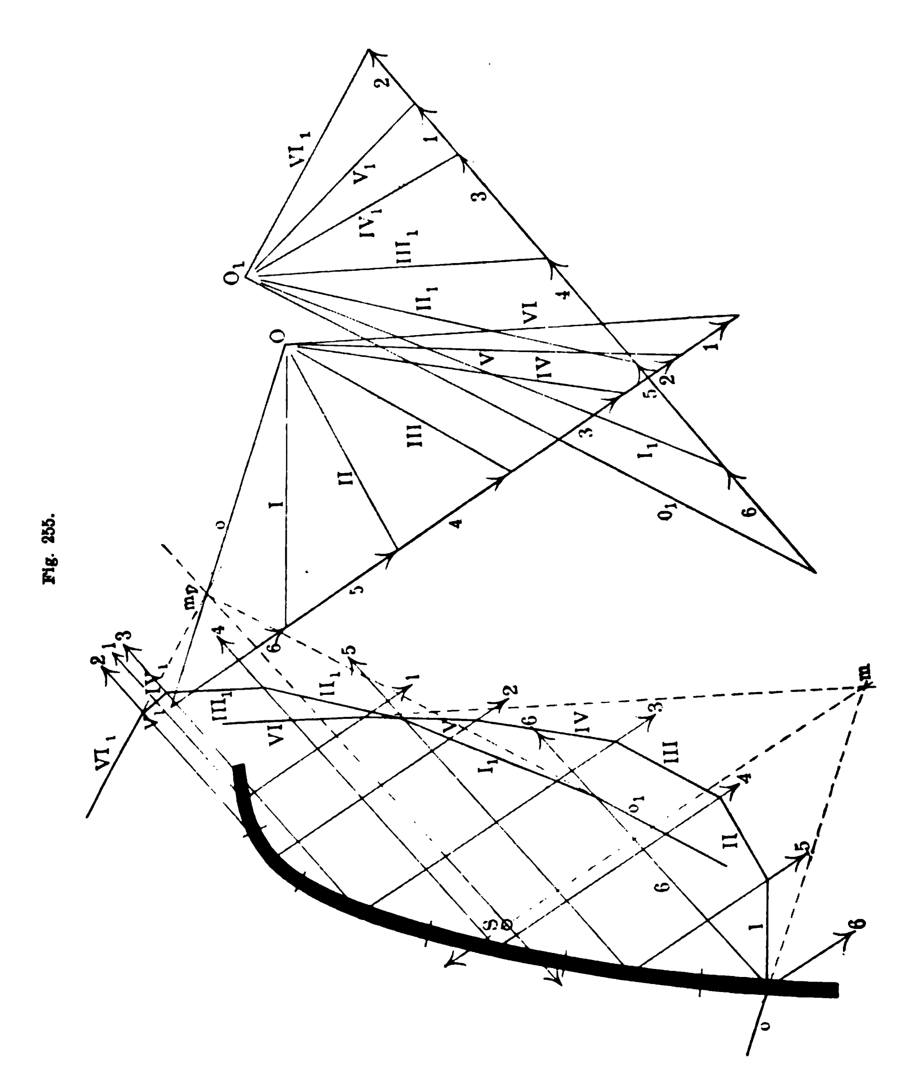


Fig. 255.

V. In Fig. 255 haben wir einen nach einem Kegelschnitt (hier nach einer Parabel) gekrümmten Bogen angenommen, der Schwerpunkt soll bestimmt werden. Da, wie uns bekannt, hier keine symmetrische Krümmung vorliegt, sind auch zwei Schwerlinien zu ermitteln, deren Schnitt den Schwerpunkt liefert. Auch hier ist auf die Reihenfolge der Kräfte in der Kraftlinie und im Seilpolygon zu achten; es wurden 6 Elemente angenommen.

VI. Um den Schwerpunkt des Querschnittes einer Eisenbahnschiene zu bestimmen, Fig. 256, zerlegt man denselben in gleich breite Streifen, f_1 bis f_{14}, und trägt die Flächeninhalte derselben auf einer Kräftelinie auf. Von den Mittelpunkten, bezw. von den Schwerpunkten der Flächenstreifen zieht man parallel der Kräftelinien die Flächenlinien f_1, f_2 bis f_{14}, wählt den Polpunkt O, zieht die Polstrahlen und konstruiert das Seilpolygon 0, I, II, III... bis XIV. Die Verlängerung der Schlusslinien o und XIV schneiden sich in m; die Mittelkraft der parallelen Kräfte Σf, parallel der Kräftelinie, schneidet in der Symmetrielinie des Schienenquerschnittes den Schwerpunkt S. Die Flächenelemente f_1, f_2.. rechnet man am besten in qcm und trägt die Flächen selbst als Längen in cm auf.

VII. Der Querschnitt, Fig. 257, ist ein unsymmetrischer, und haben wir ihn in 4 Elemente zerlegt; 1 bis 4. Die Inhalte derselben zu berechnen, ist hier nicht erforderlich, man kann die Seitenlängen als Vertreter der Kräfte, bezw. Flächen $f_1 \ldots f_4$ nehmen, weil der gegebene Querschnitt gleiche Breiten hat. Man ist aber genötigt, zwei verschiedene Kräfterichtungen anzunehmen und erhält auch zwei Seilpolygone, deren Endkräfte sich in m und m_1 schneiden. Bei der Konstruktion der Seilpolygone ist auf die Reihenfolge, auf die Lage der Flächenelemente zu achten; während für den Polpunkt O die Reihenfolge 1, 2, 3, 4 sein kann, muss die Reihenfolge für O_1, weil das zweite Flächenelement 2 am äussersten links liegt, zu Anfang gestellt werden, auf 2 folgt 1, dann 3 und 4. Der Schnittpunkt der Schwerlinien m_1 S und mS liefert den Schwerpunkt.

VIII. Der unsymmetrische Querschnitt, Fig. 258, ist in 5 Flächenelemente zerlegt, $f_1 = 353$, $f_2 = 1700$, $f_3 = 1430$, $f_4 = 319 + 319 = 638$ und $f_5 = 510$ Quadrateinheiten. Das Endstück f_1 ist halbkreisförmig und f_4 rechtwinkelig ausgespart. Auch hier sind zwei Seilpolygone erforderlich, deren angenommene Belastungsrichtungen sich nahezu rechtwinkelig kreuzen. Die Reihenfolge der Kräfte, im Kräftepolygon zum Polpunkt O gehörend, ist f_1, f_2, f_5, f_4, f_3. Der Schnittpunkt S, der

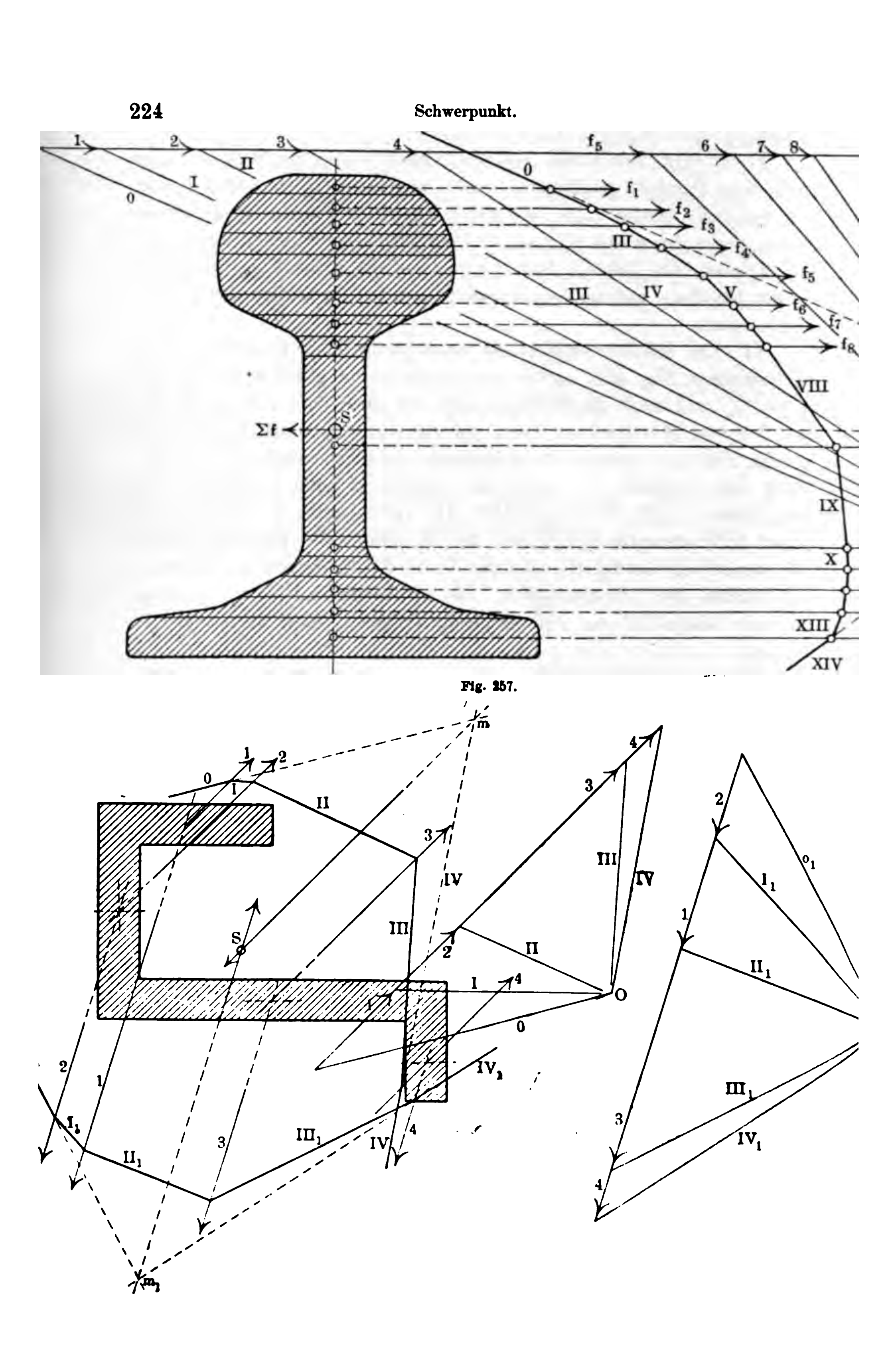

1
2
3
4
f5
6
7
8
0
I
II
f1
f2
f3
f4
f5
f6
f7
f8
III
IV
V
VIII
S
Σf
IX
X
XIII
XIV
m
0
1
2
II
3
4
III
IV
S
I
O
o_1
I_1
II_1
III_1
IV_1
IV_1
m_1

Fig. 257.

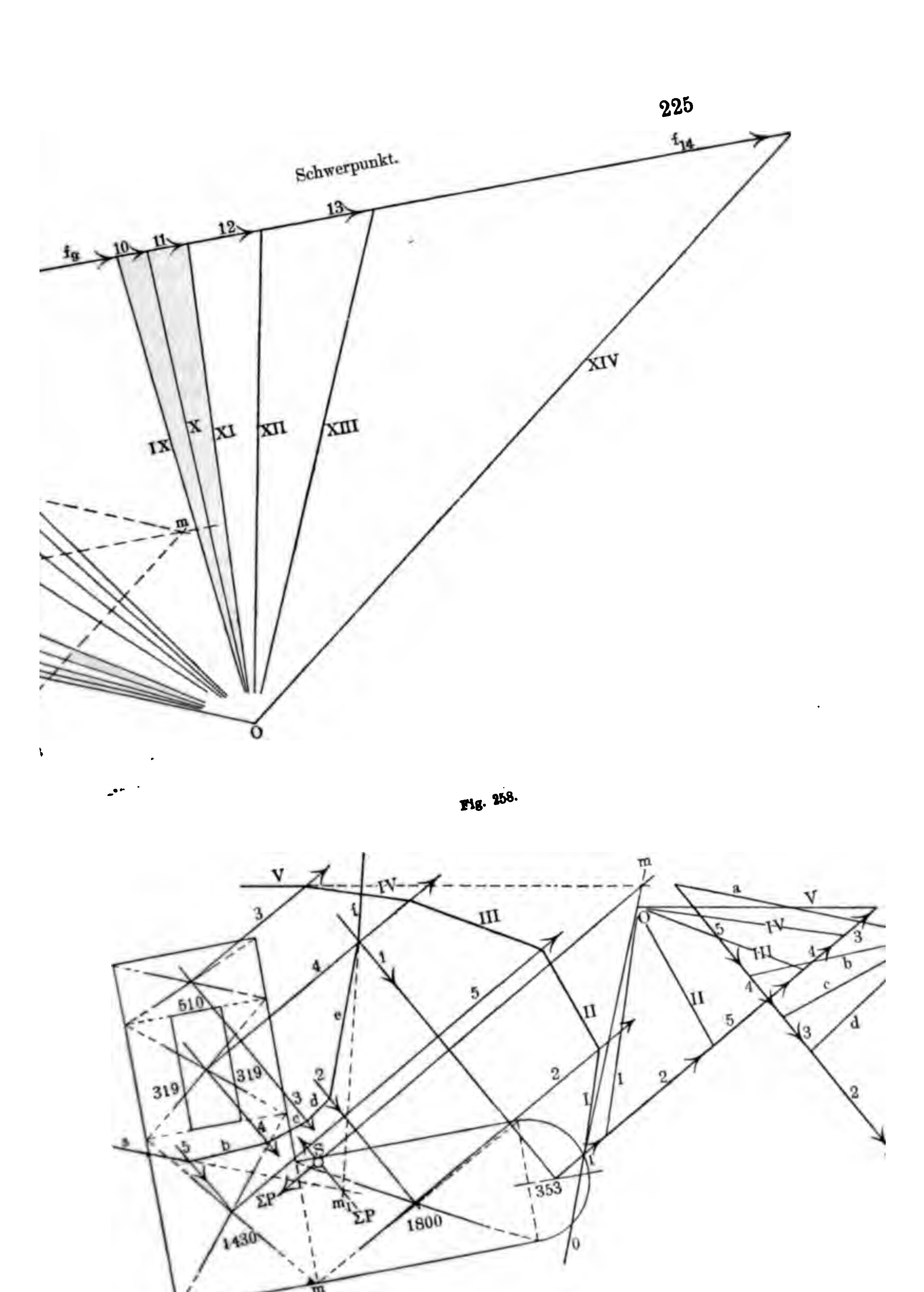
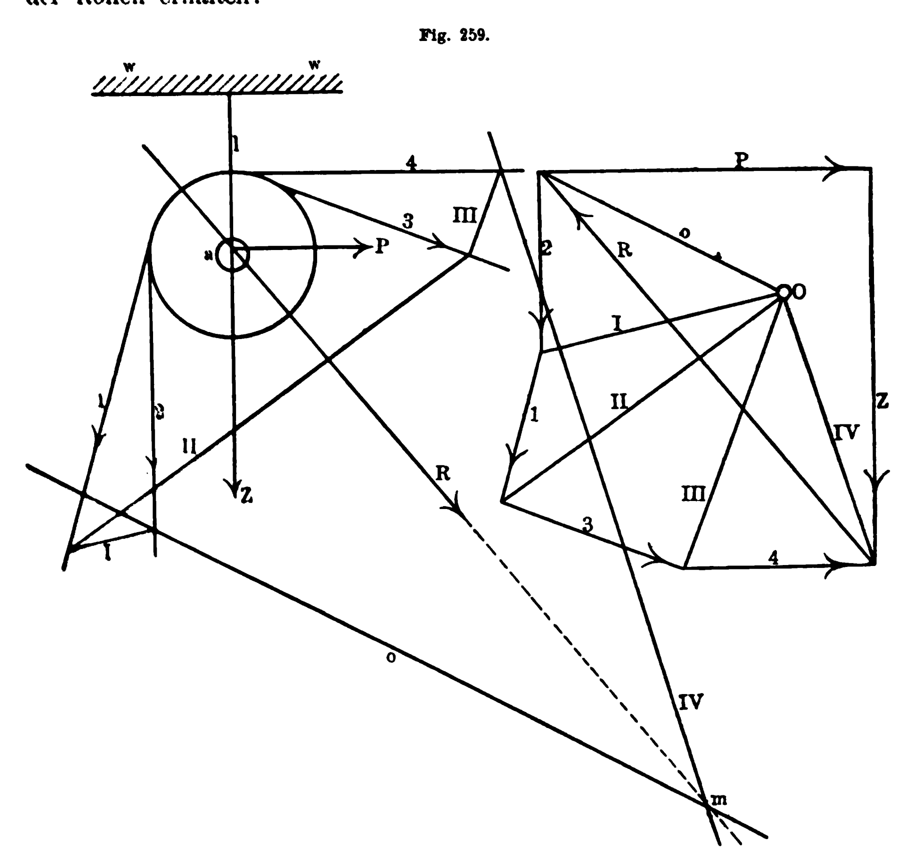

Schwerpunkt.
f14
13
12
11
10
f9
IX
X
XI
XII
XIII
XIV
m
O
V
IV
III
II
I
510
319
319
353
1800
1430
ΣP
ΣP
S
a
b
c
d
e
f

Fig. 258.

Schwerpunkt, fällt nahezu in die innere Seite der Fläche des gegebenen Querschnittes.

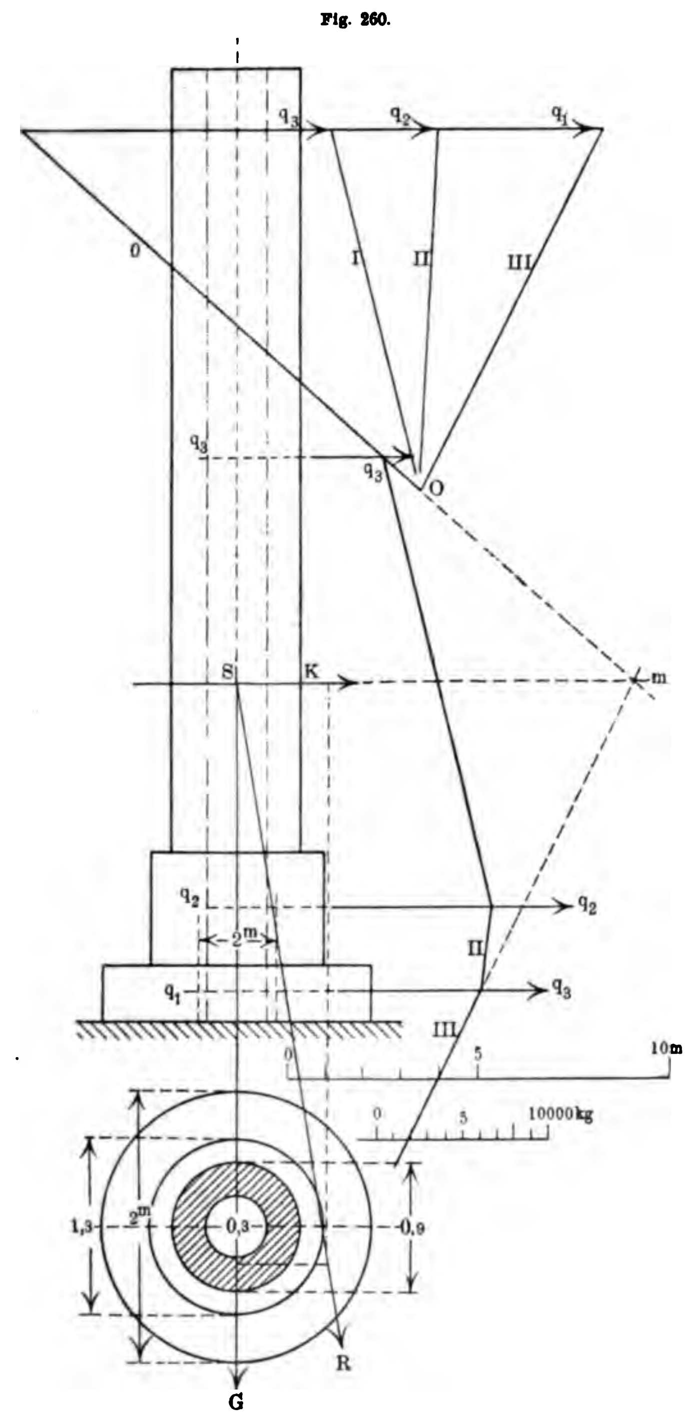
IX. Auf einer Achse a, Fig. 259, sind mehrere, hier 2 Rollen befestigt, so dass sie sich lose um die Achse drehen können. Über jeder Rolle liegt ein Seil oder eine Kette, welche durch die Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 angespannt werden, welche Dimensionen muss die Befestigungsstange der Rollen erhalten?

Fig. 259.



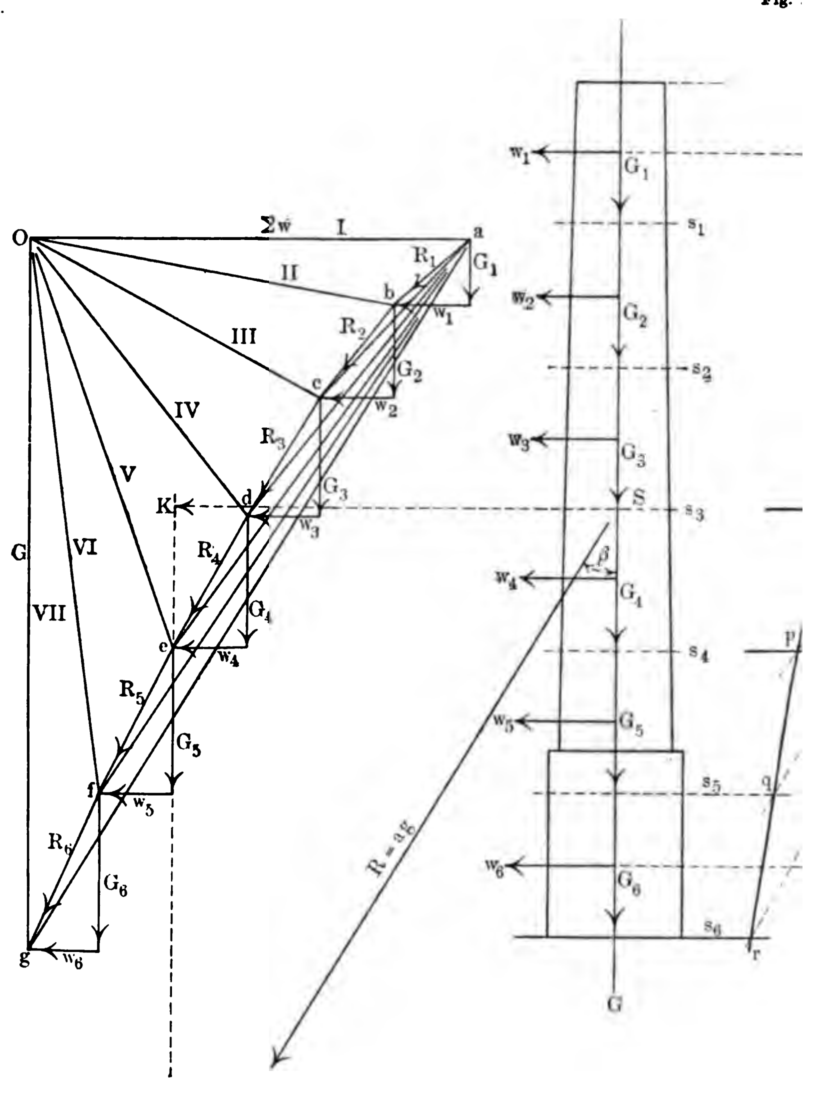
Die Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 bezw. 1, 2, 3, 4, in irgend einer Reihenfolge aufgetragen, liefern die Resultante R, konstruiert man mit dem Polpunkt O ein Seilpolygon o, I, II, III, IV und überträgt dasselbe, so liefert der Schnitt der Seilkräfte o und IV die Lage der Resultierenden, somit deren Entfernung l von der Wand ww. Zerlegt man R in P und Z, dann bewirkt P eine Ausbiegung der Befestigungsstange oder des Rahmens und Z beansprucht auf Zug.

Fig. 260.


q3
q2
q1
0
I
II
III
q3
q3
O
S
K
m
q2
q2
2m
II
q1
q3
III
0
5
10m
0
5
10000kg
1,3
2m
0,3
0,9
R
G

Ist f der Querschnitt der Stange, so ist die Zugspannung $k_z = \frac{Z}{f}$, und wenn W das Widerstandsmoment des Querschnittes ist, so ergiebt sich als Biegungsspannung $k_b = \frac{M}{W} = \frac{Pl}{W}$, die Summe beider $k_i = k_z + k_b$ darf eine gewisse zulässige Spannung, wie uns aus dem II. Band, S. 293, etc. bekannt ist, nicht überschreiten. Aus der Figur folgt

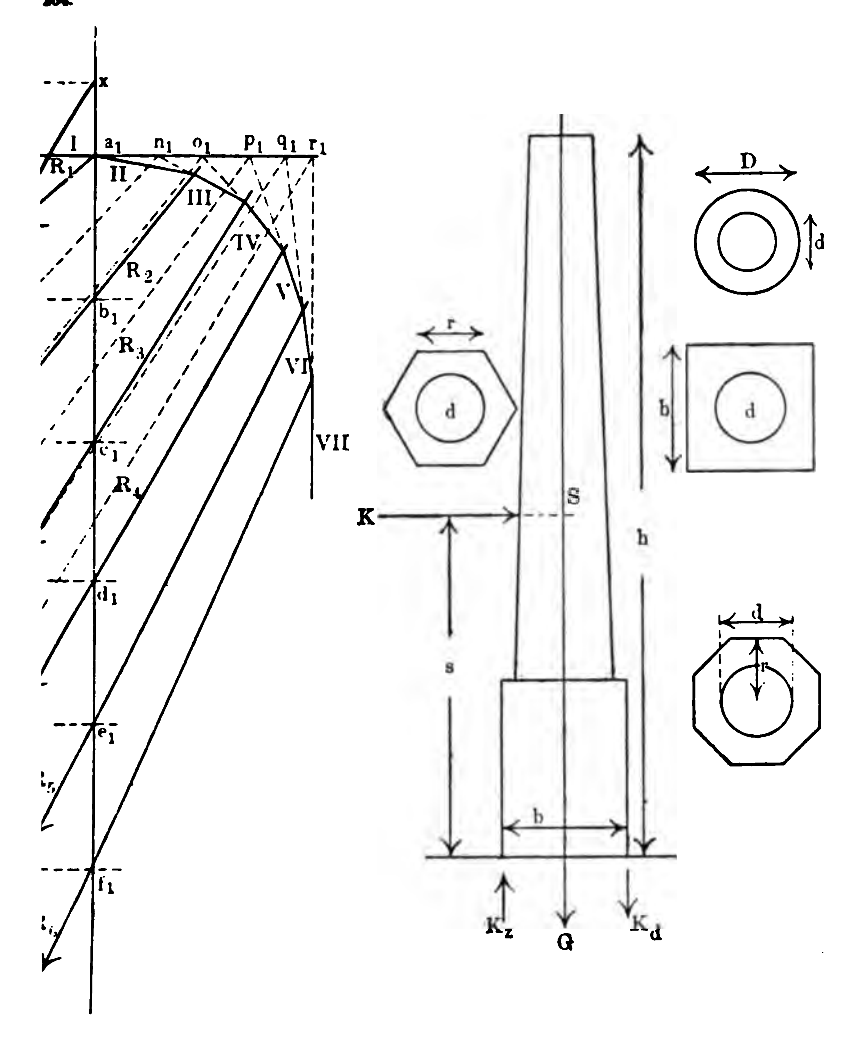
Fig.



z. B. R = 540 kg, bezw. P = 340, Z = 410; ferner sei l = 40 cm, und der Stangenquerschnitt a = 4, b = 8 cm, f = ab = 32 qcm, W = $\frac{1}{6}\,4\cdot 8^2 = 43$; so folgt

$$k_1 = \frac{410}{32} + \frac{310\cdot 40}{43} = 330 \text{ kg auf den qcm.}$$

X. Die gegenwärtige Aufgabe bietet durch Anwendung des Seil-
264. polygons und der graphischen Konstruktion des Schwerpunktes ein Bei-



spiel zur Stabilitätstheorie; sie ist eine Ergänzung der in Band I, S. 178 enthaltenen Berechnung eines Bauwerkes auf Winddruck, oder vielmehr die graphische Lösung der dort durchgeführten Berechnung. Das Bauwerk, ein Schornstein von 18 m Höhe aus drei hohlen cylindrischen Elementen bestehend, deren Gewichte $q_1 = 9824$; $q_2 = 6032$ und $q_3 = 18096$ kg sind, hat ein Gesamtgewicht von $G = q_1 + q_2 + q_3 = 34000$ kg. Die Angriffspunkte der Belastungen q_1, q_2, q_3 liegen hier in der Mitte der 3 Cylinder. Trägt man q_1, q_2, q_3 in einer Kraftlinie auf, Fig. 260, nimmt O an, so findet sich durch das Seilpolygon der Schwerpunkt S; das Mauerwerk ist zu 1600 kg für den cbm angenommen. Der Winddruck K ist mit 200 kg auf den qm berechnet und mit $K = 5200$ kg als horizontale Teilkraft in S angetragen. Die Resultierende aus W und Q ergiebt, dass dieselbe ausserhalb der Basis fällt, wie auch die Rechnung in Band I dasselbe Resultat liefert. In der Figur sind allerdings die Breitendimensionen in der Zeichnung vergrössert aufgetragen, um die Deutlichkeit der Figur nicht zu beeinträchtigen. Aus der Zeichnung können wir also folgern, dass das Bauwerk gegen Winddruck nicht die genügende Stabilität besitzt, die Basis ist zu klein.

Wir nehmen gleichzeitig im folgenden die Gelegenheit wahr und schliessen an dieser Stelle die graphische Darstellung der Drucklinie, die Widerstandslinie des Druckes an, welche uns den Verlauf des von der Seitenkraft des Windes herrührenden Druckes von der Spitze, bis zum Fundament des Schornsteines angiebt. Im I. Band, S. 200 u. f., haben wir die analytische Berechnung der Drucklinie eines belasteten Gewölbes besprochen, und werden wir weiter unten auch die graphische Berechnung kennen lernen. Die Drucklinie muss, wenn der Bau stabil ist, innerhalb der Fugen bleiben und darf, wie uns aus dem I. Bd. bekannt, die unterste Fuge nicht ausserhalb schneiden, da sonst ein Umsturzmoment entstehen würde, welchen Fall, wie wir oben gesehen, die Fig. 260 darstellt.

Wir tragen zunächst das Bauwerk, hier den Schornstein, nach den berechneten Dimensionen auf. Die letzteren ermitteln wir aus dem Winddruck K, Fig. 260, und dem Gewicht des Schornsteines G. Angenommen der Wind wirkt, wie in der Fig. angenommen, von der linken Seite, so erzeugt derselbe in der äussersten linken Fuge eine Zugspannung k_z, in der äussersten rechten eine Druckspannung k_d. Da nun das Gewicht G des Schornsteines selbst auch noch eine Druckspannung k_d erzeugt, so kommen zur Kombination zu einer idealen Spannung k_i die

Gleichungen 155, 156, Band II, S. 292 u. f., der zusammengesetzten Festigkeit in Betracht.

Die Druckspannung, abhängig vom Gewicht des Schornsteins, ist $k_d = \frac{G}{f}$, wenn f der Querschnitt, die Biegungsspannung von der Seitenkraft K ist $\pm k_b = \frac{K s}{W}$, wenn W das Widerstandsmoment des Querschnittes. Beide kombinieren sich zu einer idealen Spannung K_i, und zwar

$$\left.\begin{aligned} &\text{auf der Druckseite} \quad k_i = -\left(\frac{K s}{W} + \frac{G}{f}\right) \\ &\text{auf der Zugseite} \quad k_i = \frac{K s}{W} \mp \frac{G}{f} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (23)$$

Die negativen Werte von k_i entsprechen der noch zulässigen Druckspannung*)

$$-k_i = k_d \leqq 5 + 0{,}15\, h^m \text{ kg auf den qcm} \quad \ldots \quad (24)$$

Die positiven der noch zulässigen Zugspannung

$$+k_i = k_z \leqq 1{,}3 + 0{,}013\, h^m \text{ kg auf den qcm} \quad \ldots \quad (24a)$$

Die Widerstandsmomente der am meisten verwendeten Querschnitte f sind, Fig. 264,

Ringförmiger Querschnitt

$$W = \frac{\pi}{32}\,\frac{D^4 - d^4}{D},\; f = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) \quad \ldots \quad (25)$$

Quadratischer Querschnitt, bei senkrechtem Seitendruck

$$W = \frac{\frac{1}{12} b^4 - \frac{\pi d^4}{64}}{\frac{1}{2} b} = \frac{5 b^4 - 3 d^4}{30 b},\; f = b^2 - \frac{\pi d^2}{4} \quad . \quad (26)$$

bei Kantendruck, wenn der Wind diagonal angreift

$$W = \frac{5 b^4 - 3 d^4}{30 b \sqrt{2}},\; f = b^2 - \frac{\pi d^2}{4} \quad \ldots \quad (27)$$

Für den achteckigen Querschnitt

$$W = \frac{1}{r}\left(\frac{1 + 2\sqrt{2}}{6} r^4 - \frac{\pi}{64} d^4\right) = \frac{0{,}638\, r^4 - \frac{1}{20} d^4}{r} = \frac{12{,}76\, r^4 - d^4}{20 r},$$

$$f = 3{,}286\, r^2 - \frac{\pi d^2}{4} \quad \ldots \quad (28)$$

*) S. Prof. Lang, Einheitliche Bestimmungen über Schornsteinanlagen, Zeitschr. deutscher Ing., S. 919, 1899; ferner P. Bastine, Der Bau hoher Schornsteine, Leipzig, A. Felix.

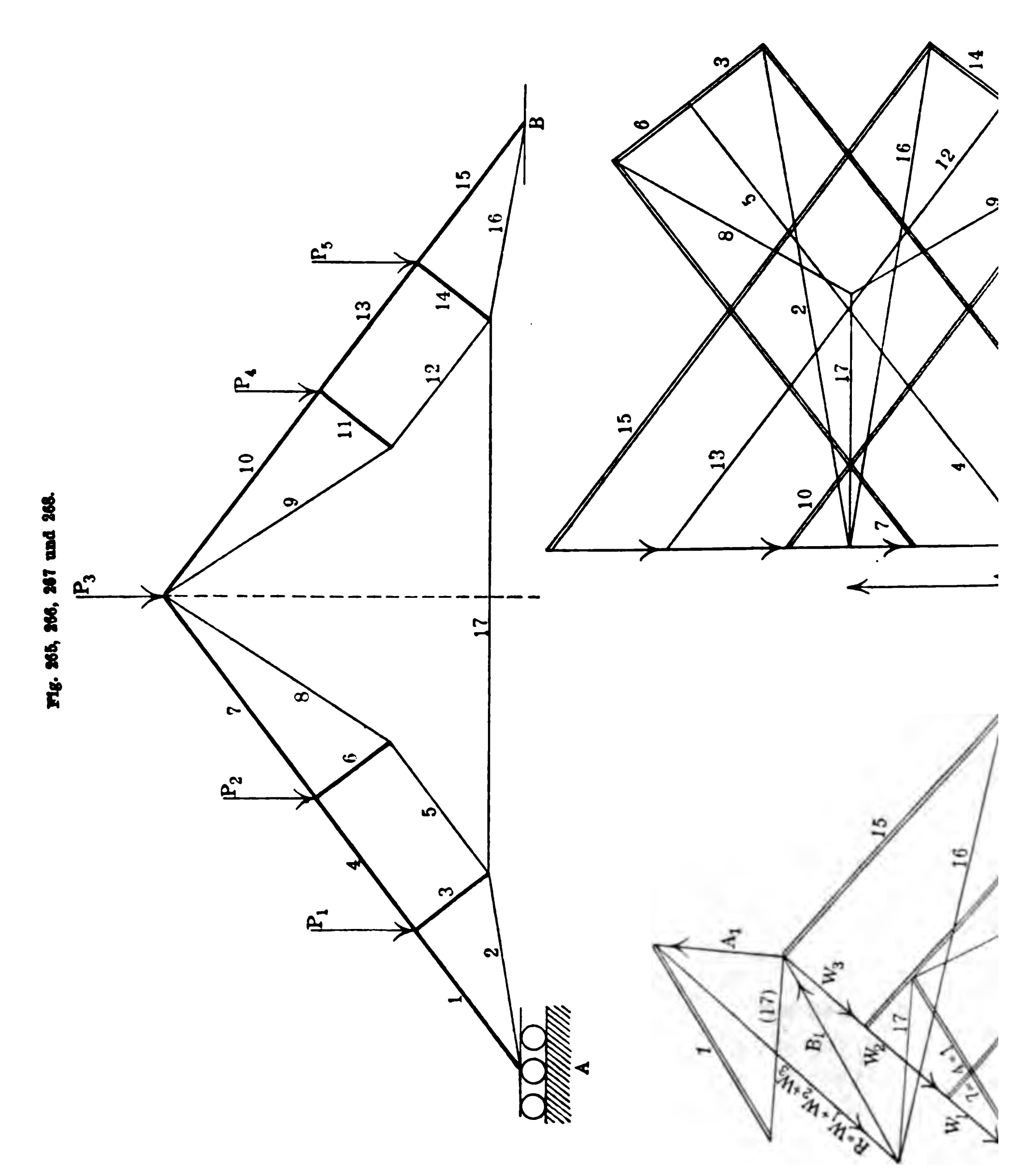
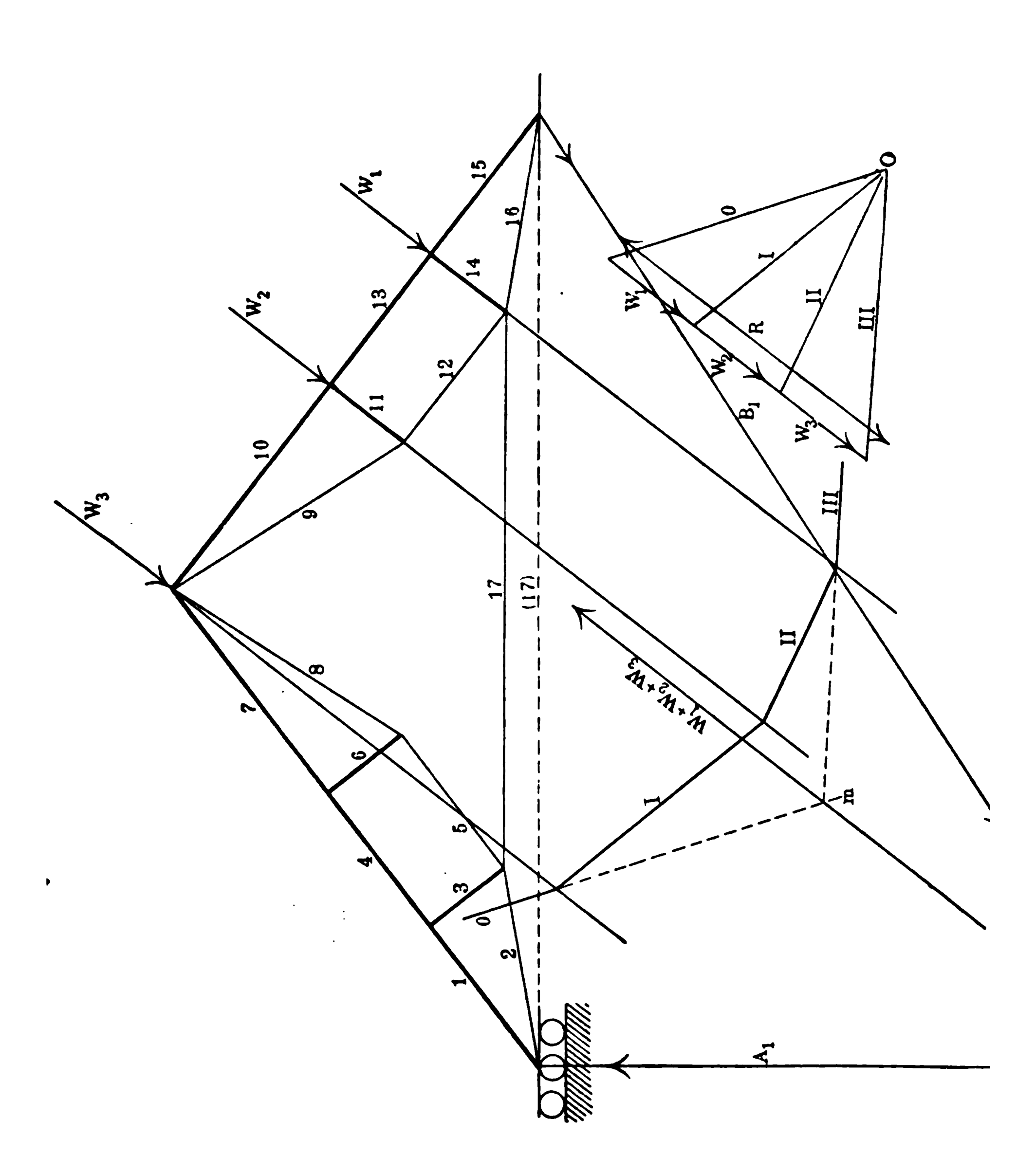


Fig. 265, 266, 267 und 268.


W1
W2
W3
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
(17)
0
I
II
III
R
B1
A1
m
O
W1+W2+W3

Für den sechseckigen Querschnitt

$$W = \frac{0{,}5413\, r^4 - \frac{\pi\, d^4}{64}}{r} = \frac{10{,}826\, r^4 - d^4}{20\, r},\quad f = 2{,}598\, r^2 - \frac{\pi\, d^2}{4}\,. \quad (29)$$

Nach Herstellung der Zeichnung, Fig. 261, teilt man die Höhe des Schornsteins in eine Anzahl gleich hoher Teile, deren Gewichte G_1, G_2 $G_3 \ldots$ und deren Winddruckkräfte w_1, w_2, $w_3 \ldots$ man bestimmt. Man ist auch hier meistens genötigt, wie in Fig. 262 schon durchgeführt, die Breiten des Schornsteins und die horizontalen Kräfte in einem andern Massstabe aufzutragen als die Höhen, weil gewöhnlich die Windkräfte w_1, w_2, $w_3 \ldots$ im Vergleich zu den Gewichten G_1, G_2, $G_3 \ldots$ sehr klein sind.

Man konstruiert jetzt, Fig. 263, das Kräftepolygon, indem man von a bis g die Kräfte $G_1, G_2 \ldots w_1, w_2 \ldots$ aneinander reiht, paarweise liefern sie die Resultierenden R_1, R_2, $R_3 \ldots R_6$. Wählt man dann O in der Horizontalen aO als Polpunkt, so ist $aO = \Sigma w$ die gesamte Windkraft K, Og das Gewicht G, $ag = R$ die Resultierende aus beiden, welche im Schwerpunkt S angreift. Mit den Polstrahlen I, II, III... konstruieren wir jetzt das Seilpolygon, indem wir die obigen Resultierenden R_1, R_2, $R_3 \ldots$ aus Fig. 261 in die Fig. 263 übertragen, R_1 nach a_1, R_2 durch b_1, R_3 durch c_1 u. s. w. parallel ziehen. Das Seilpolygon beginnt von a_1 und schliesst sich in bekannter Weise II, III... bis VII parallel in Fig. 263 an.

Die Polstrahlen I und II bilden also die Resultierende R_1, welche die Ebene s_1 in m trifft; die Polstrahlen I und III bilden die Resultierende ac, diese greift im Schnittpunkt der Seilkräfte I und III, also in n_1 an und schneidet durch n_1 parallel übertragen, die Ebene s_2 in n; die Polstrahlen I und IV liefern die Resultante ad, diese greift im Schnittpunkt o_1 der Seilkräfte I und IV an, und schneidet durch o_1 übertragen, die Ebene s_3 in o. Die Polstrahlen I und V liefern die Resultante ae und diese greift in p_1, dem Schnittpunkt der Seilkräfte I und V, an u. s. w., bis zum letzten Schnittpunkt r. Der Linienzug x, m, n, o... r ist die Drucklinie. Diese fällt in unserer Zeichnung allerdings ausserhalb der Achse, würde man sie in die Hauptzeichnung, Fig. 262, übertragen, so verlässt sie bereits im obersten Teilstück die erste Fuge; wir müssen aber in Rücksicht ziehen, dass wir der Deutlichkeit wegen die Kräfte w_1, $w_2 \ldots$ zu gross im Verhältnis zu den senkrechten Kräften G_1, $G_2 \ldots$ angenommen haben. Wählen wir für die ersteren einen andern Massstab, so müssen in Fig. 264 bezw. Fig. 262 die Schornsteinbreiten in demselben Massstab eingetragen werden, man erhält dann allerdings eine verzerrte Zeichnung, aber immerhin einen richtigen Überblick über den Verlauf der Drucklinie.

Es könnte nun noch der Fall eintreten, dass die Seitenkraft K das Bauwerk seitlich verschiebt; es tritt dies ein, wenn $K = \varphi G$, φ sei der Reibungskoefficient (s. Band I, S. 150). Die Bedingung, um eine solche Verschiebung zu vermeiden, lässt sich demnach ausdrücken durch $K < \varphi G$, bezw. $\frac{K}{G} < \varphi$. Es ist aber φ die Tangente des Reibungswinkels $\varphi = \operatorname{tg} \alpha$, sonach $\frac{K}{G} < \operatorname{tg} \alpha$. Aus Fig. 262 ergiebt sich nun $\frac{K}{G} = \operatorname{tg} \beta$, man erhält hiernach die Bedingung $\operatorname{tg} \beta < \operatorname{tg} \alpha$ oder $\beta < \alpha$ . . (30)

Der Winkel, welchen die Resultierende aus der Seitenkraft und dem Gewicht des Schornsteins mit der Senkrechten bildet, muss also kleiner sein, als der Reibungswinkel des Materials, damit keine seitliche Verschiebung des Bauwerkes eintreten kann.

Dem in Fig. 262 aufgezeichneten Schornstein und in den Konstruktionsfiguren 261 und 263 liegen keine bestimmten Masse zu Grunde. Genau genommen nehmen die Windstärken von w_1 nach w_6 zu ab, weil der Winddruck in der Nähe der Erdoberfläche geringer ist. — Bei einem Kamin von $h = 32$ m Höhe mit ringförmigem Querschnitt, dessen unterer innerer Durchmesser 1,2 m, dessen oberer innerer 0,8 m, dessen äussere Durchmesser 2,7 m, bezw. 1,25 m sind, nahmen wir 150 kg auf den qm Winddruck im Durchschnitt an. Die Windfläche ist $\frac{2,7 + 1,25}{2} \, 32 = 63$ qm. Die Entfernung des Schwerpunktes von der Basis ergab $s = 14$ m. Der Winddruck ist $K = 63 \cdot 150 = 9360$ kg, das Windmoment $Ks = 9360 \cdot 14 = 131\,040$ kgm. Das Widerstandsmoment an der Basis ist $W = \frac{1}{10} \frac{2,7^4 - 1,2^4}{2,7} = 2$, der grösste Querschnitt ist $f = \frac{\pi}{4} (2,7^2 - 1,2^2) = 4,60$ qm, der mittlere Querschnitt ist 2,62 qm, sonach ist das Gewicht mit der Einheit von 1600 kg auf den cm $G = 2,62 \cdot 32 \cdot 1600 = 134\,144$ kg.

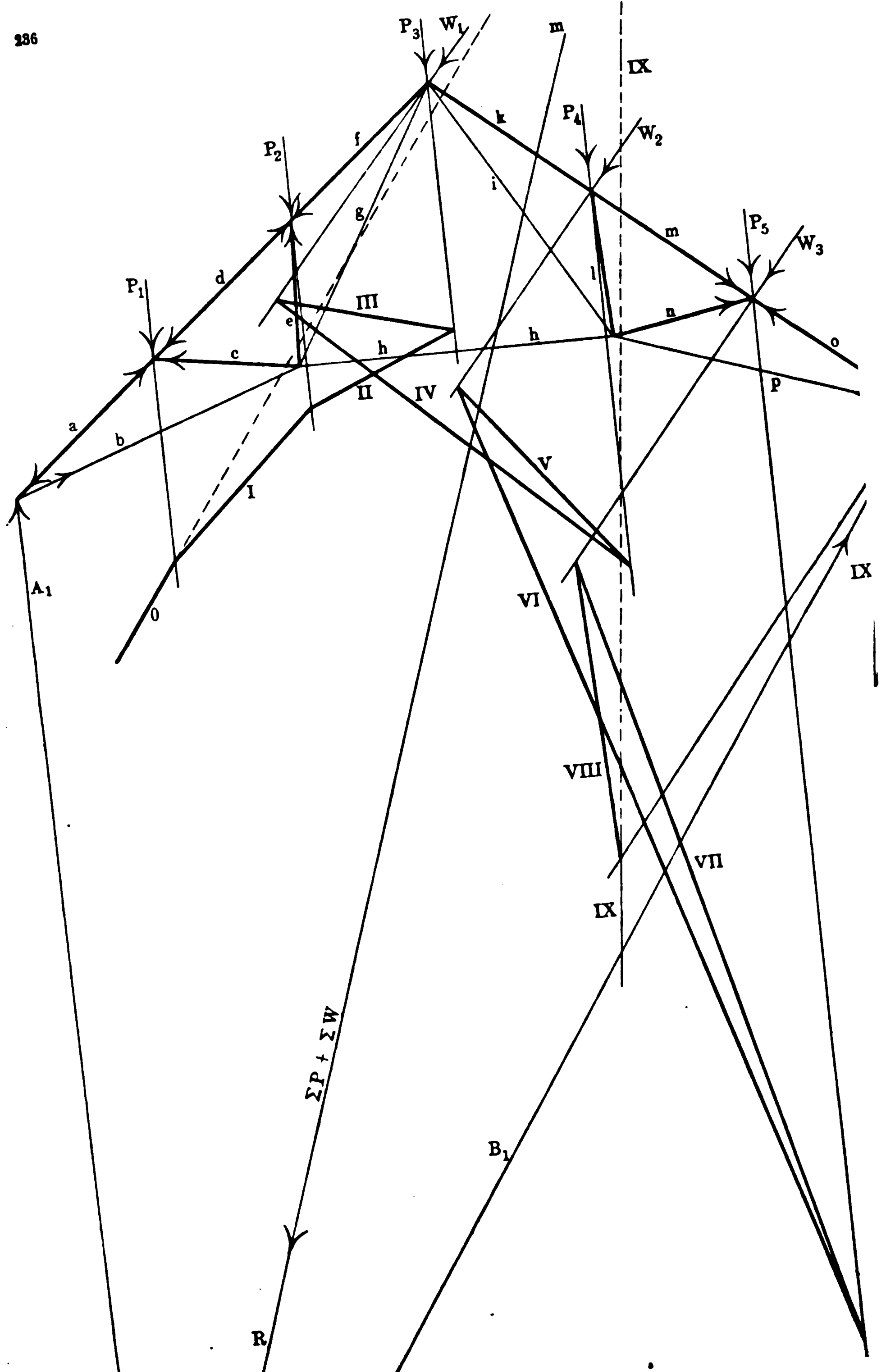
Auf der Druckseite ist die äusserste Spannung

$$k_1 = -\frac{131\,040}{2} - \frac{134\,144}{4,6} = -(65\,520 + 39\,160) = -104\,680 \text{ kg}$$

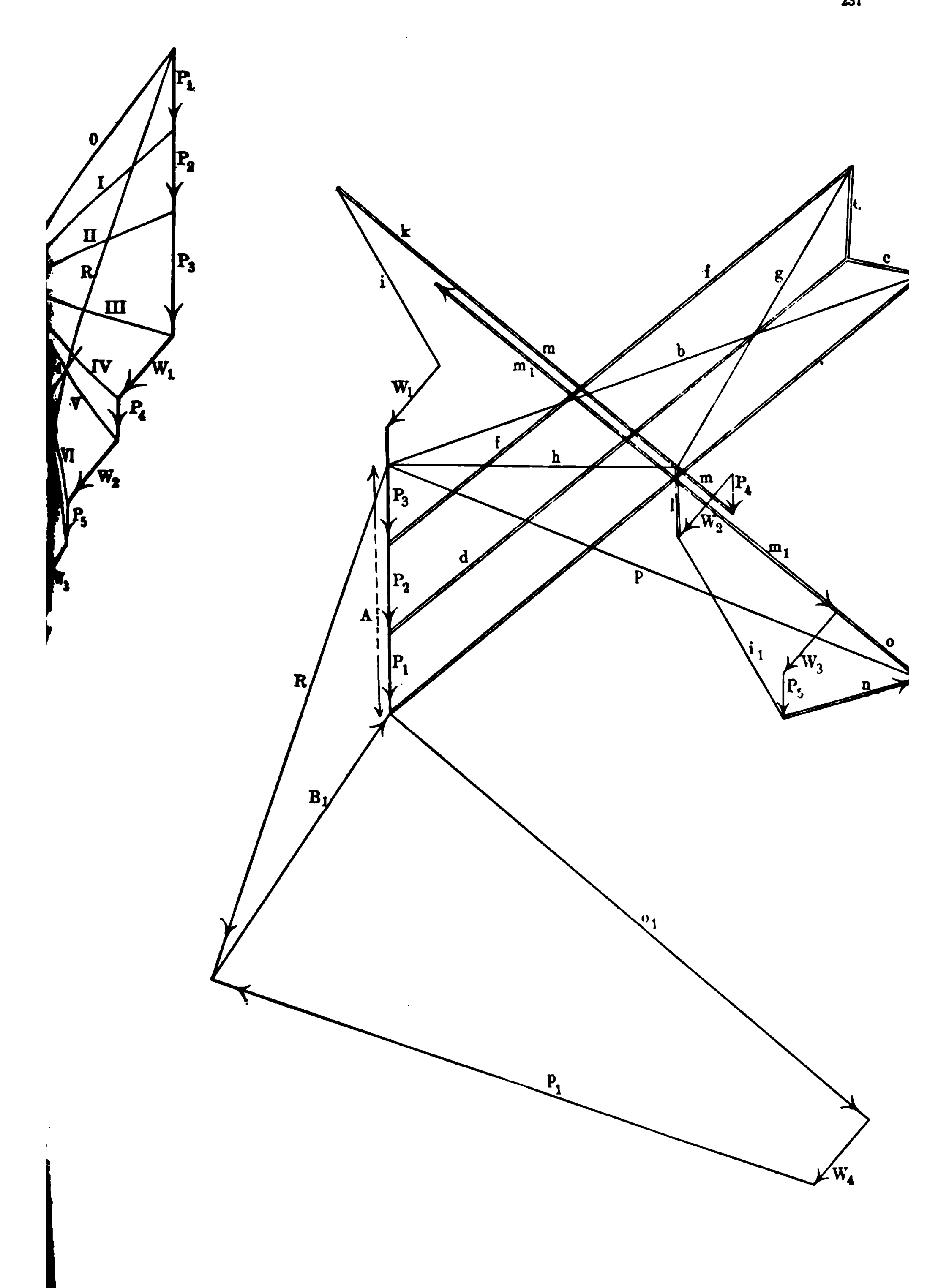
auf den qm, oder $k_1 = \frac{104\,680}{10\,000} = 10$ kg auf den qcm.

Auf der Zugseite ist $k_1 = 65\,520 - 39\,160 = 26\,360$ kg auf den qm Zugspannung, das sind $k_1 = \frac{26\,360}{10\,000} = 2,6$ kg auf den qcm.

Fig. 26



P3
W1
m
IX
k
P4
W2
f
P2
i
g
m
P5
W3
P1
d
III
l
e
n
c
h
h
o
II
IV
p
a
b
V
I
A1
VI
IX
0
VIII
VII
IX
ΣP + ΣW
B1
R


0
I
II
R
III
IV
V
VI
P_1
P_2
P_3
W_1
P_4
W_2
P_5
k
i
m
m_1
f
g
b
c
h
d
p
l
W_1
P_3
P_2
P_1
A
R
B_1
o_1
p_1
W_4
P_4
W_2
m_1
o
i_1
W_3
P_5
n

Nach obigen Formeln sind die noch zulässigen Spannungen

$k_d = 5 + 0{,}15 \cdot 32 = 9{,}8$ kg Druck auf den qcm

$k_z = 1{,}3 + 0{,}013 \cdot 32 = 1{,}7$ kg Zug „ „ „

Die Zugspannung wäre demnach nach obigen Angaben um 0,9 kg überschritten. Die Stabilität ist übrigens gesichert; trägt man K und G vom Schwerpunkt aus auf, so ergiebt sich, dass die Resultante noch um $^1/_8$ innerhalb der Basis liegt. (Vergl. die weiter unten folgende Kerntheorie.)

Das Verhältnis $\frac{K}{G}$ ergiebt $\operatorname{tg}\beta = \frac{9360}{134144} = 0{,}07$, während der Reibungswinkel nach Band I, S. 165, aus $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}7$ sich berechnen lässt; der Bedingung, dass $\operatorname{tg}\beta < \operatorname{tg}\alpha$, $0{,}07 < 0{,}7$ ist übrigens Genüge geleistet.

XI. Die Fig. 265 stellt die etwas abweichende Konstruktion eines Dachbinders mit symmetrischer senkrechter Belastung dar. Die Angriffspunkte der Kräfte P_2 und P_4 werden aus der Richtung der Zugstreben 8 und 9 festgestellt, diese ergiebt sich aus dem Kräfteplan 266, indem 8 mit 5 und 6, und 9 mit 12 und 11 je ein geschlossenes Kräftedreieck bilden; in der Zeichnung müssen die Kraftlinien 17, 8, 5, 12 und 9 in einem Punkt zusammen laufen.

In Fig. 268 ist nun derselbe Dachstuhl durch seitlichen Winddruck belastet; die auf die Knotenpunkte wirkenden Windkräfte W_1, W_2, W_3 sind gleich gross, da sie in ungleichen Abständen auf den Binder einwirken, so müssen wir zunächst die Lage der Schwerlinie für $R = W_1 + W_2 + W_3$ feststellen, um danach die Richtung des Auflagerdruckes B_1 zu gewinnen. Abhängig von der Grösse und Lage von $R = W_1 + W_2 + W_3$ schliessen wir mit A_1 und B_1 das Kräftedreieck in Fig. 267 und entwickeln die Kräftepolygone der sämtlichen Knotenpunkte. Die Zug- und Druckspannungen sind, wie in obigen Figuren entsprechend markiert, ihre Pfeilrichtungen sind hier nicht eingetragen.

XII. Der Dachstuhl, Fig. 269, ist ungleichmässig belastet, und zwar denken wir uns die Belastung in der folgenden Weise entstanden. Die Belastung durch das Eigengewicht sei zunächst symmetrisch auf alle Knotenpunkte verteilt, P_4 und P_5 auf der rechten Seite stellen noch Werte derselben dar. Auf der linken Seite ist noch Schneelast hinzugekommen, so dass P_1, P_2 und P_3 die Belastungen für Schneelast und Eigengewicht darstellen; auf der rechten Seite tritt zu dem Eigengewicht die seitlich wirkende Windbelastung W_1, W_2, W_3 und W_4.

In Fig. 270 sind die sämtlichen Belastungen der Reihe nach aufgetragen, und ist R die Resultierende derselben, und zwar ihre Grösse

und Richtung. Ihre Lage findet sich innerhalb der gegebenen Kräfte aus der Konstruktion des Seilpolygons I, II ... IX, Fig. 269. Die Verlängerung der äussersten Kräfte o und IX ergeben den Schnittpunkt m, welcher allerdings auf der Zeichnung nicht mehr erreicht wurde. Durch m wird die Lage der Resultante R parallel der in Fig. 270 gefundenen gezogen, ihr Schnittpunkt mit der senkrechten Auflagerreaktion A_1 liefert die Richtung des festen Auflagerdruckes B_1. Richtung und Grösse von R sind nun nach Fig. 271 übertragen, der Schluss des Kräftedreiecks mit B_1 und A_1 in dieser Figur liefert die Grössen der Auflagerdrücke, da R in Fig. 269 aus Fig. 270 der Grösse nach bekannt ist. Von dem Knotenpunkt am Auflager B_1, W_4, o und p oder von A_1, a, b, dem linken Auflager aus, wird nun das Gleichgewicht der Kräfte für einen Knotenpunkt nach dem andern durch Polygonschluss hergestellt.

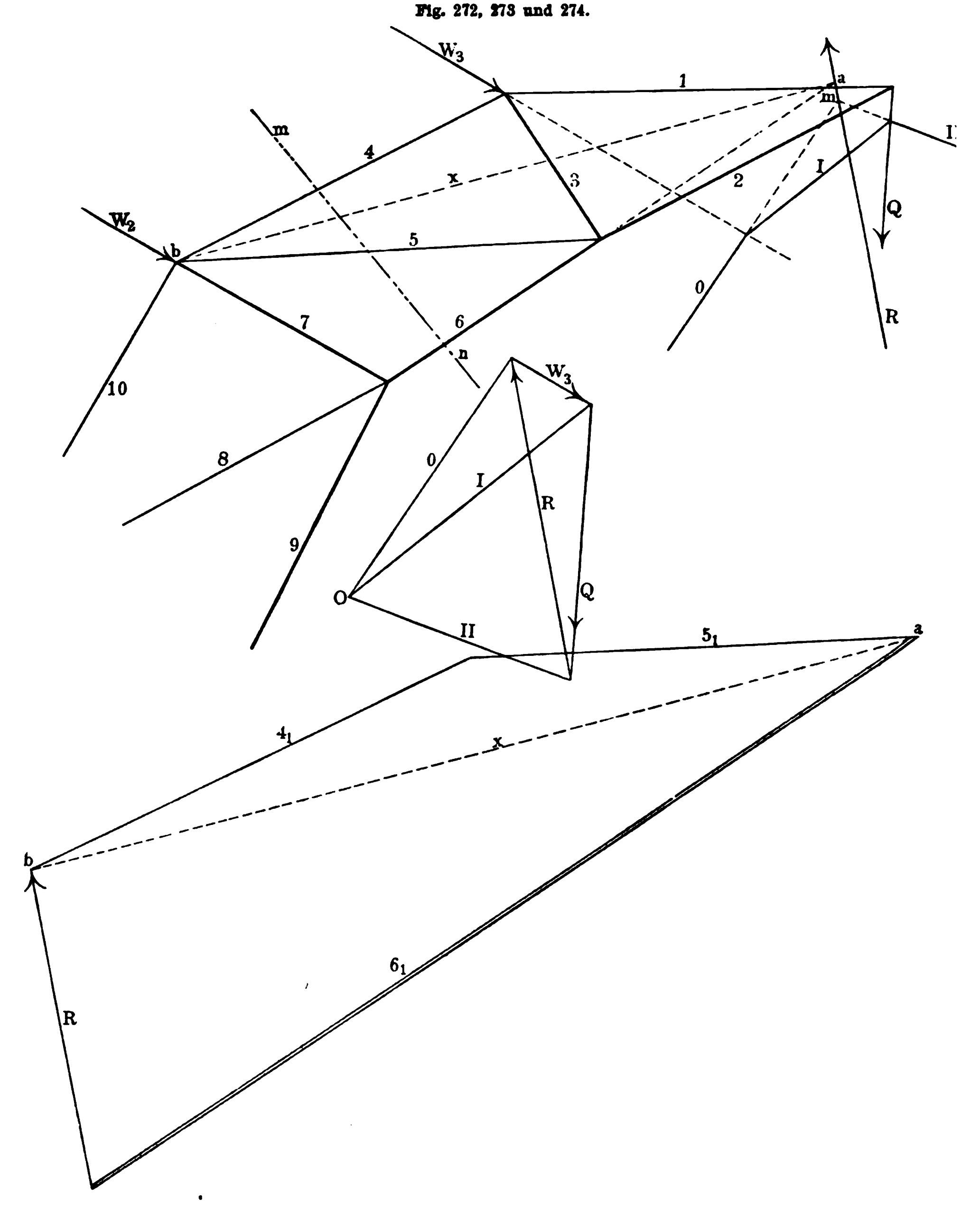
Es ist hierbei auf eine besonders genaue Ausführung der Zeichnungen zu achten, um die sämtlichen Knotenpunkte mit den äusseren Kräften in das Gleichgewicht zu bringen; die in den früheren Abschnitten erklärte Ausführung, jedes Kräftesystem für sich graphisch darzustellen und die Spannungen zu addieren, ist darum vorzuziehen.

Nach den Grundsätzen der Ritter'schen Methode, deren Anwendung wir bereits im I. Band kennen gelernt haben, können wir mit Hilfe des Kräfte- und Seilpolygons auch ohne vorherige Ermittelung des Gleichgewichtes der einzelnen fortlaufenden Knotenpunkte durch einen Schnitt durch die betreffenden Streben und unter Annahme eines Drehpunktes die Spannungen der durchgeschnittenen Streben ermitteln.

I. Legen wir durch die Streben 4, 5, 6 der früheren Fig. 157 den Schnitt mn und betrachten den Knotenpunkt b bei m als Drehpunkt, so müssen wir in 4 die Kraft P_4 anbringen, um das Gleichgewicht herzustellen. Verlängern wir jetzt die Strebe 4 bis zum Schnitt mit Q, also bis zu a, und verbinden a mit b, so können wir uns in dieser Verbindungslinie eine ideale Kraft P_x vorstellen, welche mit P_4 und Q in a angreift. Das Gleichgewicht dieser drei Kräfte ist durch das in Fig. 157 gezeichnete Kräftedreieck dargestellt. Trägt man nämlich Q in dem der Figur entsprechenden Massstab auf, so muss die Kraft in 4_1, das heisst die Länge dieser Kraftlinie genau so gross sein, wie die im Kräftediagramm der Hauptfigur, wie die Kraft 4. Zieht man nun noch überdies die Linien 5_1 und 6_1 parallel den Richtungen der Streben 5 und 6 in der Haupt-

figur, so ergeben sich deren Kraftlängen genau so gross wie 5 und 6 in dem Kräftediagramm, dem Kräftepolygon des Knotenpunktes 5, 6, 7 und 9, wie man sich durch eine Vergleichung leicht überzeugen kann.

Fig. 272, 273 und 274.

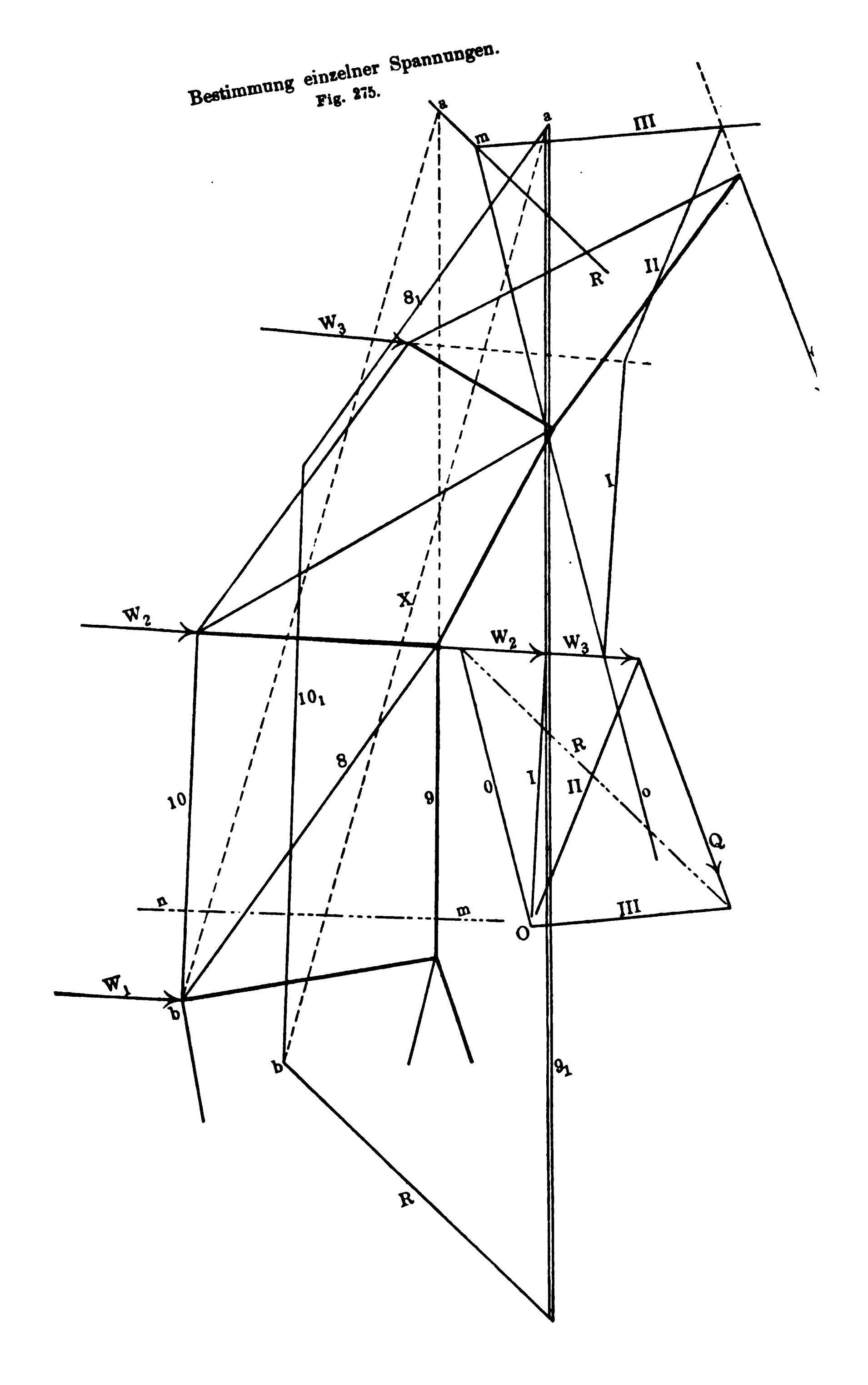


II. In der früheren Fig. 161 haben wir einen Schnitt durch die Streben 4, 5, 6 gelegt und nehmen in b den Drehpunkt an. Um die Kraft P_6 in 6 zu bestimmen, verlängern wir 6 bis zum Schnittpunkt a der Aussenkraft Q und verbinden a mit b. Das Kräftedreieck Q, 6_1 und x in Fig. 161 giebt, wenn Q in demselben Massstab wie die Hauptfigur aufgetragen wird, die Kraft in 6 durch 6_1. Zieht man wieder 4_1 parallel 4, und 5_1 parallel 5, so liefern die Kräftelängen 4_1 5_1 6_1 dieselben Resultate wie die im Kräftediagramm der Hauptfigur. In der Nebenfigur ist der Buchstabe Q in der Senkrechten unter b zu ergänzen.

III. Es sollen die Spannungen in 4, 5, 6 des Durchschnittes mn in Fig. 272 bestimmt werden. Die Zeichnung dieser Figur stimmt genau mit dem Gerüst der Fig. 160 überein, es müssen also auch dieselben Spannungen resultieren. Rechts von dem Schnitt mn wirken die Kräfte W_3 und Q, diese Aussenkräfte, aus Fig. 160 entnommen, ergeben nach Fig. 273 die Resultierende R. Wählt man nun den Polpunkt O, zieht die Polstrahlen O, I, II, und überträgt diese in die Kräfte W_3 und Q der Fig. 272, so ergiebt sich die Lage der Resultierenden, welche parallel der in Fig. 273 durch m geht. Verlängert man nun die Strebe 6 in Fig. 272 bis a, so ergiebt sich die ideale Kraft in ab, wenn man R aus Fig. 273 nach Fig. 274 parallel und gleichlang überträgt und mit 6_1 parallel 6, x parallel ab, das Kräftedreieck konstruiert. Zieht man dann noch 4_1 parallel 4, und 5_1 parallel 5, so müssen die Kräfte, das heisst die Längen 4, 5, 6 in Fig. 274 genau mit denen im Kräftediagramm der Fig. 160 übereinstimmen, wenn W_3 und Q in demselben Massstab aufgetragen wurden.

IV. Wir haben in Fig. 275 dasselbe Krahngerüst der Fig. 160 verwertet, nur handelt es sich um die Bestimmung der Kräfte in den Streben 8, 9 und 10, durch welche der Schnitt mn diesmal gelegt ist. Man konstruiert also auch hier zunächst aus den bekannten Aussenkräften die Resultante R, wählt O und führt das Seilpolygon o, I, II, III aus, um die Schwerlinie R durch m in Fig. 275 zu erhalten, indem R als Resultante von W_2, W_3 und Q den Kräften in 8, 9 und 10 das Gleichgewicht halten muss. Zunächst ist wieder P_9 für den Drehpunkt b in W_1 zu bestimmen. Man verlängert die Strebenrichtung 9 bis a und verbindet a mit b, konstruiert ferner das Kräftedreieck Rx9, in der Hilfsfigur, indem man x parallel ab und R parallel R mit derselben Länge überträgt. Schliesst man wieder 10_1 und 8_1 an x an, so sind diese Kräfte, mit demselben Massstab wie W_2, W_3 und Q

Fig. 275.

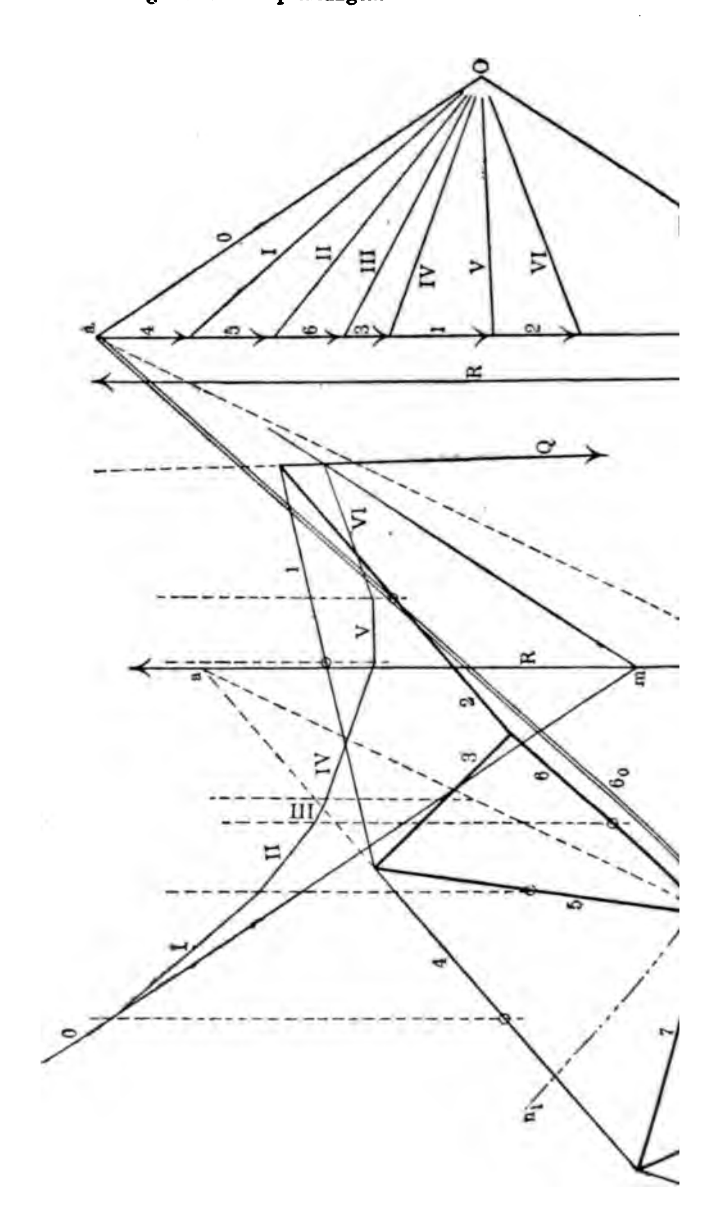


gemessen, bekannt; man wird durch Messung sofort auch eine Übereinstimmung mit Fig. 160 finden.

V. Die Feststellung der Kräfte in 4, 5 und 6 der Fig. 276, bei welcher das Gerüst in Fig. 157 angenommen wurde, ist mit Rücksicht auf die Eigengewichte der den Schnitt m_1 n_1 betreffenden Streben bestimmt, diese sind in den Mitten der Streben 1, 2, 3, 4, 5 und 6 vertikal, also parallel zu Q angenommen und auf das Kräftepolygon des Polpunktes O übertragen. Die Resultierende derselben mit Q ergiebt sich durch m aus der Konstruktion des Seilpolygons.

Um zunächst die in 4 angreifende, um b drehende Kraft festzustellen durch die ideale Kraft in ab, verlängert man wieder 4 bis a

Fig. 277, 278, 279 und 280.


O
0
I
II
III
IV
V
VI
a
R
Q
m
n
6_0
n_1



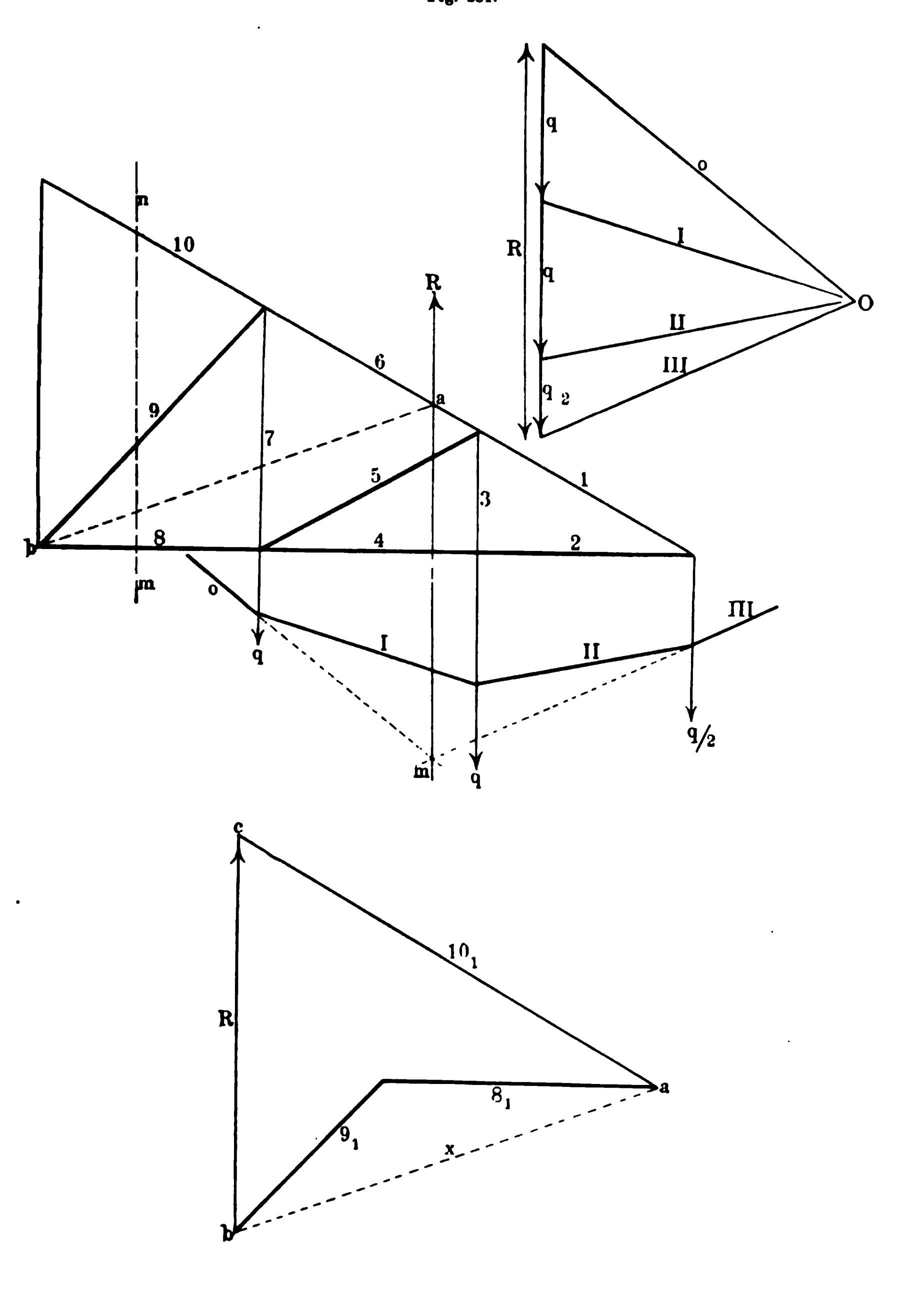
und verbindet a mit b. Aus dem Kräftedreieck $Rx4_0$ ergiebt sich die Kraft P_4 in 4_0; 5_0 und 6_0 parallel anschliessend auch diese Kräfte, welche natürlich infolge der Eigengewichte grösser als die Kräfte 4, 5, 6 in Fig. 157 sein müssen.

VI. Die folgende Konstruktion ist eine Kontrolle der Kräftebestimmungen in Fig. 171. Der Schnitt mn ist durch 8, 9, 10 gelegt, rechts desselben wirken Q_0, Q_1, Q_2, deren Mittelkraft R durch den Schwerpunkt m geht. Diese Schwerlinie ma schneidet die Verlängerung der Druckstrebe 8 in a, welcher Punkt wieder mit dem Drehpunkt b verbunden wird. Die Mittelkraft R ergiebt sich aus der Nebenfigur 8, und x aus dem Kräftedreieck Fig. 278, schliesst man an dieses 9_1 und 10_1 parallel 9 und 10 an, so finden sich die Spannungen in 8_1 und 9_1 und 10_1. Verlängert man II in Fig. 277, so ergiebt die Mittelkraft R_1 durch m_1 parallel den Kräften Q_1 und Q_0 den Schnitt a_1, entsprechend dem Drehpunkt b_1 und dem Schnitt $m_1 n_1$ durch die Streben 4, 5, 6. Aus Fig. 280 entnimmt man dann wieder die der Resultante $Q_1 + Q_0$ entsprechenden Spannungen in 4_1, 5_1 und 6_1. Fig. 279 liefert schliesslich die Spannungen in 1 und 2, der Schnitt $m_0 n_0$ mit dem Drehpunkt in b_0 ist im ersten Feld der Fig. 277 angegeben. Hier ist natürlich kein Seilpolygon erforderlich, weil nur die Kraft Q_0 in Betracht kommt.

VII. Wir haben in Fig. 281 das bereits oben in Fig. 167 berechnete Wandgerüst angenommen, und wollen die Spannungen in den Streben 8, 9 und 10 durch den Schnitt mn bestimmen. Die rechts vom Schnitt liegenden Knotenbelastungen sind q_1, q und $q/_2$, ihre Mittelkraft ist $R = ma$. Da $R = q + q + {}^1/_2 q$ bekannt ist, so ergiebt sich die Spannung in 8 aus dem Kräftedreieck abc, der Hilfsfigur, in welchem x parallel der Linie ab ist; 9_1 und 10_1 liefern die Spannungen in den gleichnamigen Streben der Hauptfigur.

VIII. Wir hatten in den Fig. 229 bis 234 Brückenträger angenommen, welche in ihren Knotenpunkten mit $P_1, P_2, P_3 \ldots$ belastet sind. In der Fig. 282 kommt es uns nun darauf an, die Spannungen in den Streben 15, 16 und 18 festzustellen. Wir legen wieder den Schnitt mn und suchen die Mittelkraft der Kräfte P_5, P_6 und B. Mit Rücksicht darauf, dass B von unten nach oben wirkt, ist die Resultierende, wie aus der Figur zu ersehen, $R \doteq B - (P_5 + P_6)$. Konstruiert man das Seilpolygon, so fällt der Schnittpunkt m in den Verlängerungen der Seilkräfte o und III rechts vom Auflager B. Man verbindet nun wieder a mit b und verfährt zur Bestimmung der Kräfte 15, 16, 18 durch Vermittelung der idealen Kraft x und der Kraft R wie oben.

Fig. 281.



q
o
I
R
q
O
II
III
q 2
n
10
R
6
a
9
7
5
1
3
b
8
4
2
m
o
III
I
II
q
q/2
m
q
c
10_1
R
a
8_1
9_1
x
b

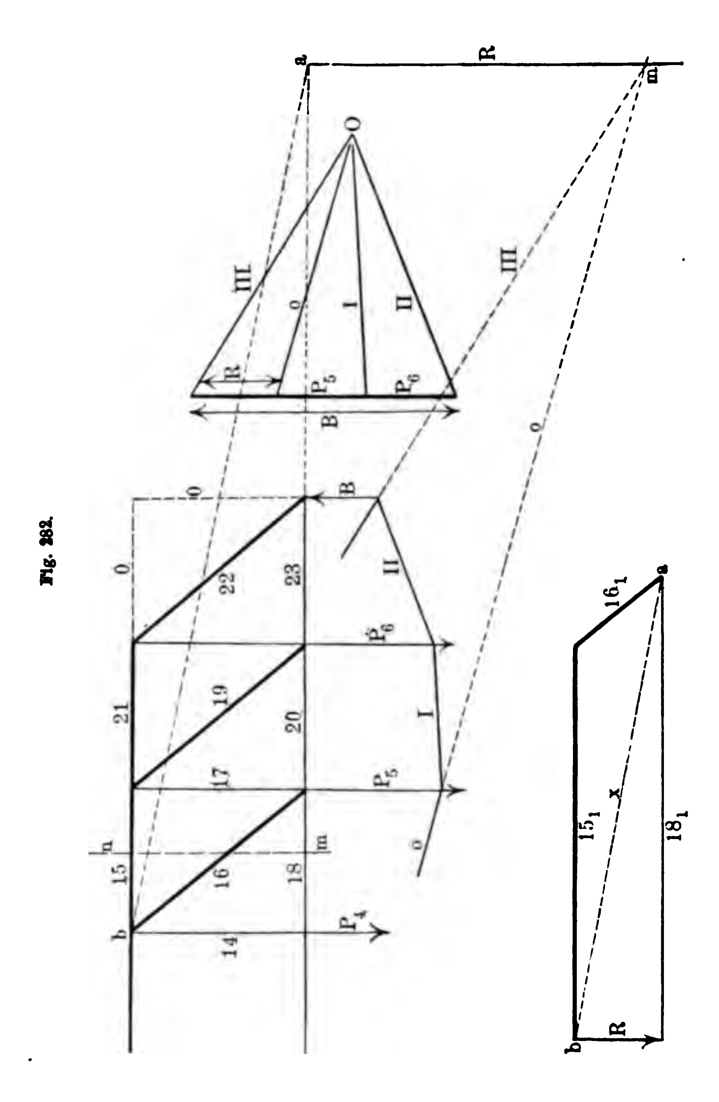


Fig. 282.

Die Ausführung der Konstruktion der Spannungen in 15, 16 und 17, Fig. 283, ist der soeben betrachteten gleichlaufend. In der Zeichnung fällt die Linie x parallel zu ab mit 15 zusammen, infolge dieser Ungenauigkeit stimmen die Spannungen 15, 16, 17 dieser Figur auch nicht vollkommen mit den in Fig. 232 entwickelten überein.

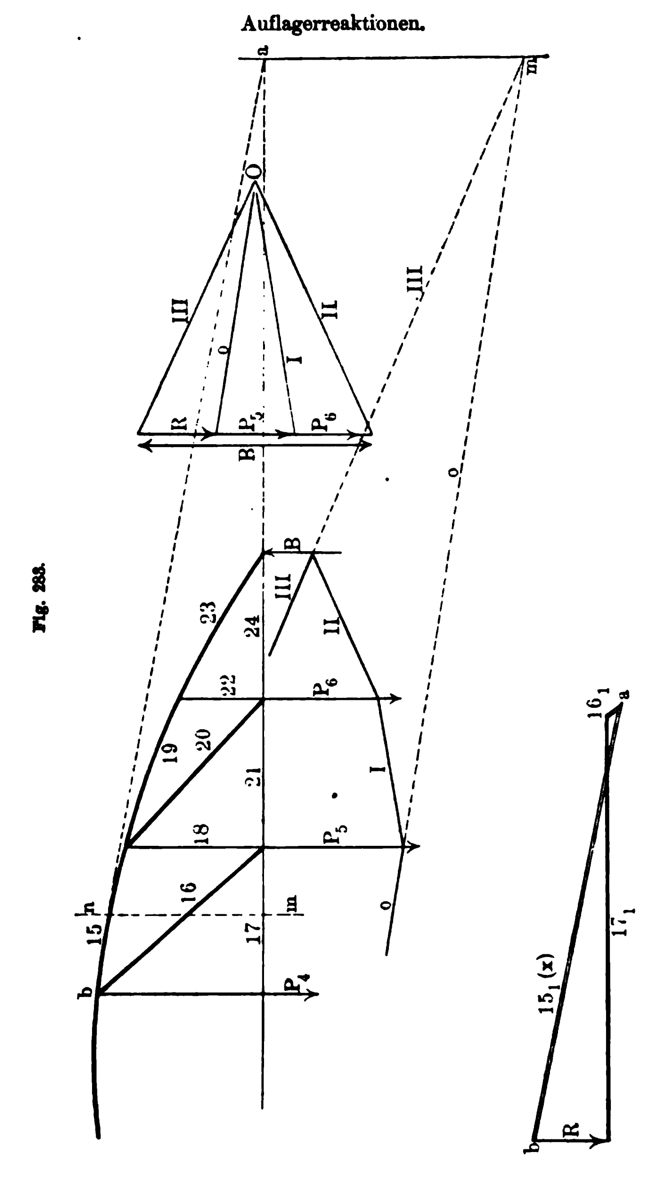


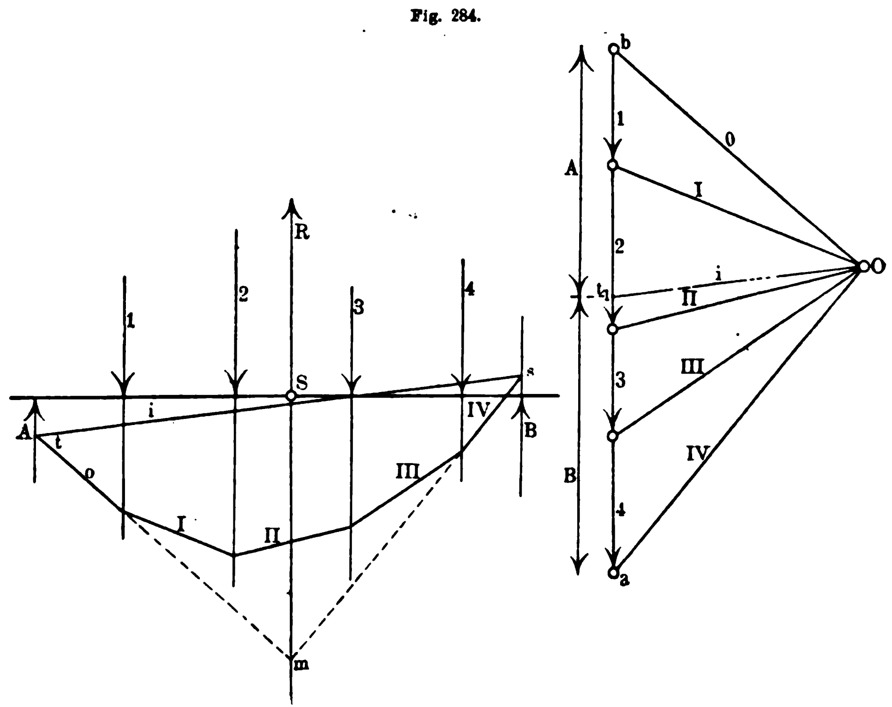
Fig. 283.

Anwendung des Seilpolygons zur Bestimmung von Auflagerreaktionen.

Wenn auf einen Balken AB, Fig. 284, eine Reihe von parallelen Kräften 1, 2, 3, 4 . . . in beliebigen Entfernungen einwirken, so ist uns bereits aus dem Vorhergehenden bekannt, wie wir den Angriffspunkt S der Mittelkraft $R = \Sigma P = 1 + 2 + 3 + 4 \ldots.$ durch das Seilpolygon

finden können. Wird nun aber das Gleichgewicht der Kräfte 1, 2, 3, 4... durch zwei den obigen parallel wirkende Unterstützungen A und B die Auflager hergestellt, so lassen sich die Auflagerdrücke aus demselben Seilpolygon finden, wenn man die Schlusslinien desselben, hier o und IV, bis in die Richtungen der Auflager einschneiden lässt; diese Schnittpunkte sind t und s. Die Verbindungslinie i derselben, die Schlusslinie, ist auch

Fig. 284.

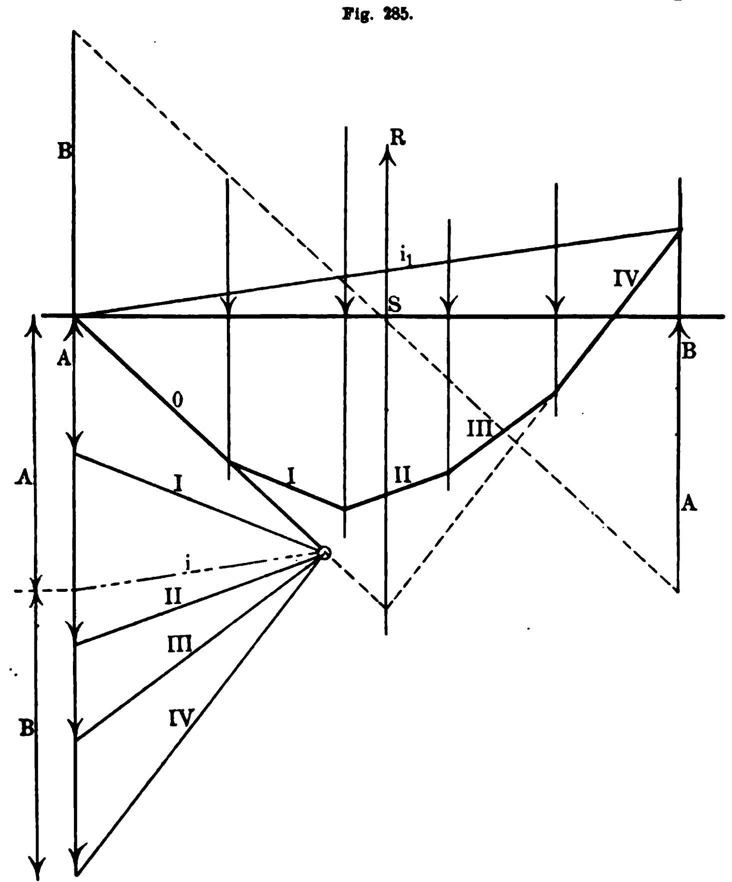


wieder eine Seilkraft; überträgt man diese parallel durch den Pol O in das Kräftepolygon, so schneidet sie auf der Kräftelinie ab die beiden Auflagerreaktionen A und Bab. Die Richtigkeit übersieht man sofort, wenn man bedenkt, dass das Gleichgewicht der drei Kräfte A, o und i in t durch das Kräftedreieck Ot_1b, und das der drei Kräfte B, IV und i durch Ot_1a gesichert ist. Die Resultierende $R = ab$ muss der Summe der Auflagerreaktionen gleich sein $R = A + B$.

In der nachstehenden Fig. 285 haben wir die Auffindung der Auflagerreaktionen insofern vereinfacht, als wir das Kräftepolygon in die Auflagerlinie A eingezeichnet haben. Man kann sich dadurch die weitgehenden parallelen Übertragungen der Seilkräfte ersparen und die erste Seilkraft unmittelbar verwerten. Zur Bestimmung des Schwerpunktes

haben wir ferner neben der uns bekannten Konstruktion durch das Seilpolygon, noch eine bereits schon früher berührte Konstruktion zur Wiederholung angedeutet, deren Beweis an jener Stelle (s. Band I, S. 212, 213) durchgeführt ist. Trägt man die durch i ermittelten Auflager A und B entgegengesetzt in die Auflagerrichtungen ein; B an A, A an B, und verbindet die Endpunkte, so geht diese Linie durch den Schwerpunkt S.

Fig. 285.



In Fig. 286 haben wir uns die Aufgabe gestellt, die senkrechten Auflagerreaktionen A und B bei unter sich parallelen, aber schiefwinkelig wirkenden Kräften graphisch zu bestimmen, die Bezeichnungen der Auflager bei t sind in B und B_1 umzuändern. Die Kräfte 1, 2, 3, 4 wirken unter dem Winkel α auf den Träger AB ein; wir konstruieren das Seilpolygon unter Annahme eines beliebigen Polpunktes O und übertragen die Schlusslinie $i_1 = st$ parallel i, hierdurch finden wir die parallel den gegebenen Kräften wirkenden Auflager A_1 und B_1. Die schiefwinkeligen

Kräfte lassen sich aber in horizontale x_1, x_2, x_3, x_4 und vertikale zerlegen, wie in der Figur angedeutet; die Summe der vertikalen ist gleich

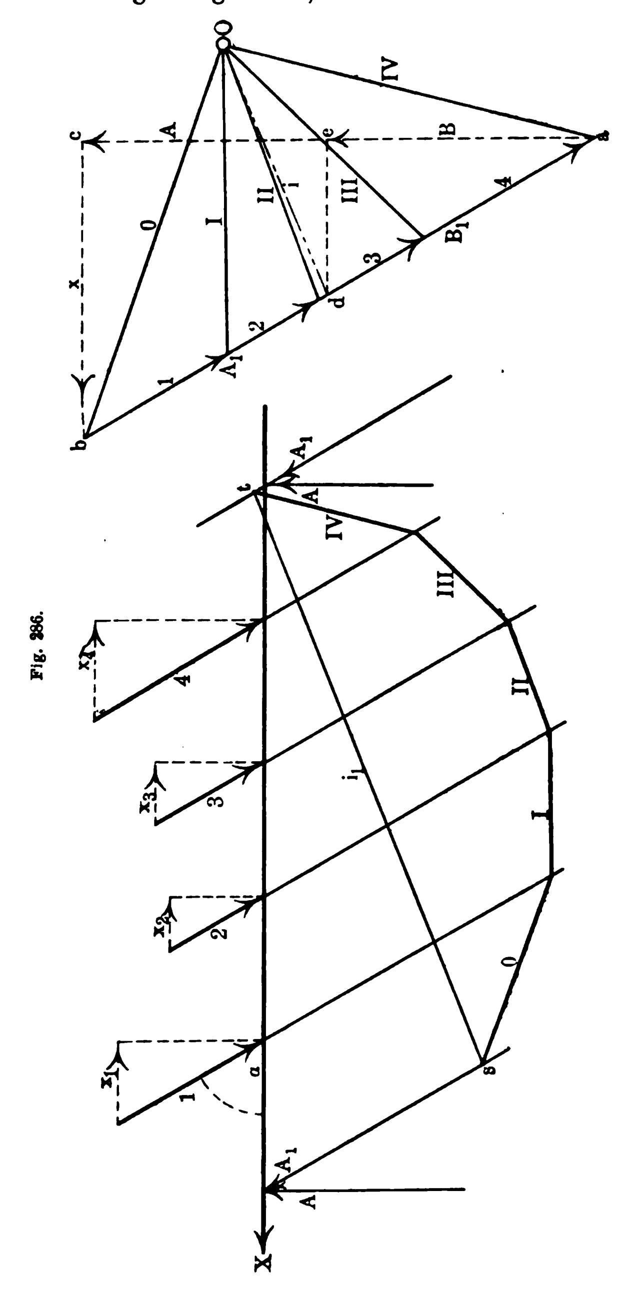


Fig. 286.

der Summe der vertikalen Auflagerdrücke A + B. Zieht man x parallel den horizontalen Teilkräften x_1, x_2 .. durch b und schliesst durch a das Kräftedreieck abc mit A + B, so ergeben sich die Richtung von $x = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ und die vertikalen Auflagerreaktionen A und B, wenn man die Linie de parallel bc überträgt, diese schneidet A und B auf ac ab.

Die Auffassung der Kräftewirkung zur Bestimmung der Auflagerreaktionen ist in Fig. 290 noch allgemeiner. Die den Balken AB be-

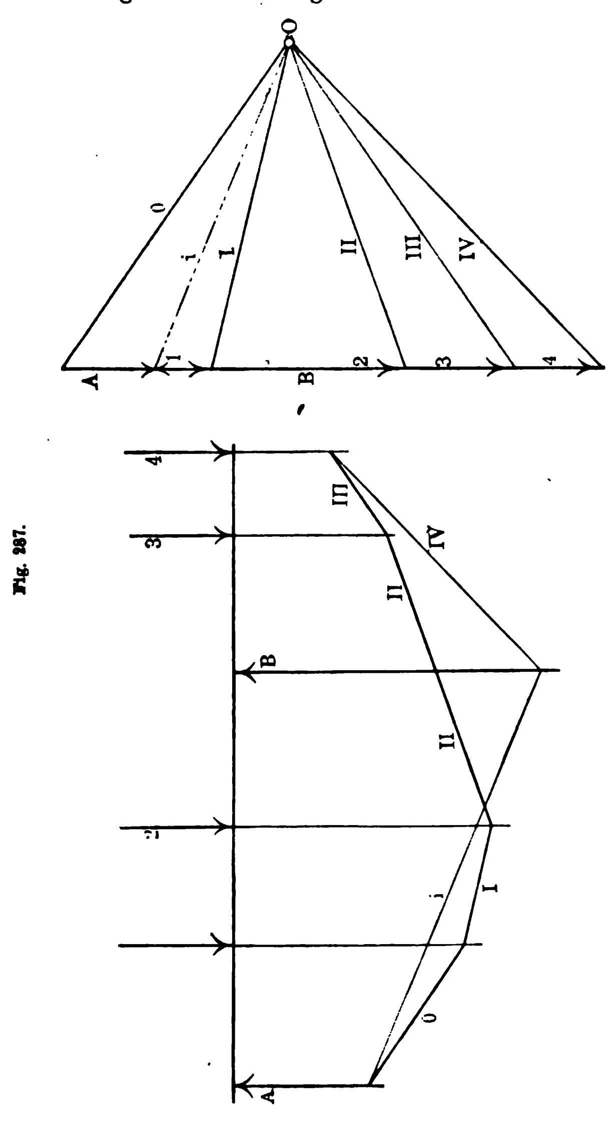


Fig. 287.

lastenden Kräfte 1, 2, 3, 4 wirken unter verschiedenen Richtungen, die Resultierende derselben ist nach dem Seilpolygon, Fig. 288, R = bc.

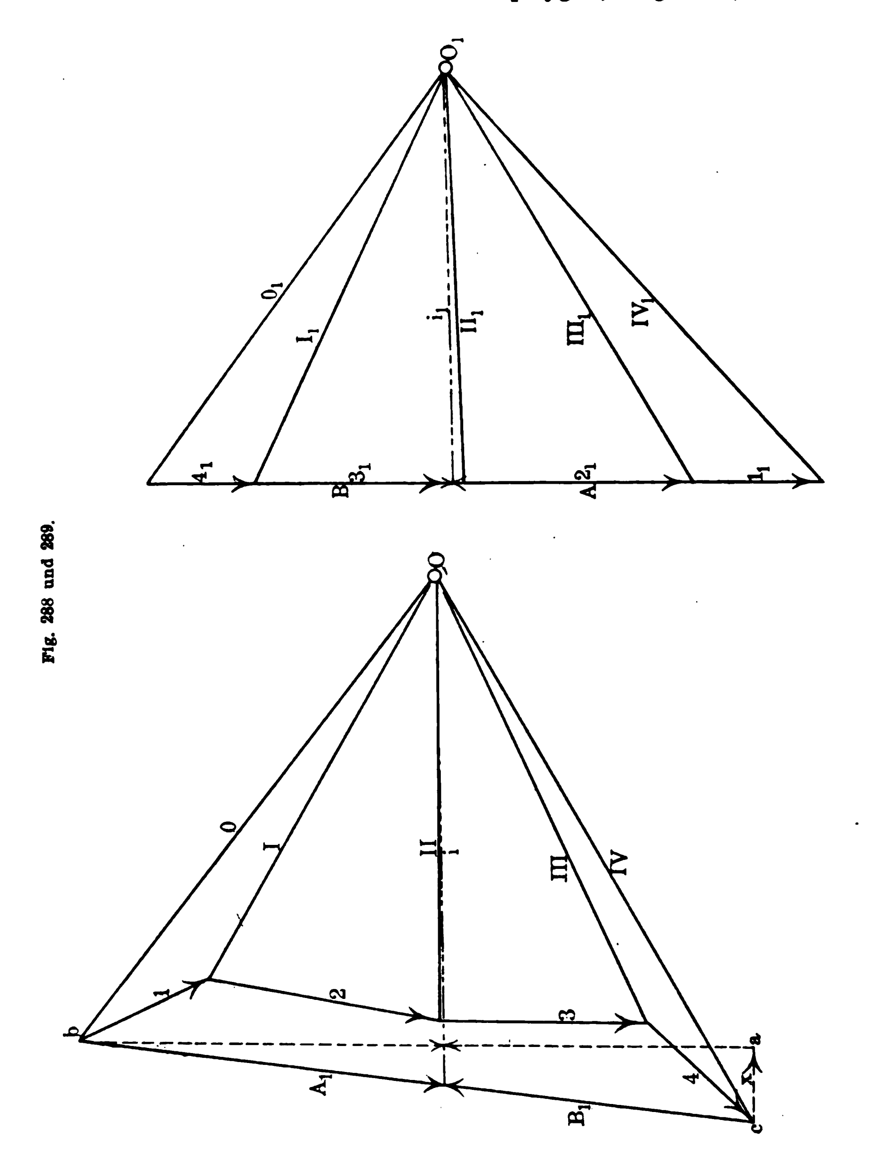


Fig. 288 und 289.

Wir zerlegen dieselbe in die Senkrechte ab und in die horizontale Kraft ac = x, beide ergeben sich auch durch eine algebraische Summation der Teilkräfte von 1, 2, 3 und 4. In ab = A + B, der Summe der senk-

recht wirkenden Auflager lassen wir die Schlusslinie i einschneiden und erhalten auf diese Weise die numerischen Werte von A und B, welche aus dem angefügten Massstab zu entnehmen sind.

Eine Kontrolle der Konstruktion ergiebt sich nun sofort, wenn man die senkrechten Teilkräfte $1_1\,2_1\,3_1$ und 4_1 in ein besonderes Kräftepolygon, Fig. 289, vereinigt, das Seilpolygon $0_1\,I_1\,II_1$ .. konstruiert, nach Fig. 287 überträgt, und die Schlusslinie i_1 parallel durch den Polpunkt 0_1 in

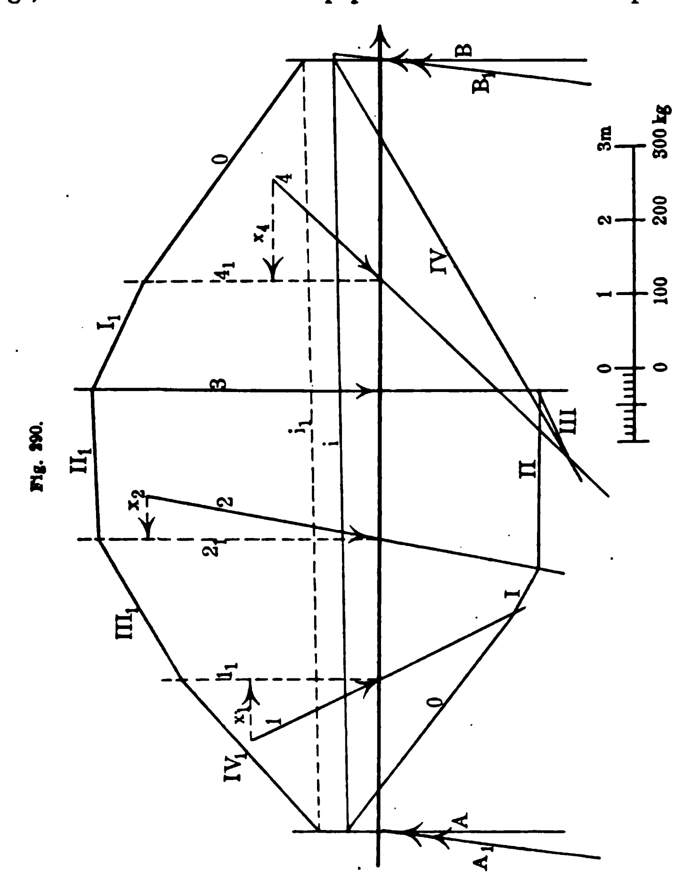


Fig. 290.

Fig. 288 einzeichnet; i_1 schneidet dann die gleichen Abstände wie auf ab ab. Verlängert man i bis zum Schnitt durch bc, so ergeben sich die Auflagerdrucke A_1 und B_1, deren Richtung parallel zu bc = R liegt und welche in schiefer Richtung das Gleichgewicht mit 1, 2, 3 und 4 herstellen. In Fig. 290 ist zu beachten, dass das zweite Seilpolygon umgekehrt aufgetragen ist, die Auflager in Fig. 288 liegen daher entgegengesetzt.

Ist ein Träger ausserhalb der Auflager belastet, wie in Fig. 287 angedeutet, so hat man nur bei der parallelen Übertragung der Seilkräfte genau auf die Reihenfolge zu achten, die Pollinie II liegt hier zwischen 2 und 3, überschreitet also die Reaktionslinie des Auflagers B, die Schlusslinie i kreuzt daher die Seilkräfte, weil die Anfangslinien 0 und IV wieder in die Auflagerlinien zurücklaufen müssen. Wie uns aus der analytischen Berechnung bekannt, ist es nicht ausgeschlossen, dass, je

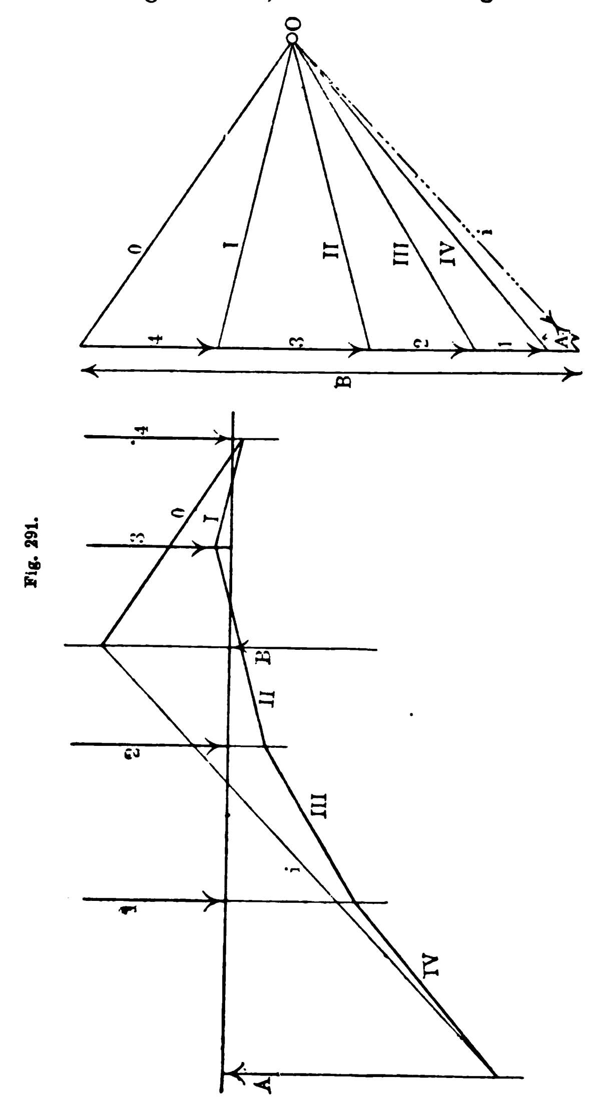
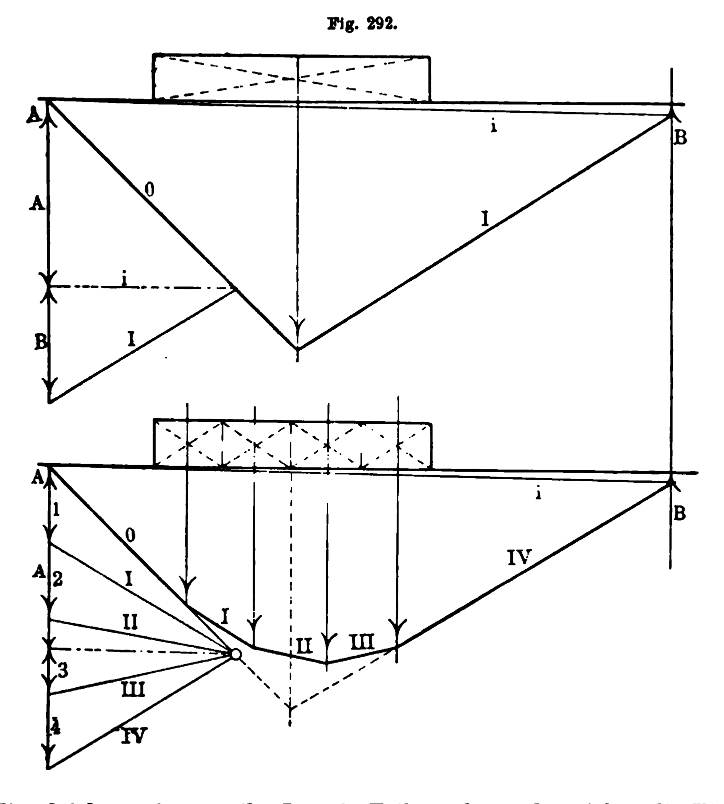


Fig. 291.

näher i an eine der Anfangslinien, hier an 0 sich anlehnt, in diese fällt, oder diese überschreitet, A sehr klein, Null oder negativ wird. Fig. 291 stellt den letzteren Fall dar. Die Kräfte sind hier, nebenbei bemerkt, in umgekehrter Reihenfolge aufgetragen.

Sind gleichmässig verteilte Lasten vorhanden, Fig. 292, so ersetzt man diese durch Kräfte, welche in den Schwerpunkten derselben wirken. Es bleibt zur Bestimmung der Auflagerreaktionen sich gleich, ob

Fig. 292.



man die gleichmässig verteilte Last in Teile zerlegt oder nicht; die Fig. 292 bedarf hierauf bezüglich wohl weiter keiner Erklärung.

Beispiele. I. Seite 172, 173 u. f. haben wir die Ermittelung der Kräfte eines Dachbinders durchgeführt, welcher gleich- und ungleichmässig belastet ist. In Fig. 196 ist eine einseitige Belastung vorgesehen, eine einseitige Schwerlast beispielsweise; die Auflager A und B wurden berechnet. Mit Rücksicht auf dieselben Belastungen wie in Fig. 196 sind in Fig. 293 die Auflager graphisch ermittelt, das Resultat ist natürlich

Auflagerreaktionen.

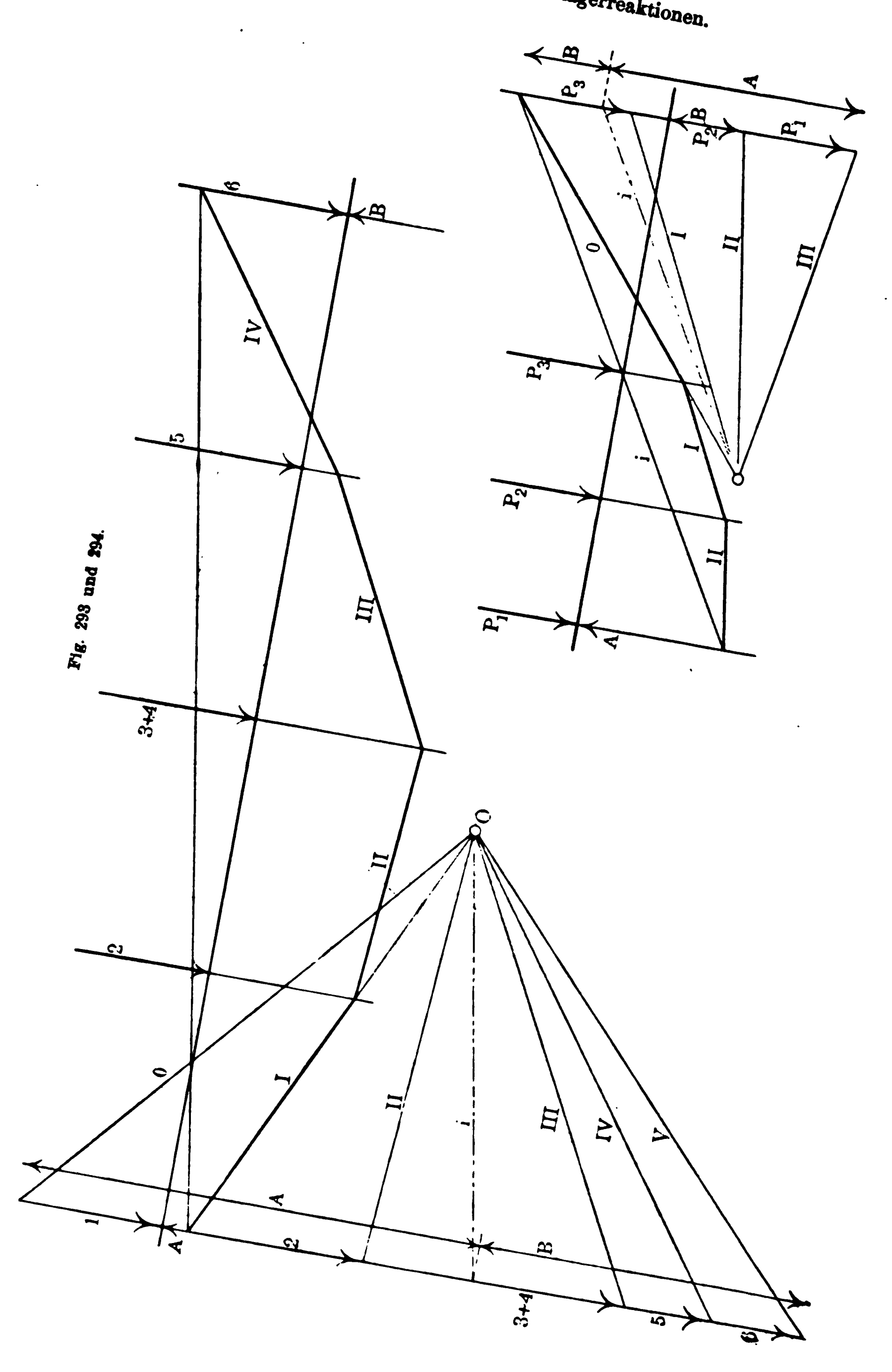


Fig. 293 und 294.

das gleiche. Auch durch Fig. 294 gelangen wir zu denselben Auflagerreaktionen auf graphischem Wege wie durch die Rechnung. Diese Figur entspricht dem Belastungsfall der Fig. 198. Die Endkräfte 1 und 6 in Fig. 293, 1 und 3 in Fig. 294 sind entsprechend von den jeweiligen A und B in Abzug zu bringen.

II. In Fig. 295 ist auf den Stützen A und B ein Balken excentrisch belastet. $q_1 + q_2$ sind gleichmässig verteilte Belastungen, P Einzellast, die excentrisch wirkende Last Q soll so bestimmt werden, dass A vollständig entlastet wird. In diesem Falle muss B die sämtlichen Belastungen $B = q_1 + q_2 + P + Q$ übernehmen. Wir tragen q_1, q_2 und P auf, wählen den Polpunkt o senkrecht auf diese Richtungen, bezw. mit horizontaler Schlusslinie i, welche gleichzeitig die erste Seilkraft o ist. Die Richtung der $III = Ob_1$ ist gegeben, diese schneidet die Richtung der Kraft Q in C, verbindet man jetzt C mit a und zieht $x = Od$ parallel aC, so ergiebt sich aus den Kräftelinien die zu suchende Q durch $b_1 d$.

III. Der Träger AB, Fig. 298, ist mit 3 Kräften belastet, es soll von diesen eine Kraft, hier P_3, so bestimmt werden, dass die Schlusslinie i_0, welche die Auflager auf der Kräftelinie abschneidet, horizontal, bezw. parallel zur Balkenachse wird. Man trägt zunächst wieder P_1 und P_2 auf, wählt einen beliebigen Polpunkt O_o und zieht i horizontal (parallel der Balkenachse) durch O_o und durch den beliebigen Punkt a der Hauptfigur überträgt die Seilkräfte o, I und II bis c, verbindet jetzt c mit b und zieht durch O_o eine Parallele x zu cb, mit dieser schneidet man durch d die Länge bezw. Grösse der Kraft P_3 ab, das Auflager B ist dann auch bestimmt.

IV. Wir haben in der Fig. 296 die Belastung einer Achse mit 3 Einzelkräften dargestellt, von denen eine Kraft 500 kg ausserhalb des Auflagers B wirkt, die Achse ist dieselbe wie die in Band II, S. 176, verzeichnete. Man sucht durch Annahme eines beliebigen Polpunktes und durch Konstruktion des Seilpolygons die Auflagerreaktionen; das Resultat ist das gleiche wie das der Rechnung A = 1812 und B = 2688 kg. In dem darüber stehenden Seilpolygon haben wir eine Übertragung des unteren Seilpolygons vorgenommen. Wir erreichen dadurch, wenn die Ordinaten m, n und p an die Horizontale AB angetragen werden, dass dann die neue Schlusslinie i_o mit der Achse der Welle zusammenfällt.

Die Tragachse, Fig. 297, ist die gleiche, wie die in S. 175. Bd. II. Auch hier kam es uns darauf an, dass die Schlusslinie i_o des Seilpolygons in die Achse des gegebenen Balkens fällt. Wir haben zunächst

Fig. 295 und 296.

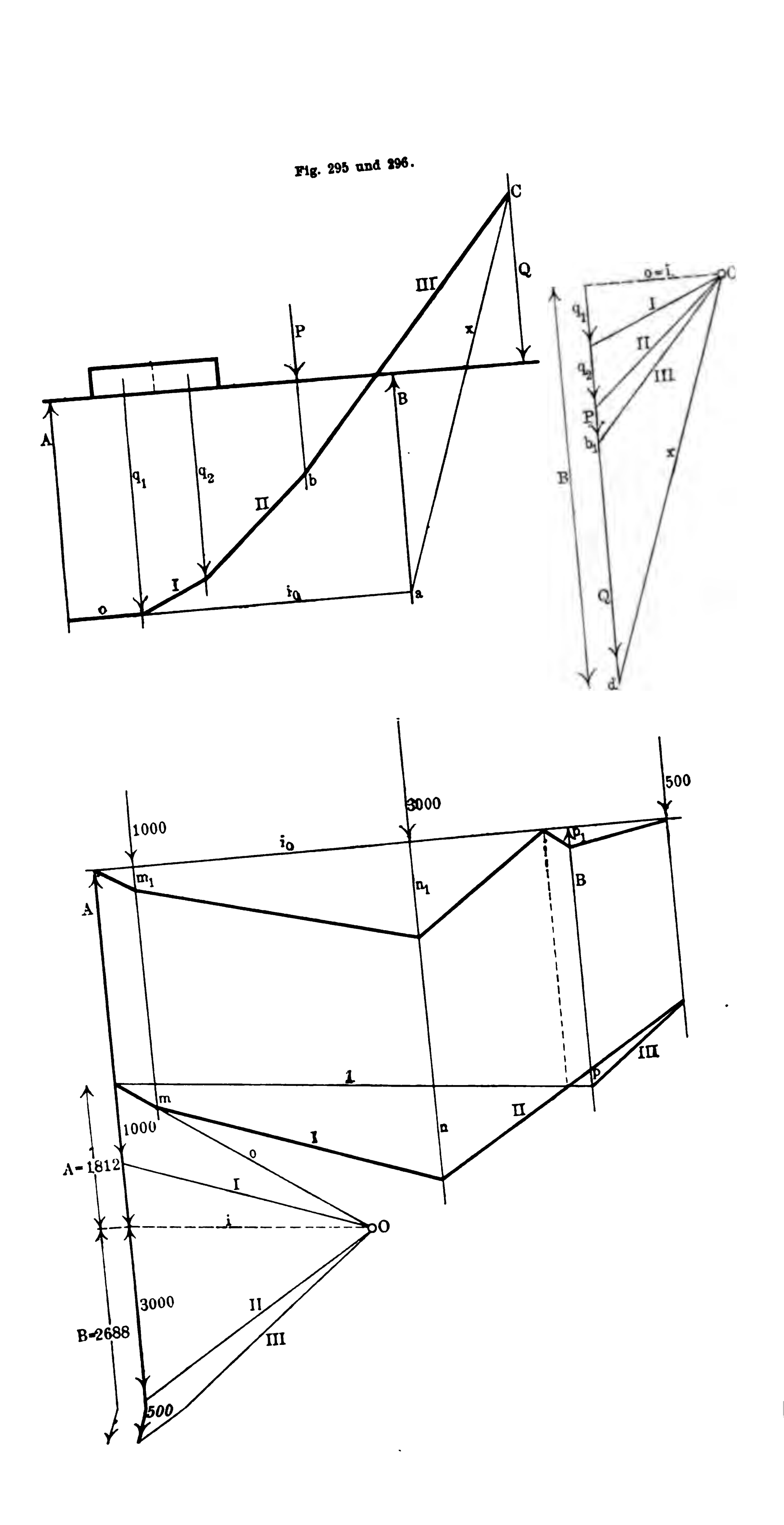




Fig. 297 und 298.

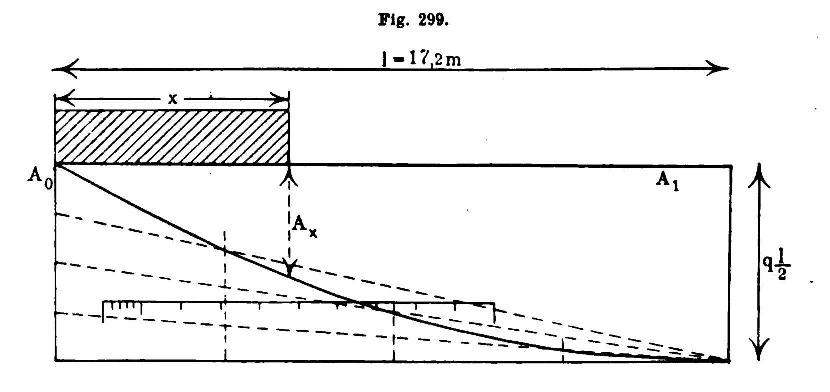
mit dem beliebigen Polpunkt O das Seilpolygon rechts konstruiert und finden die Reaktionen A = 6776 und B = 3224, dieselben wie durch Rechnung. Überträgt man nun wieder die Ordinaten m und n nach m_1 und n_1, so erhält man das neue Seilpolygon o_1, I_1, II_1, nach diesem haben wir zum Nachweis der Richtigkeit das linke Seilpolygon konstruiert, dessen Polpunkt O_1 durch die Schlusslinie i_1 wieder dieselben Auflager liefert.

Denkt man sich beide in A und B angetragenen Kraftlinien so aufeinander gelegt, dass die Polpunkte O und O_1 nach einer Seite zu liegen kommen und die Kraftlängen P und Q selbst aufeinander fallen, so ist, um zu einer horizontalen Schlusslinie zu gelangen, nur nötig, für den beliebigen Polpunkt O den Auflagerschnitt z zu bestimmen, in z eine Senkrechte zu errichten und diese dem senkrechten Polabstand gleich zu machen, das heisst, der zu suchende Polpunkt O_1 wird durch die Senkrechte OO_1 auf zO_1 abgeschnitten, weil jeder Polpunkt denselben Schnittpunkt z liefern muss.

V. Bemerkung zur Ermittelung der Kräfte des Dachstuhles, Fig. 212. Die Ergänzungsfiguren 215 dürften jetzt wohl in Bezug auf ihre Konstruktion keine Schwierigkeiten mehr verursachen; sie dienen dazu, wie auch schon Seite 192 angedeutet, die Auflagerreaktionen in m und n festzustellen, die Fig. 215 stellt die entsprechende Hilfsfigur dar, O, der Polpunkt, ist hier auch beliebig gewählt; wir finden auch auf graphischem Wege, dass m und n gleich belastet sind. —

Wenn ein Träger nur auf eine gewisse Länge x, Fig. 299, gleichmässig belastet ist, so sind die Auflagerreaktionen A_0 und A_1, wie uns

Fig. 299.



bekannt, ungleich gross. Der Auflagerdruck in A_0 ergiebt sich bei einer Belastung, welche bis zu x vorgerückt ist, aus der Gleichung:

$$A_x l = q x \left(l - \frac{x}{2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Für $x = o$ wird $A_x = o$, für $x = l$ wird $A_x = q\frac{l}{2}$, im ersteren Falle ist A_0 nicht belastet, im letzteren mit der halben Belastung in A_1, mit $q\frac{l}{2}$.

Aus Gl. 31 folgt $A_x = \frac{q x}{l}\left(l - \frac{x}{2}\right)$; dieselbe lässt sich auch schreiben

$$A_x = q l \left[\left(\frac{x}{l}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31a)$$

Die Form derselben, $y = ax - bx^2$ stellt, wie uns aus früheren Grundsätzen bekannt ist (s. auch Bd. I, S. 110 und 373), eine Parabel dar; man konstruiert dieselbe, indem wir in A_1 in irgend einem Massstabe den Zahlenwert $q\frac{l}{2}$ auftragen und eine Parabel durch A_0 zeichnen, deren Scheitel im Endpunkt von $q\frac{l}{2}$ liegt*), jede Lage x der vorgerückten Last liefert in der betreffenden Ordinate an dieser Stelle A_x, die Auflagerstärke in A_0. In unsern Figuren ist $q = 580$ kg auf den laufenden m; $l = 17{,}2$ m, somit $q\frac{l}{2} = 5000$ kg. Für $x = 8{,}6$ m vorgerückte Last, erhält man aus der Figur $A = 3700$ kg; für $x = 6$ m $A = 2900$ Auflagerdruck, die Rechnung ergiebt natürlich dieselben Resultate.

VI. In den folgenden Figuren haben wir einige Bauwerke herausgegriffen, welche teilweise einseitig, teilweise ungleichmässig belastet sind. Die Auflager A und B sind durch das Seilpolygon festgestellt und sind dann verwendet worden, um mit Hilfe der Kräftediagramme die Spannungen festzustellen.

---

*) Entwickelt man den 1. Differentialquotient der Gl. 31, $\frac{dA_x}{d_x} = q\left(1 - \frac{x}{l}\right)$, so ergiebt die bekannte Bedingung

$$q\left(1 - \frac{x}{l}\right) = o, \quad x = l,$$

d. h. die Kurve hat in A_1 ihr Maximum, der Scheitelpunkt der Parabel muss unterhalb A_1 liegen.

Der Träger, Fig. 300, ist dem der Fig. 232 nachgebildet und hat keine Parabelform. Die Gesamtbelastung ist 20000 kg, welche verschieden verteilt zur Anwendung kommen. Die Kräftepolygone in den Diagrammen links liefern die Spannungen für symmetrisch verteilte Belastungen der Knotenpunkte; im oberen ist gleiche Belastung für alle Knotenpunkte angenommen $P_1 = P_2 = P_3 \dots P_6 = 3333$ kg, im unteren $P_1 = P_2 = P_5 = P_6 = 1000$ kg (event. Eigengewicht), $P_3 = P_4 =$ 8000 kg. Die Konstruktion eines Seilpolygones ist hier entbehrlich, weil $A = B = 10000$ kg sich ohne weiteres aus der Anschauung ergiebt; die Verstrebungen im mittleren Feld t und 25 können in Wegfall kommen. Das Diagramm rechts liefert die Kräfteverteilung für eine einseitige Belastung P_1, P_2, P_3 mit je 1000 und $P_4 = P_5 = P_6$ mit je 5667 kg, oberhalb ist das zur Bestimmung der Auflager nötige Seilpolygon ausgeführt. Hier ist noch die Zugstrebe 25 erforderlich.

In Fig. 301 ist derselbe Träger mit unsymmetrisch verteilter Belastung der Knotenpunkte nochmals aufgezeichnet; aus dem Seilpolygon entnimmt man A und B und ermittelt mit diesen die Kräfteverteilung im Träger. Die Streben 5 und 9 können entbehrt werden, 25 ist aber wieder erforderlich. Die folgenden tabellarischen Übersichten enthalten die Spannungen.

Kräfteverteilung des mit 20000 kg belasteten Trägers, Fig. 300.

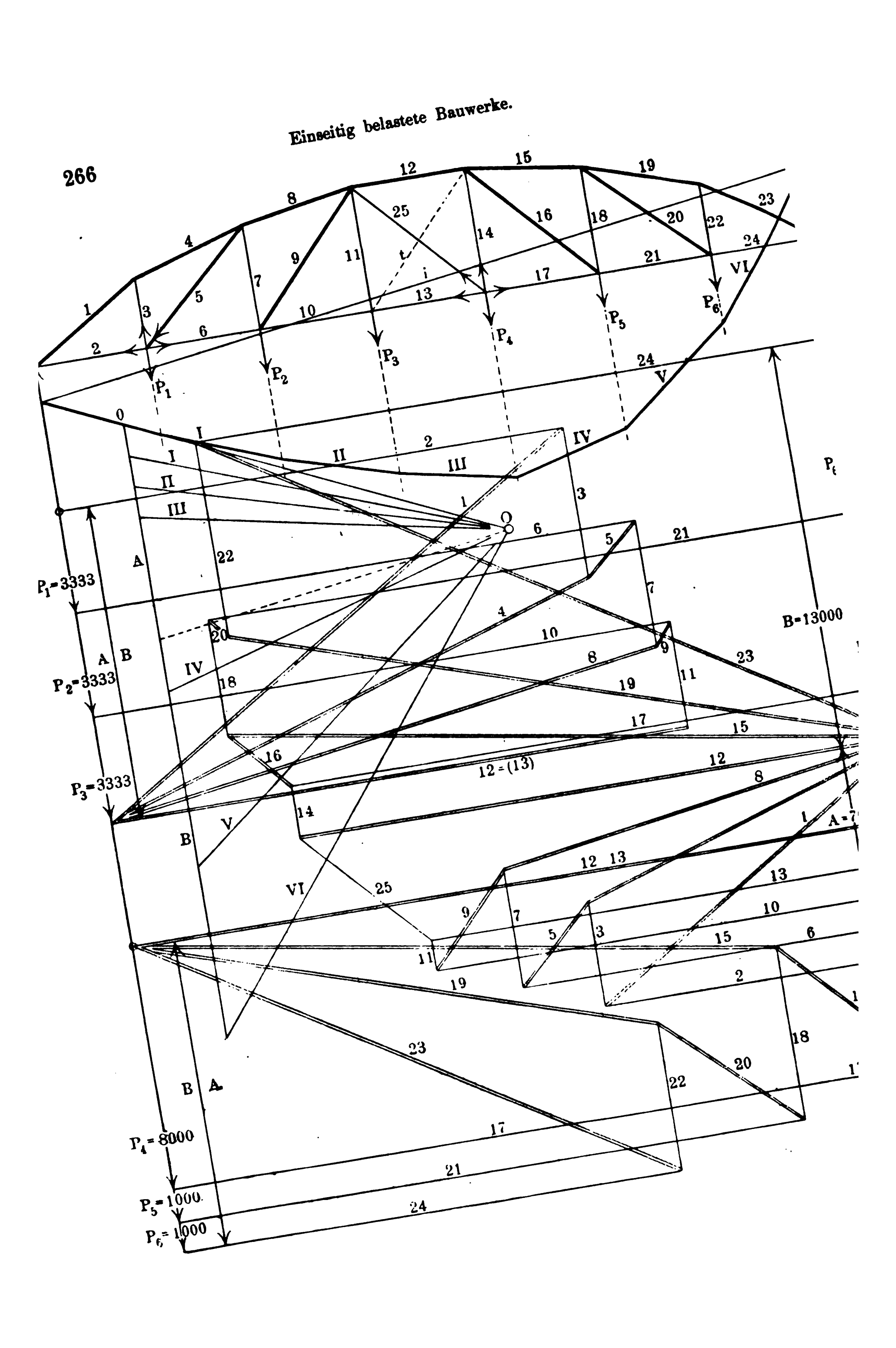
Symmetrisch verteilte Belastung							
Bezeichnung	Äuss. Kr.	Zug	Druck	Bezeichnung	Äuss. Kr.	Zug	Druck
Gegeben				Gegeben			
$P_1 = P_2 = \dots P_6 =$	3333	—	—	$P_1 = P_2 = P_5 = P_6 =$	1000	—	—
Auflager A = B =	10000	—	—	$P_3 = P_4 =$	8000	—	—
1	—	—	19800	Auflager A = B =	10000	—	—
2	—	16400	—	24	—	16000	—
3	—	4900	—	23	—	—	18850
4	—	—	17150	22	—	4800	—
5	—	—	2350	21	—	20200	—
6	—	18150	—	20	—	—	5500
7	—	4100	—	19	—	—	17000
8	—	—	18300	18	—	5000	—
9	—	—	1000	17	—	24300	—
10	—	18725	—	16	—	—	6000
11	—	3400	—	15	—	—	20500
12	—	—	18725	14	—	7900	
13	—	18725	—	13	—	24450	—
				12	—	—	24450

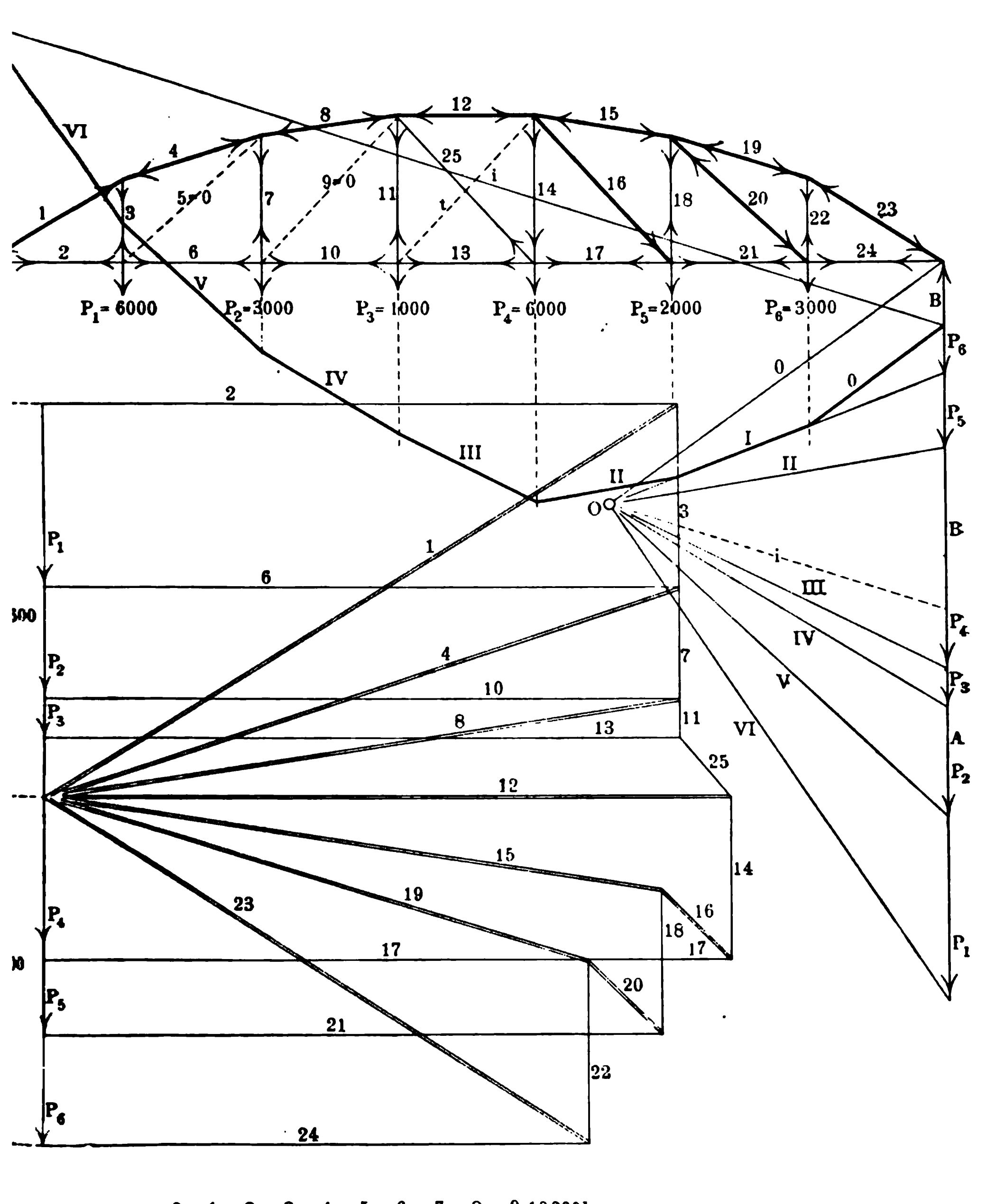
Einseitige Belastung. Fig. 800.

Bezeichnung	Äussere Kräfte	Zug	Druck
Gegeben $P_1 = P_2 = P_3 =$	1000	—	—
$P_4 = P_5 = P_6 =$	5667	—	—
Auflager A =	7000	—	—
B =	13000	—	—
1	—	—	13000
2	—	11000	—
3	—	3400	—
4	—	—	11600
5	—	—	3400
6	—	13500	—
7	—	3800	—
8	—	—	13750
9	—	—	3850
10	—	16150	—
11	—	1000	—
12	—	—	19800
13	—	16150	—
14	—	1666	—
15	—	—	21800
16	—	—	2600
17	—	19700	—
18	—	3600	—
19	—	—	22000
20	—	—	750
21	—	21500	—
22	—	6200	—
23	—	—	24600
24	—	20900	—
25	—	5200	—

Ungleichmässige Belastung. Fig. 801.

Bezeichnung	Äussere Kräfte	Zug	Druck
Gegeben $P_2 = P_6 =$	3000	—	—
$P_1 =$	5000	—	—
$P_4 =$	6000	—	—
$P_3 =$	1000	—	—
$P_5 =$	2000	—	—
Auflager A	10600	—	—
B	9400	—	—
1	—	—	20000
2	—	17100	—
3	—	5000	—
4	—	—	17900
5	—	—	—
6	—	17000	—
7	—	3000	—
8	—	—	17150
9	—	—	—


P1=3333
P2=3333
P3=3333
P4=8000
P5=1000
P6=1000
B=13000
12=(13)


P1 = 6000
P2 = 3000
P3 = 1000
P4 = 6000
P5 = 2000
P6 = 3000
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10000kg

Bezeichnung	Äussere Kräfte	Zug	Druck
10	—	17100	—
11	—	1000	—
12	—	—	18400
13	—	17100	—
14	—	4400	—
15	—	—	16700
16	—	—	2600
17	—	18400	
18	—	3850	—
19	—	—	15200
20	—	—	2700
21	—	16450	—
22	—	5000	—
23	—	—	17200
24	—	14500	—
25	—	2000	—

Die folgende Übersicht enthält auszüglich aus den vorstehenden diejenigen Spannungen und Kräfte, welche für die Ausführung in Verwendung kommen würden.

Bezeichnung	Zug	Druck	Bezeichnung	Zug	Druck
Auflager A	—	10600	13	24450	—
B	—	13000	14	7900	—
1	—	20000	15	—	21800
2	17100	—	16	—	6000
3	5000	—	17	24300	—
4	—	17900	18	5000	—
5	—	5500	19	—	22000
6	20200	—	20	—	5500
7	5000	—	21	21500	—
8	—	20500	22	6200	—
9	—	6000	23	—	24600
10	24300	—	24	20900	—
11	7900	—	25	5200	—
12	—	24450			

Der Dachstuhl, Fig. 302, wurde in Fig. 191 mit symmetrischer Belastung der Knotenpunkte ausgeführt, in nebenstehender Figur sind nur die drei rechten Knotenpunkte mit P_3, P_4, P_5 belastet. Durch Konstruktion des Seilpolygons in Fig. 303 erhält man die Auflagerreaktionen A und B, welche für das Kräftepolygon verwertet wurden; aus diesen ist ersichtlich, dass bei der einseitigen Belastung die Streben 3 und 5 entbehrt werden können.

In Fig. 304 ist ein Dachstuhl mit ungleich verteilter Belastung dar-

Einseitig belastete Bauwerke.

Fig. 302 und 303.

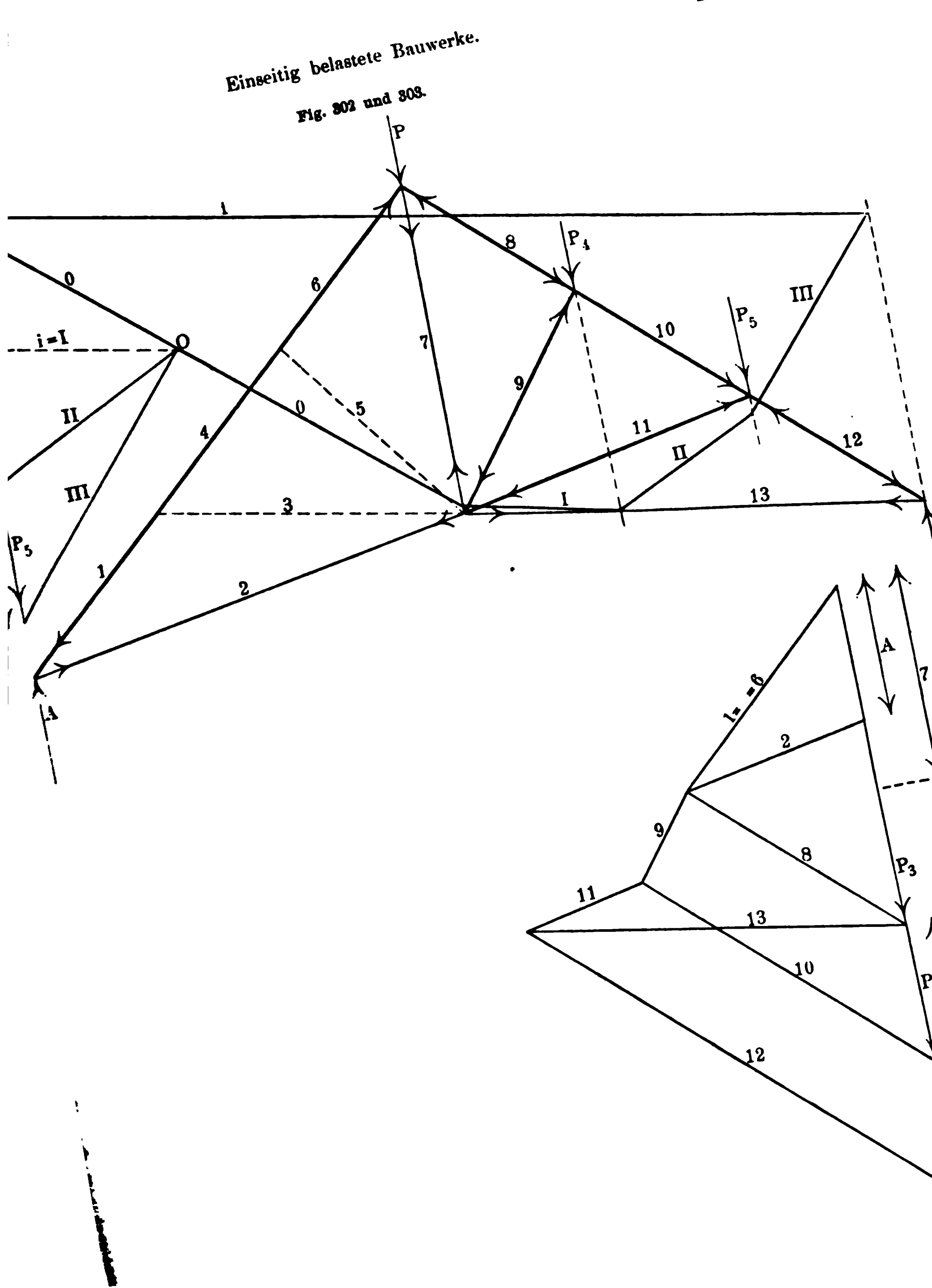
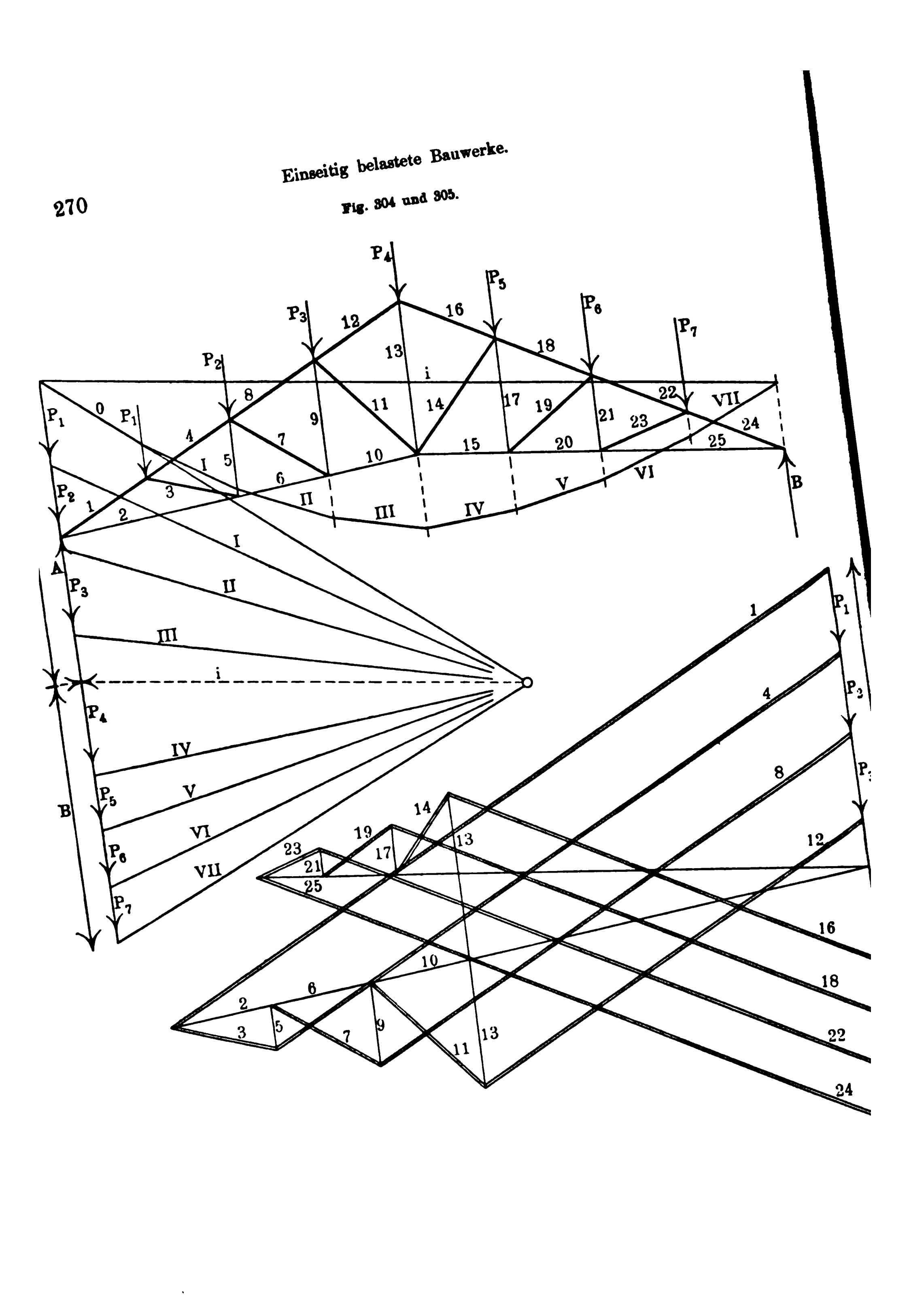
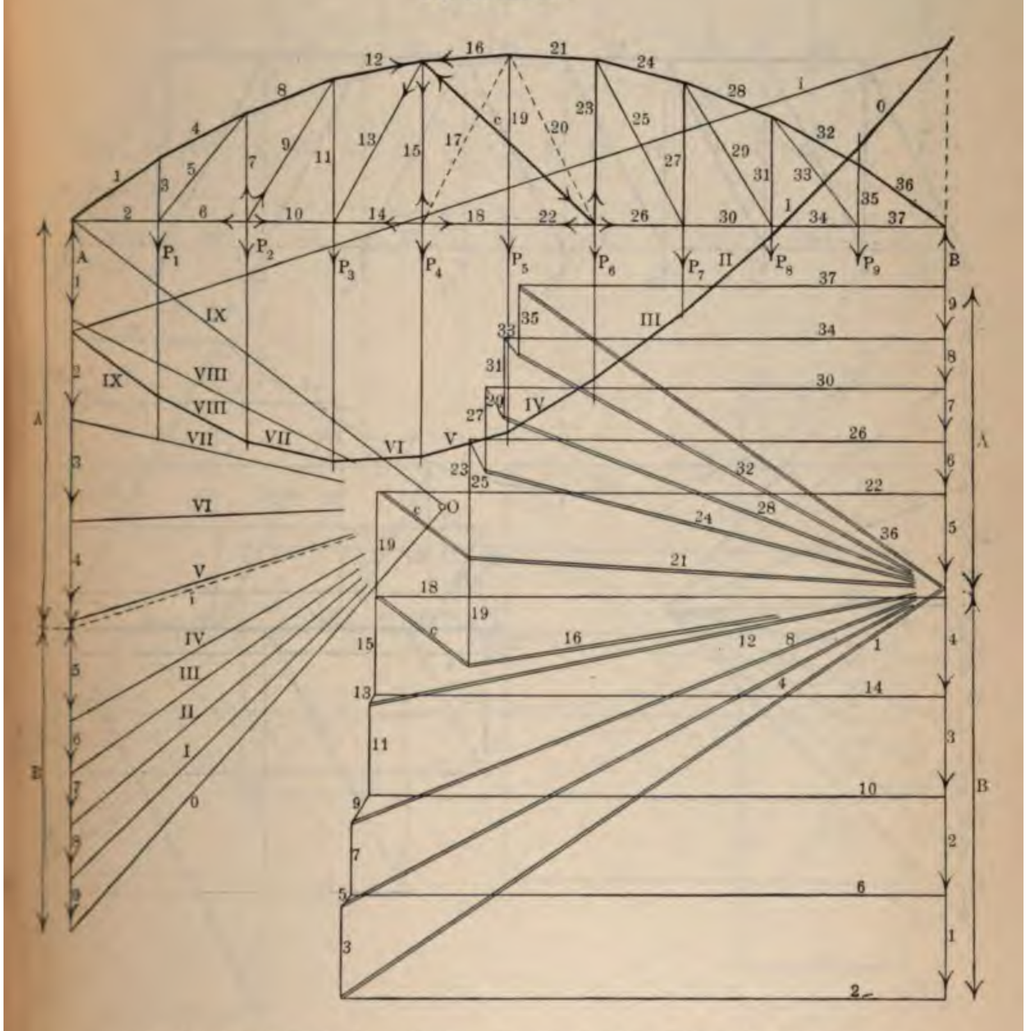


Fig. 304 und 305.



gestellt, und sind zunächst durch ein Seilpolygon die Auflagerreaktionen ermittelt, nach diesen ist dann die Kräfteverteilung vorgenommen; aus dem beigezeichneten Kräftediagramm kann man die Kräfte entnehmen.

Fig. 306 und 307.

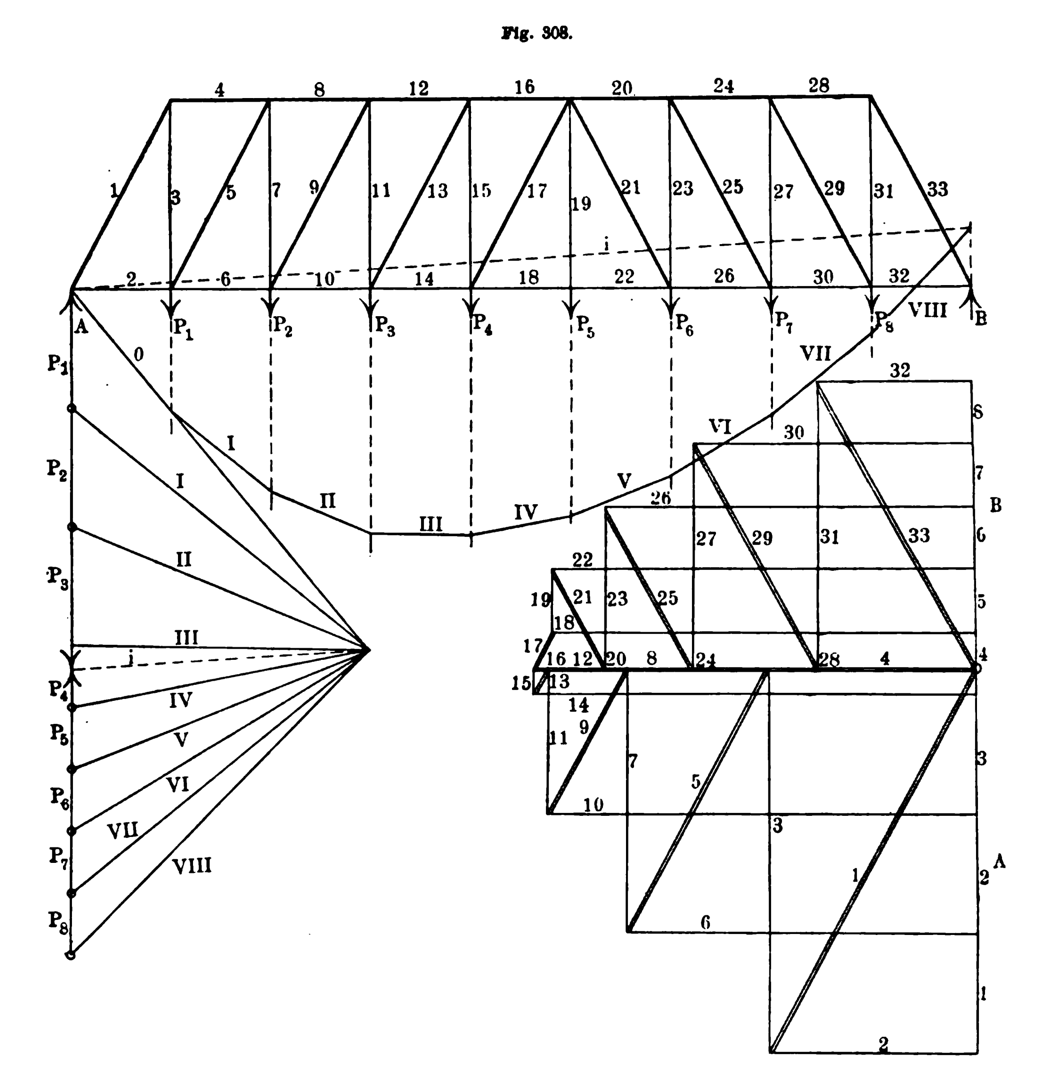


Der Dachstuhl ist der gleiche wie der in Fig. 205 mit gleichmässiger Belastung.

Die ungleich verteilte Belastung des Trägers, Fig. 307, erfordert,

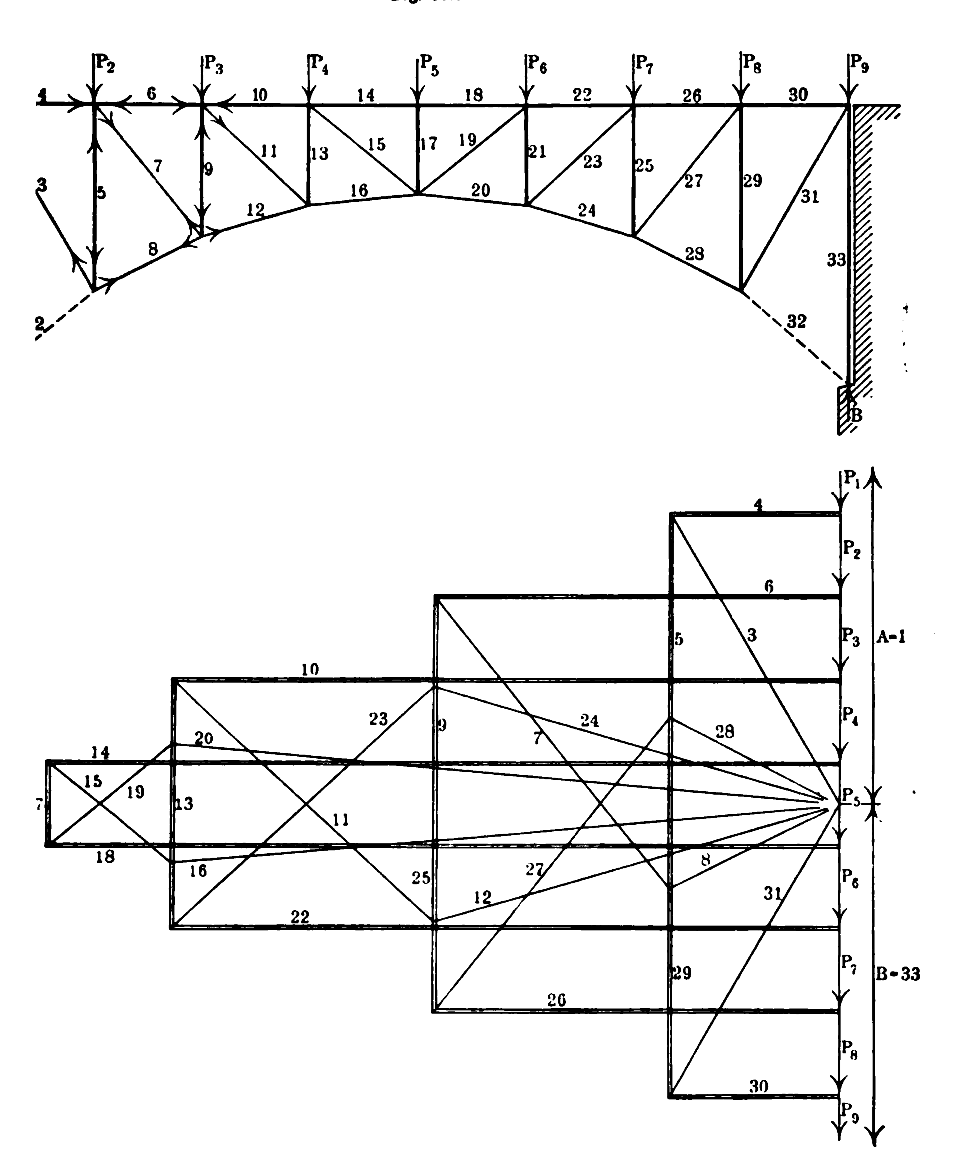
um Gleichgewicht in allen Knotenpunkten herzustellen, eine kleine Veränderung in der Konstruktion, wie wir sie in einer der früheren Figuren bei symmetrisch verteilter Belastung angenommen hatten. Die Zugstreben

Fig. 308.



17 und 20 können in Wegfall kommen, es ist aber eine Druckstrebe, die wir mit c bezeichnet haben, einzufügen. Ist der Träger sowohl symmetrisch als auch unsymmetrisch belastet, dann ist ebenso die Druck-

Fig. 309.



P2
P3
P4
P5
P6
P7
P8
P9
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
B
P1
A=1
B=33

strebe c als auch das Strebenpaar 17 und 20 in Anwendung zu bringen; wird die einseitige Belastung auch von der rechten Seite zur Wirkung kommen, dann ist noch eine symmetrische Gegenstrebe zu c in der Konstruktion anzuordnen. Die Ausführung der Zeichnung selbst dürfte wohl keine Schwierigkeiten mehr bieten.

Der Träger, Fig. 308, dessen Konstruktion auch einer früheren mit symmetrisch verteilter Last gleich ist, ist hier unsymmetrisch belastet. Mit Hilfe des Seilpolygons sind die Auflager ermittelt und danach ist das Kräftediagramm in der Nebenfigur ausgeführt.

Als Vorarbeit für die grösseren Dach- oder Hallenkonstruktionen der nächsten Figuren haben wir in Fig. 309 einen Träger mit oberer geraden und unterer gekrümmten Gurtung mit gleichmässiger Belastung angenommen und in der Nebenfigur das Kräftediagramm konstruiert, die Auflagerreaktionen sind hier gleich gross.

Die Entwickelung der Kräftepolygone, von den Auflagern A und B ausgehend, ist mit keinen Schwierigkeiten verbunden.

Der in den Fig. 310 bis 312, 314 bis 317 graphisch behandelte Dachbinder eines englischen Dachstuhles mit Dachreiter*) ist ein Pappdach mit 1 : 3 Neigung. In den graphischen Darstellungen sind als Belastungen Eigengewicht, Schnee- und Winddruck verwertet.

Die zu Grunde gelegten Belastungen sind: Das Eigengewicht, einschliesslich Schalung und Pfettung, zu 40 kg auf den qm, das Bindergewicht zu 25 kg für 1 qm Grundfläche; der Schneedruck zu 75 kg für den qm Grundfläche; der senkrecht zur Dachfläche gerichtete Winddruck zu 60 kg für den qm.

In der Hauptfigur Fig. 310 ist der Dachstuhl symmetrisch mit dem Eigengewicht belastet gedacht, das Kräftediagramm hierzu ist in Fig. 311 konstruiert. Man beginnt bei den Auflagern A und B und schliesst in bekannter Weise Knotenpunkt an Knotenpunkt.

Der Kräfteplan für einseitige Schneelast ist in Fig. 312 entwickelt; die Auflager A und B lassen sich graphisch und durch Rechnung finden, von ihnen ausgehend, sind die Polygone konstruiert. In den beiden vorstehenden Fällen werden die Stabspannungen in 17 und 29 Null.

Für das Eigengewicht ist Stab 35 und 40 auf Druck, 51 und 56 auf Zug beansprucht.

In Fig. 314 ist derselbe Dachstuhl durch Winddruck von der linken Seite belastet. Durch Fig. 315 sind die Auflagerreaktionen ermittelt und zwar für beide Fälle, wenn A oder B einem beweglichen Lager entspricht.

*) Aus Breymann, Baukonstr. III, Leipzig, Gebhardt.

In Fig. 316 ist der Kräfteplan gezeichnet, wenn in B das bewegliche Lager, in Fig. 317, wenn das bewegliche Lager auf der Windseite liegt.

Aus den sämtlichen Kräfteplänen stellt man sich am besten tabellarisch, wie schon mehrfach oben geschehen ist, die Spannungen in Kilogramm oder Tonnen (zu je 1000 kg) zusammen, und erhält durch Summation eine Übersicht, aus welcher die Streben auf Zug und Druck, bezw. Knickung zu berechnen sind; der Einfluss der einen oder andern Belastungsart ist dadurch leicht zu überblicken.

Das Shed- oder Sägedach, Fig. 313, ist unsymmetrisch mit P_1 P_2 P_3 P_4 kg belastet. Es werden zunächst durch ein Seilpolygon die Auflagerreaktionen A und B festgestellt, dann die Kräftepolygone entwickelt. Wir haben hier von B begonnen, mit 6 und 7 Gleichgewicht hergestellt, 7 nach 7_1 übertragen, um den Knotenpunkt bei P_3 ins Gleichgewicht zu bekommen, dann 2, 3, 5, 6 angeschlossen, hierbei 5 durch 5_1 übertragen u. s. w.

Der folgende Dachstuhl, Fig. 318 und 319, soll auf die Seitenkraft des Windes untersucht werden*). Der gesamte Winddruck W verteilt sich auf 8 Felder, wir haben die Verteilung symmetrisch angenommen, obgleich seine Kraft nach oben zu stärker als nach unten angenommen werden müsste, indem der Winddruck nach der Erdoberfläche zu abnimmt. Die Resultierende W geht dann durch die Druckstange II.

In Fig. 319 ist das Kräftediagramm verzeichnet. In A sei das bewegliche Lager angebracht. Trägt man das Kräftedreieck des Schnittpunktes x_1 für A, B und W = ab auf, so sind die Auflager bestimmt. Es muss nun das Gleichgewicht der Kräfte A, 1, 9, I im Auflager d festgestellt werden. Denkt man sich den Fischbauchträger dy hinweg und durch einen geraden Stab yd ersetzt, so müssen die drei Kräfte $3 \cdot \frac{W}{8}$ noch auf d und y verteilt werden, in d wirkt dann die Last

$$\frac{W}{16} + \frac{1}{2} 3 \cdot \frac{W}{8} = \frac{W}{4},$$

dieser entspricht die Länge

$$ae = \frac{W}{16} + \frac{W}{8} + \frac{W}{16}.$$

Den Kräften A, I, yd, $\frac{W}{4}$ entspricht weiter das Kräftepolygon af, fg.

*) Nach Müller-Breslau, Graph. Stat., Leipzig, Baumgärtner.

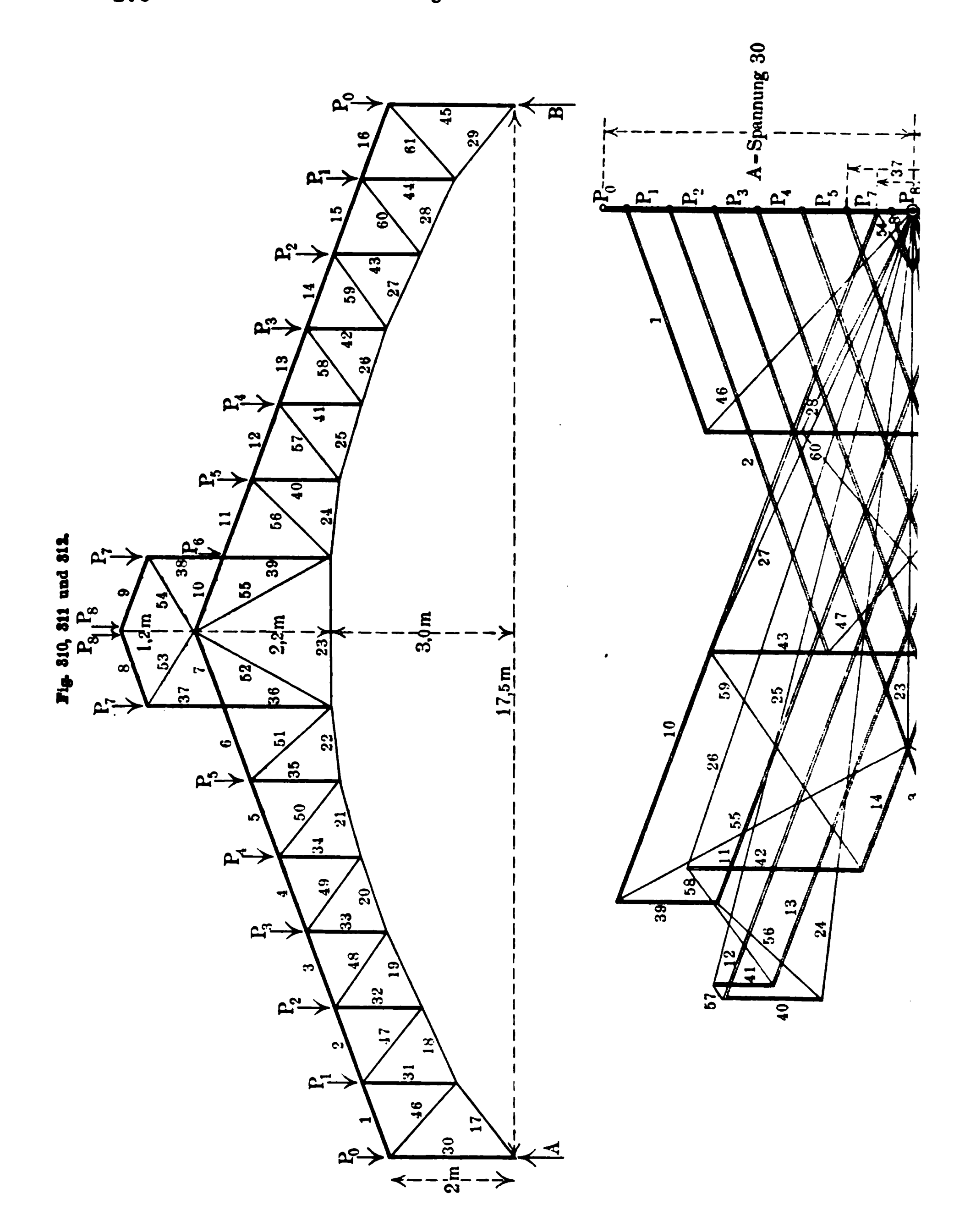
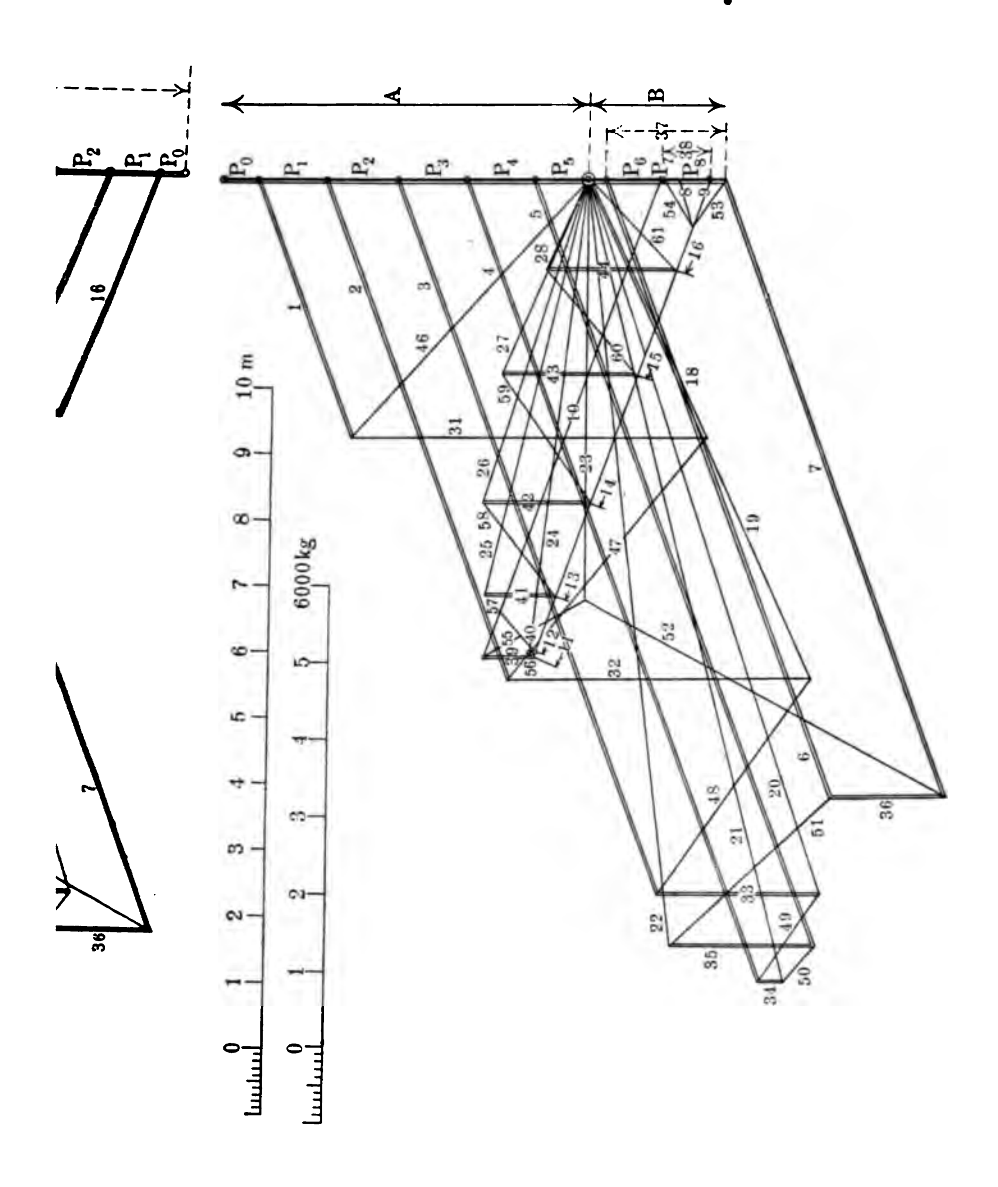


Fig. 310, 311 und 312.


A
B
10 m
6000 kg

ge, ea; die Grösse der Kraft in I ist hierdurch festgestellt, von den Punkten h und g aus lassen sich jetzt unschwer die Kräfte 9 und 1 von g und h aus anschliessen, wodurch c bestimmt ist. In derselben Weise findet sich für den First des Dachstuhles, für die Kräfte in 12 und 14, durch Ki der Abschluss und die Kraft in III. Der Anschluss der übrigen Knotenpunkte bietet dann keine Schwierigkeiten.

In Fig. 319 ist die Bezeichnung der Kräfte in V und VII verwechselt.

Wir haben in der folgenden Zahlenübersicht eine Zusammenstellung der Windspannungen für Fig. 318 ausgeführt, welche sich aus Fig. 319 ergiebt, wenn man für die Längeneinheit der Windkräfte W = 1000 kg zu Grunde legt, so dass also die Länge der Linie ab der Summe $\Sigma W =$ 8000 kg entspricht. Konstruiert man sich hierzu einen besonderen Massstab, so erhält man, die Zugspannungen mit +, die Druckspannungen mit — bezeichnet, in kg folgende Spannungsverteilung, für:

1 = — 8000	6 = — 7200	11 = + 4400	17 = — 650
2 = — 7200	7 = — 7200	12 = + 4400	18 = — 1300
3 = — 7200	8 = — 8000	13 = + 3700	19 = — 1300
4 = — 8000	9 = + 4400	14 = + 4400	20 = — 650
5 = — 8000	10 = + 3700	15 = — 1200	21 = — 650
		16 = — 650	22 = — 1200

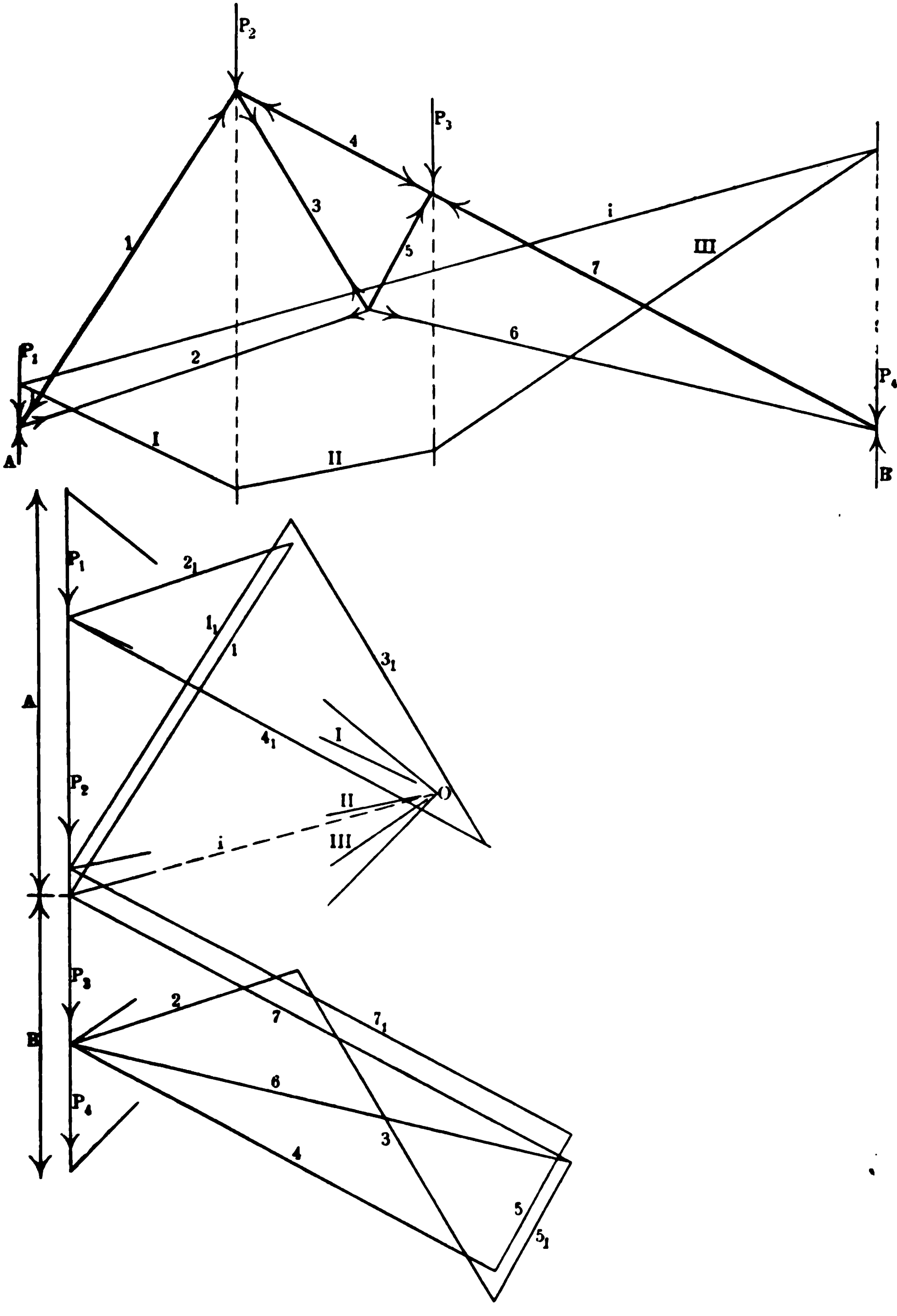
I = + 1900	V = + 300
II = — 4100	VI = 0
III = + 3700	VII = + 2100
IV = + 1900	VIII = + 3700

Verteilt man die Windkräfte ΣW auf die 3 Knotenpunkte im Auflager bei d, in y und im Dachfirst, so dass in jedem derselben $W_0 = \frac{1}{3}$ $8000 = 2667$ kg wirken, die beiden Fischbauchträger kommen hierbei ausser Betracht, und konstruiert unter den gleichen Bedingungen für das Rollenlager in d, das Kräftediagramm, so erhält man, natürlich für die mit römischen Zahlen bezeichneten Hauptstreben, die Spannungen für

I = + 200 kg	V = + 400 kg
II = — 2667 „	VI = 0 „
III = + 2300 „	VII = 2500 „
IV = + 2400 „	VIII = 3500 „

Die Druckkräfte in den beiden Hauptsparren $dy = \overline{1234}$ und $\overline{5678}$ sind nahe gleich gross: 2500 kg. Man sieht, dass bei der letzten Belastungsverteilung, deren Konstruktionszeichnung nicht mit aufgenommen werden konnte, die Spannungen im Hauptnetzwerk im Durchschnitt geringer sind.

Fig. 313.


P2
P3
4
3
1
5
i
III
7
6
2
P1
P4
A
I
II
B
P1
21
11
1
31
A
41
I
P2
II
O
i
III
P3
2
7
71
B
6
P4
4
3
5
51



VII. Wir haben uns in Fig. 320 die Aufgabe gestellt, die Zugkraft x in der mittleren horizontalen Zugstange des Polonceaubinders auf

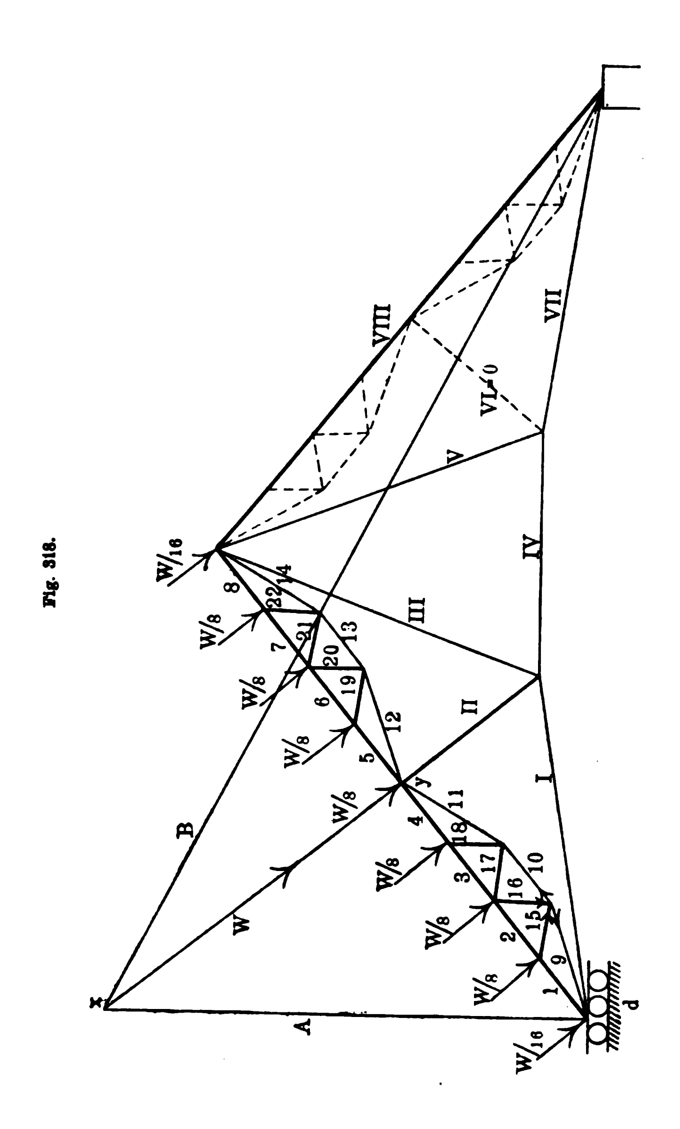


Fig. 318.

mathematisch-graphischem Wege zu ermitteln. Die Belastungen $P_1 \ldots P_7$ sind ungleich gross. Zunächst sind die Auflagerreaktionen festzustellen; es geschieht dies durch das Seilpolygon 0, I, II .... VII. Denkt man

sich mn durchgeschnitten, und die Kraft x am Hebelarm h für einen in p gedachten Drehpunkt angebracht, so tritt Gleichgewicht ein, wenn

$$A\,l/_2 - Pa = xh.$$

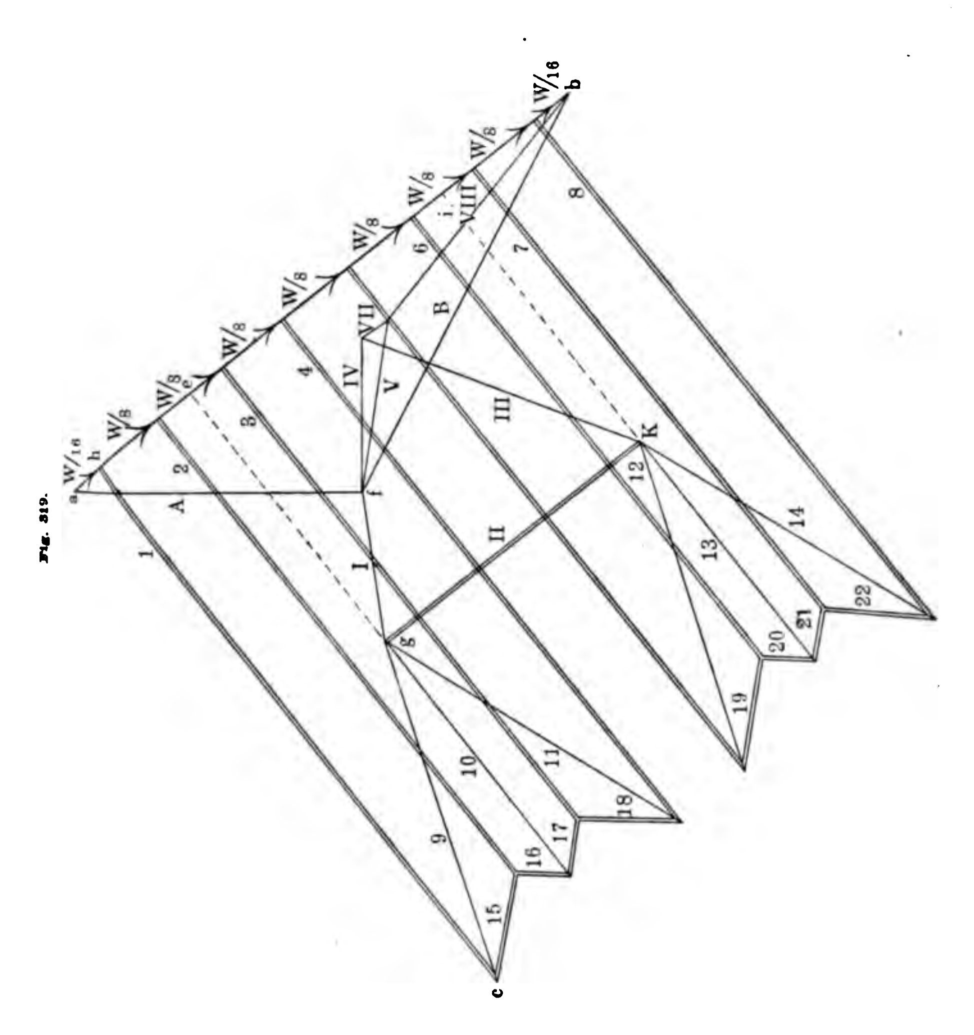


Fig. 319.

P ist die Mittelkraft der Kräfte P_1, P_2 und P_3; ihre Grösse ist $P_1 + P_2 + P_3$, den Hebelarm a finden wir durch Konstruktion der Schwerlinie. Verlängert man die Seilkräfte 0 und III bis zum Schnitt in 0_1, so hat man nur nötig, P parallel den Kräften P_1 P_2 P_3 durch 0_1 zu ziehen, a ist dann bestimmt.

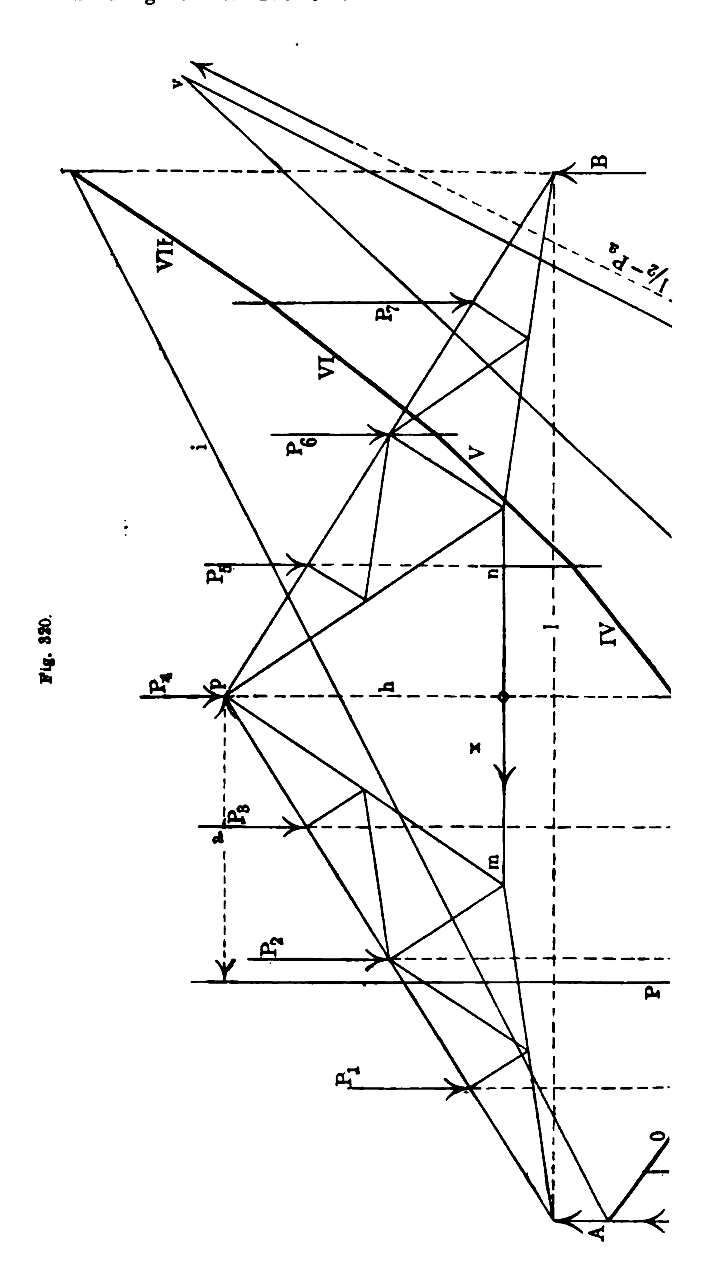
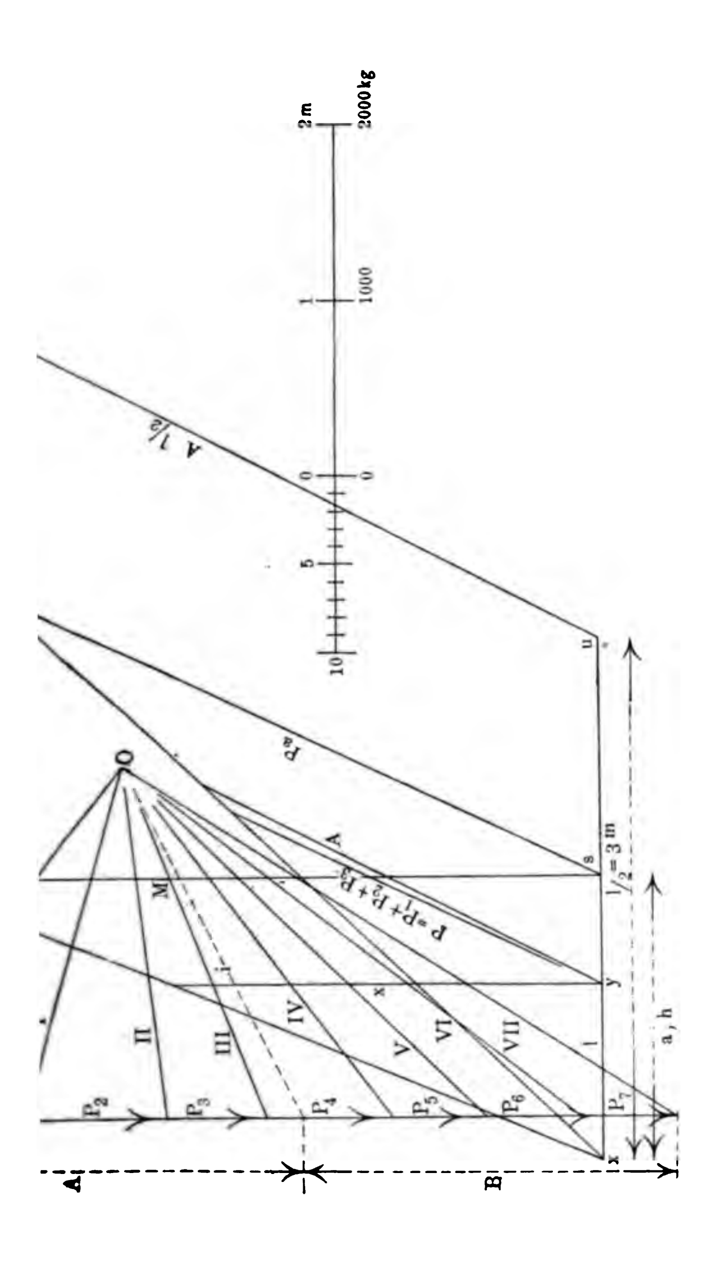


Fig. 320.


2 m
2000 kg
1000
0
5
10
O
M
II
III
IV
V
VI
VII
P_2
P_3
P_4
P_5
P_6
P_7
A
B
s
u
x
y
a, h
$l/_2 = 3$ m

Man bildet nun mathematisch-graphisch durch die Einheit $xy = 1$ die Produkte $Pa = st$ und $A\,l/_2 = uv$; die Differenz der Momente $M = A\,l/_2 - Pa = vw$ in s aufgetragen, weil in unserer Zeichnung zufällig a und $h = xs$ gleich gross sind, findet man durch die Senkrechte X, am Endpunkt der Einheit in y. Die Längen und Kräfte können aus dem angeschlossenen Massstab entnommen werden.

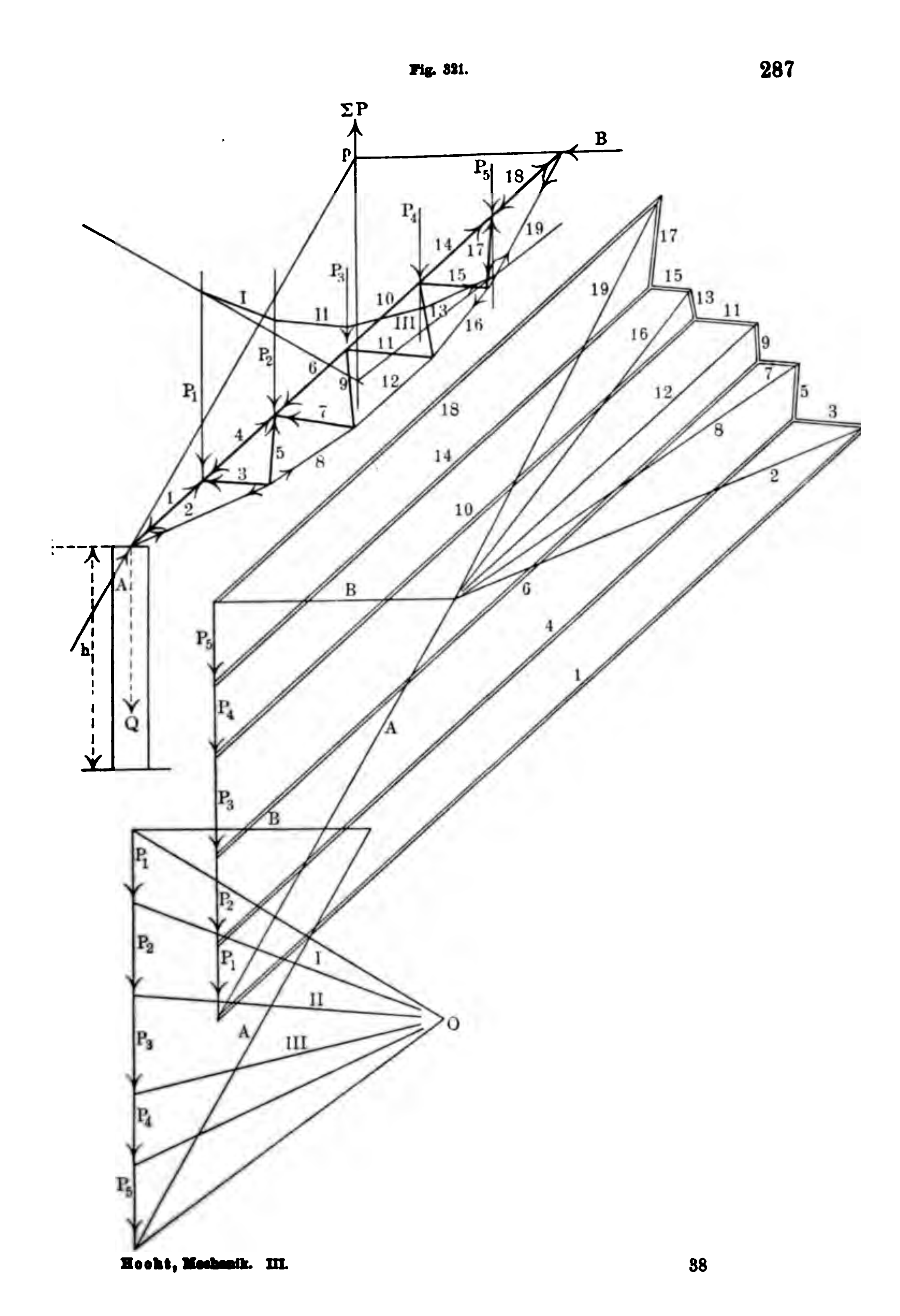
VIII. Gegeben ist in Fig. 321 ein unter einem Winkel geneigter Fischbauchträger, welcher durch die Kräfte $P_1\,P_2 \ldots P_5$ belastet ist; es sollen die Netzwerkspannungen 1, 2, 3 ... 19, sowie die Auflager A und B bestimmt werden, B wirkt horizontal. Man konstruiert zunächst durch Annahme des Polpunktes 0 in der Nebenfigur ein Seilpolygon, dadurch wird die Lage der Mittelkraft ΣP durch den Schwerpunkt der Kräfte $P_1\,P_2 \ldots P_5$ bestimmt. Die Kraft B schneidet die Richtung ΣP in p, sonach ist die Richtung des Auflagerdruckes A auch festgestellt, indem man p mit A verbindet. Die Grössen der Stützen A und B ergeben sich aus der Nebenfigur. Um von A aus mit der Vorzeichnung des Kräfteplanes beginnen zu können, trägt man die Kräfte $P_5\,P_4 \ldots P_1$ in umgekehrter Reihenfolge, ebenso A und B auf und reiht an das Kräftedreieck A, 1, 2 die anderen Kräftepolygone der Knotenpunkte an.

Zerlegt man die unter einem Winkel wirkende Druckkraft A in eine Vertikale und Horizontale Q und S, so bewirkt Q Knickungs- bezw. Druckspannungen, S hingegen durch das Moment Sh Biegungsspannungen, und es lassen sich mit Rücksicht auf das Material die Formeln Seite 231 zur Berechnung der Unterstützung in Anwendung bringen; wenn man es nicht vorzieht, die Fusskräfte der Unterstützung unmittelbar aus dem Moment festzustellen.

IX. Der nachstehende, besonders hohe Dachstuhl, Fig. 322, ist an den inneren Knotenpunkten mit den Kräften $P_1 = P_2 = P_3 = \ldots = 1000$ kg belastet.

Die Auflagerreaktionen sind $A = B = 3500$ kg. Um die Spannungen in den Streben zu ermitteln, ist der darunter stehende Kräfteplan ausgeführt. Der Verfolg der einzelnen Knotenpunkte ergiebt, dass man genötigt ist, die Spannung in der mittleren horizontalen Zugstange 14 zu berechnen. Es lässt sich dies wieder mathematisch-graphisch oder auch durch Rechnung durchführen, in beiden Fällen wird s als Drehpunkt angenommen.

Fig. 321.


ΣP
p
B
P_5
18
P_4
19
14
17
P_3
15
I
II
10
III
13
16
11
P_2
6
9
12
P_1
7
18
4
5
3
8
14
1
2
10
A
h
Q
B
P_5
P_4
P_3
P_2
P_1
A
17
15
13
11
9
7
5
3
19
16
12
8
2
6
4
1
B
P_1
P_2
I
II
O
P_3
A
III
P_4
P_5

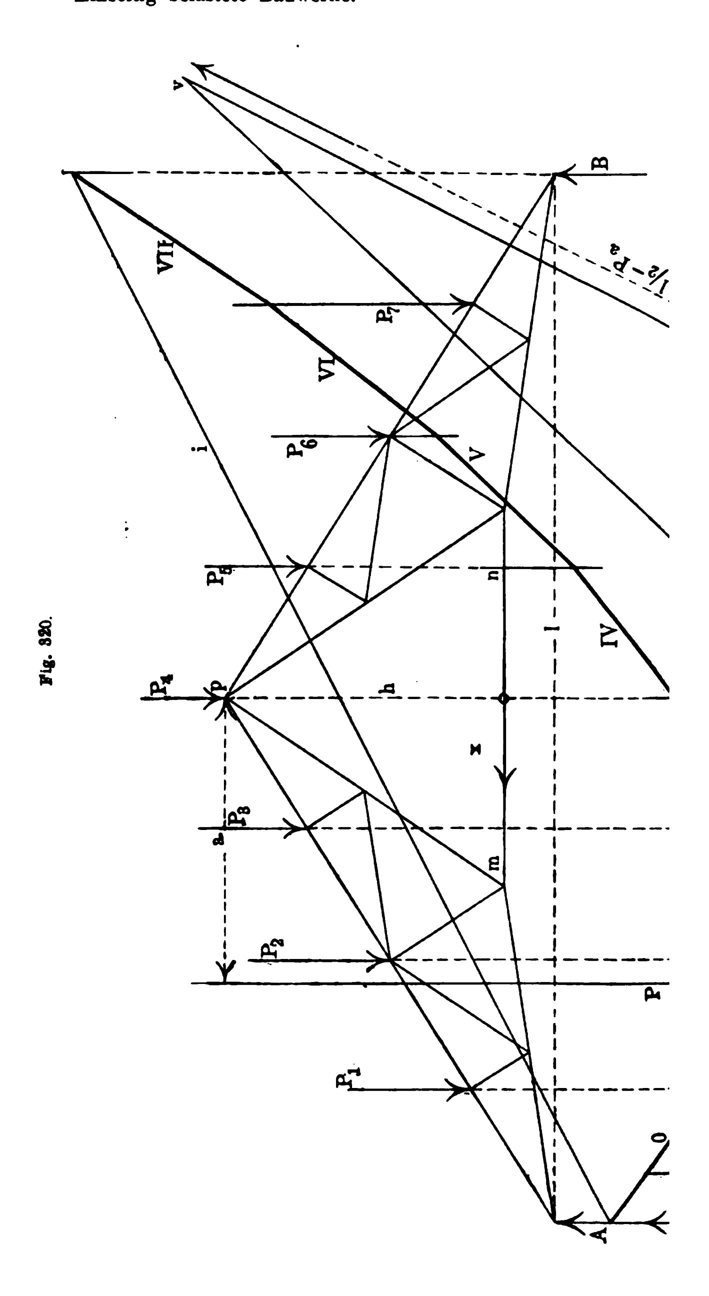
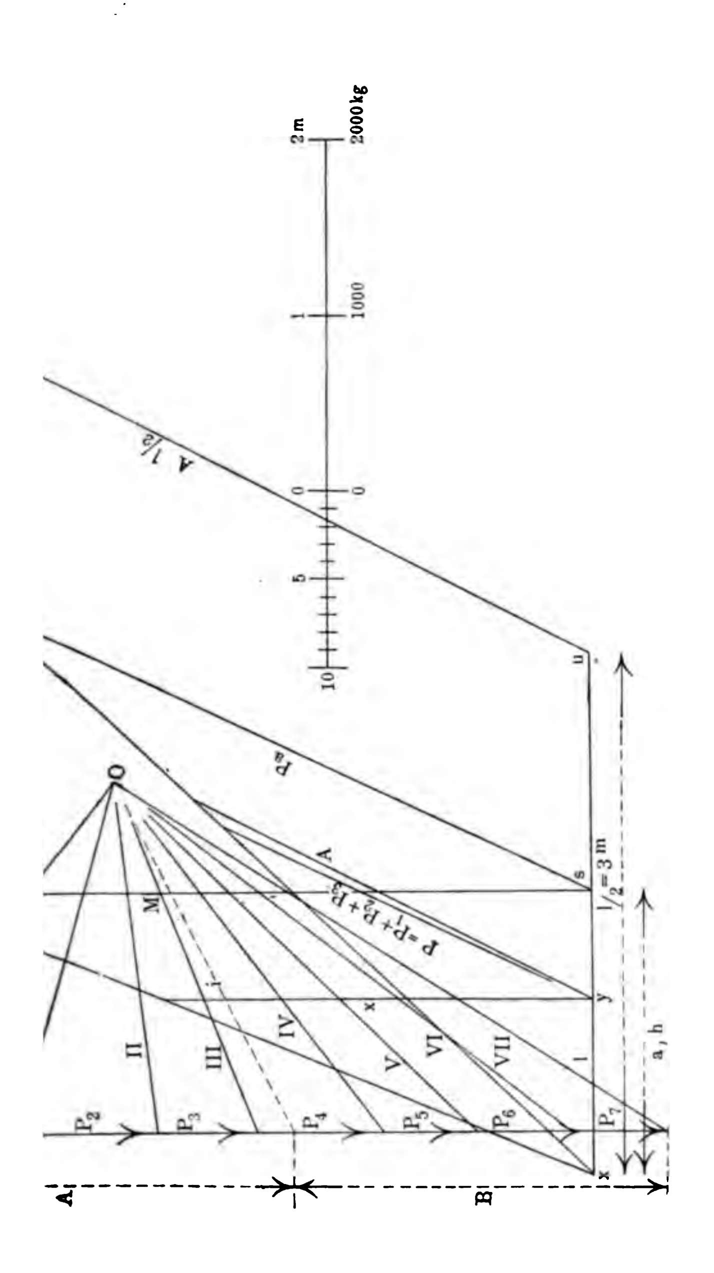


Fig. 320.


2 m
2000 kg
1000
0
5
10
u
s
y
x
O
M
A
II
III
IV
V
VI
VII
P_2
P_3
P_4
P_5
P_6
P_7
A
B
a, h
$l/2 = 3$ m

Man bildet nun mathematisch-graphisch durch die Einheit $xy = 1$ die Produkte $Pa = st$ und $A\,l/_2 = uv$; die Differenz der Momente $M = A\,l/_2 - Pa = vw$ in s aufgetragen, weil in unserer Zeichnung zufällig a und $h = xs$ gleich gross sind, findet man durch die Senkrechte X, am Endpunkt der Einheit in y. Die Längen und Kräfte können aus dem angeschlossenen Massstab entnommen werden.

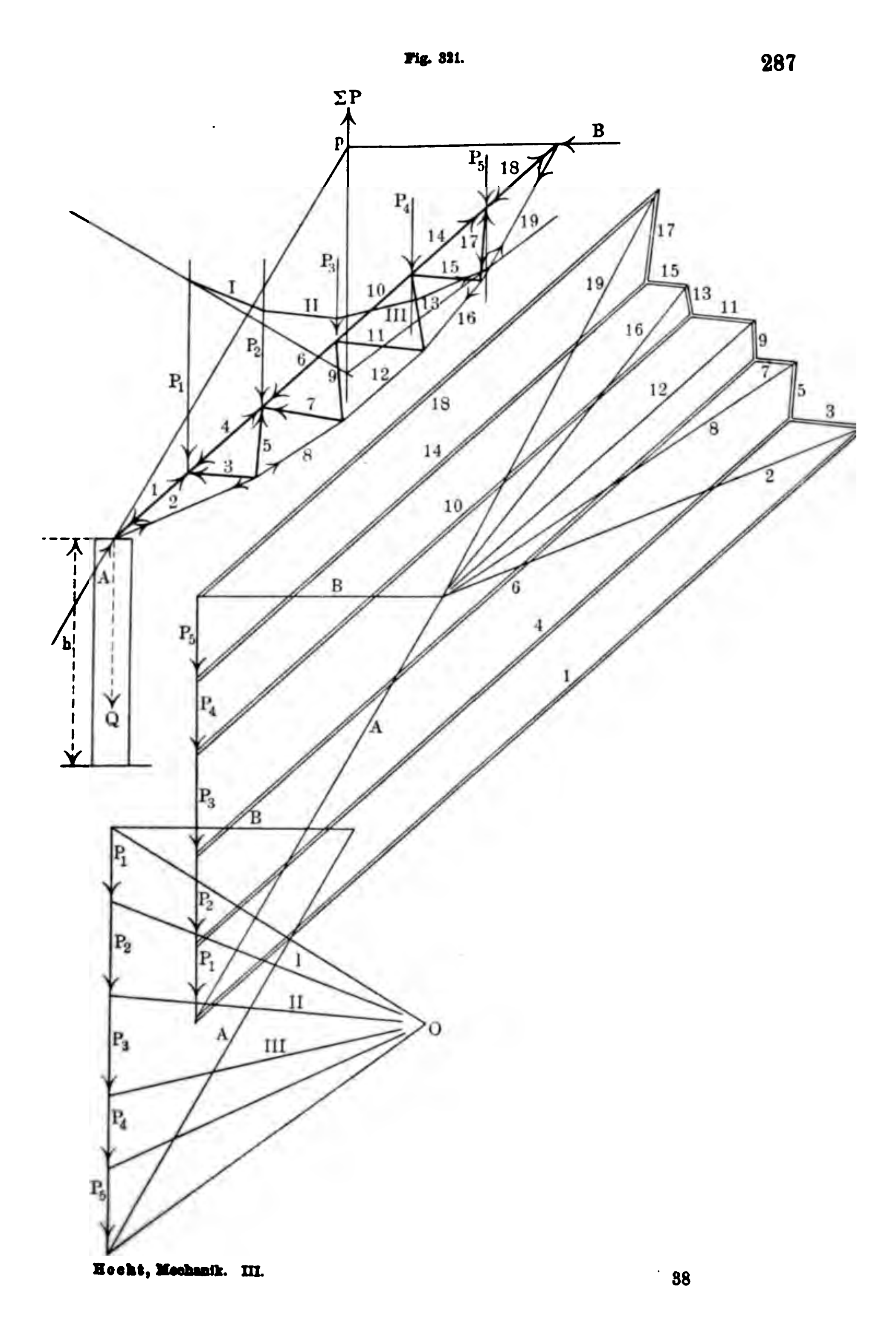
VIII. Gegeben ist in Fig. 321 ein unter einem Winkel geneigter Fischbauchträger, welcher durch die Kräfte $P_1\,P_2 \ldots P_5$ belastet ist; es sollen die Netzwerkspannungen 1, 2, 3 ... 19, sowie die Auflager A und B bestimmt werden, B wirkt horizontal. Man konstruiert zunächst durch Annahme des Polpunktes 0 in der Nebenfigur ein Seilpolygon, dadurch wird die Lage der Mittelkraft ΣP durch den Schwerpunkt der Kräfte $P_1\,P_2 \ldots P_5$ bestimmt. Die Kraft B schneidet die Richtung ΣP in p, sonach ist die Richtung des Auflagerdruckes A auch festgestellt, indem man p mit A verbindet. Die Grössen der Stützen A und B ergeben sich aus der Nebenfigur. Um von A aus mit der Vorzeichnung des Kräfteplanes beginnen zu können, trägt man die Kräfte $P_5\,P_4 \ldots P_1$ in umgekehrter Reihenfolge, ebenso A und B auf und reiht an das Kräftedreieck A, 1, 2 die anderen Kräftepolygone der Knotenpunkte an.

Zerlegt man die unter einem Winkel wirkende Druckkraft A in eine Vertikale und Horizontale Q und S, so bewirkt Q Knickungs- bezw. Druckspannungen, S hingegen durch das Moment Sh Biegungsspannungen, und es lassen sich mit Rücksicht auf das Material die Formeln Seite 231 zur Berechnung der Unterstützung in Anwendung bringen; wenn man es nicht vorzieht, die Fusskräfte der Unterstützung unmittelbar aus dem Moment festzustellen.

IX. Der nachstehende, besonders hohe Dachstuhl, Fig. 322, ist an den inneren Knotenpunkten mit den Kräften $P_1 = P_2 = P_3 = \ldots = 1000$ kg belastet.

Die Auflagerreaktionen sind $A = B = 3500$ kg. Um die Spannungen in den Streben zu ermitteln, ist der darunter stehende Kräfteplan ausgeführt. Der Verfolg der einzelnen Knotenpunkte ergiebt, dass man genötigt ist, die Spannung in der mittleren horizontalen Zugstange 14 zu berechnen. Es lässt sich dies wieder mathematisch-graphisch oder auch durch Rechnung durchführen, in beiden Fällen wird s als Drehpunkt angenommen.

Fig. 321.



ΣP
p
B
P_5
18
P_4
19
14
17
17
15
P_3
I
II
10
15
13
11
19
III
13
16
16
11
P_2
6
9
12
12
9
P_1
7
18
7
5
3
4
5
8
14
8
3
1
2
2
10
A
B
6
b
P_5
4
P_4
I
A
Q
P_3
B
P_1
P_2
P_2
P_1
1
II
O
A
III
P_3
P_4
P_5

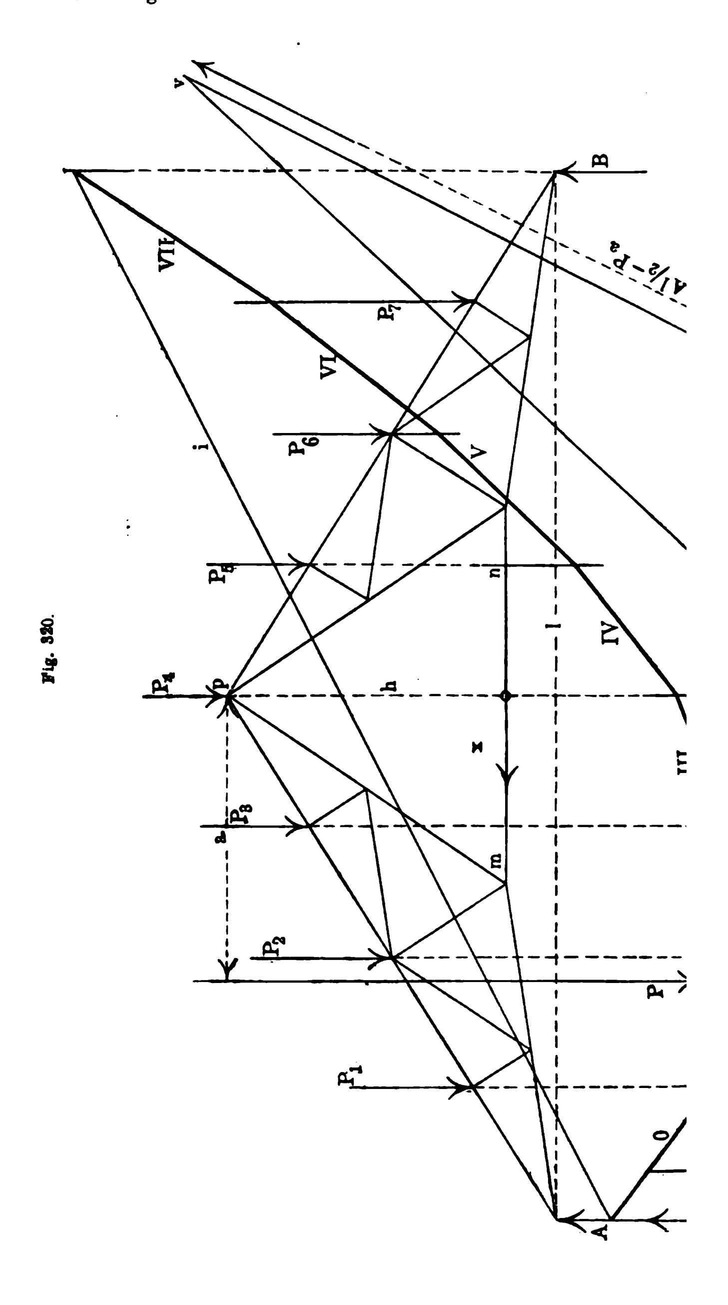
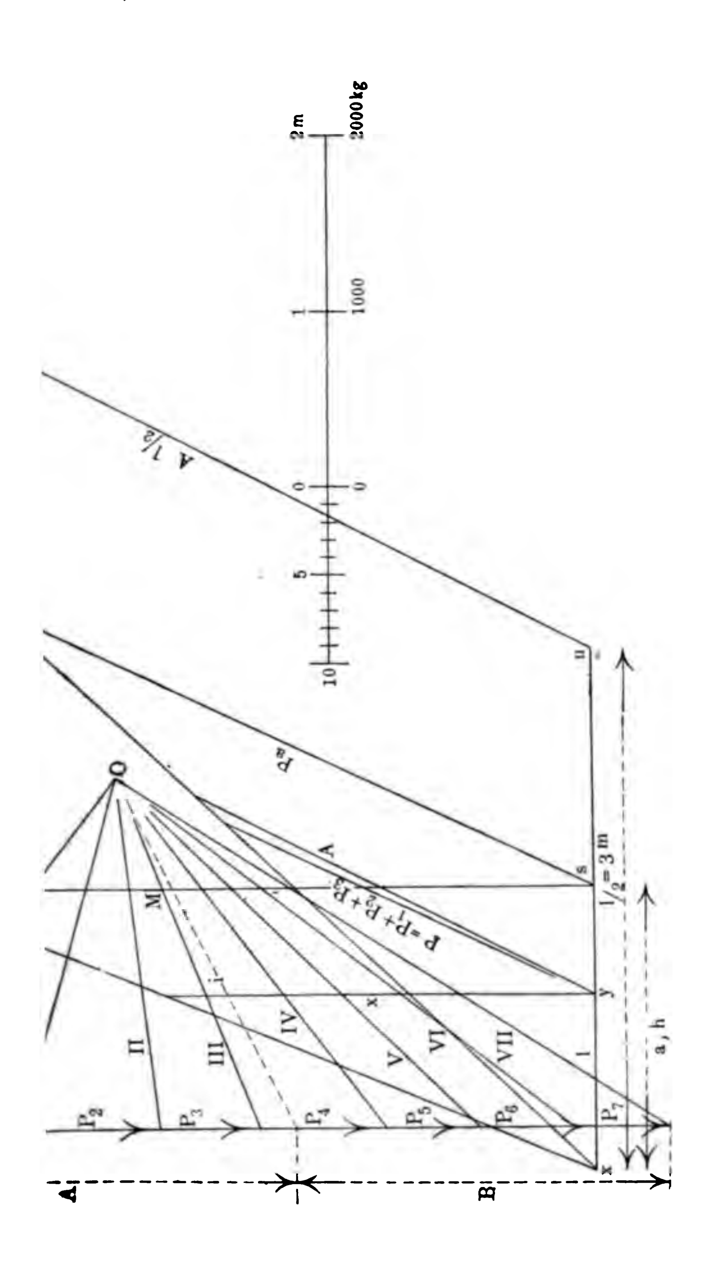


Fig. 320.


2 m
2000 kg
1
1000
0
0
5
10
A
O
M
II
III
IV
V
VI
VII
x
y
s
u
$l/2 = 3$ m
a, h
P_2
P_3
P_4
P_5
P_6
P_7
B

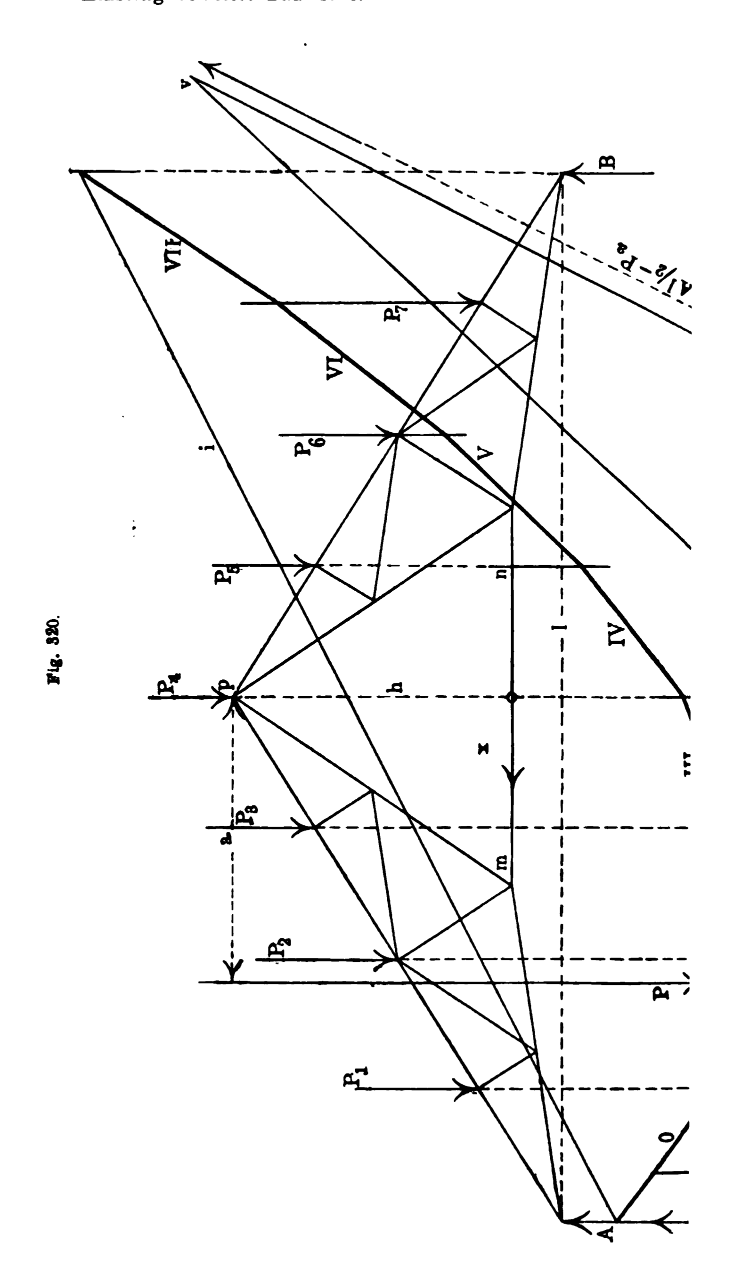
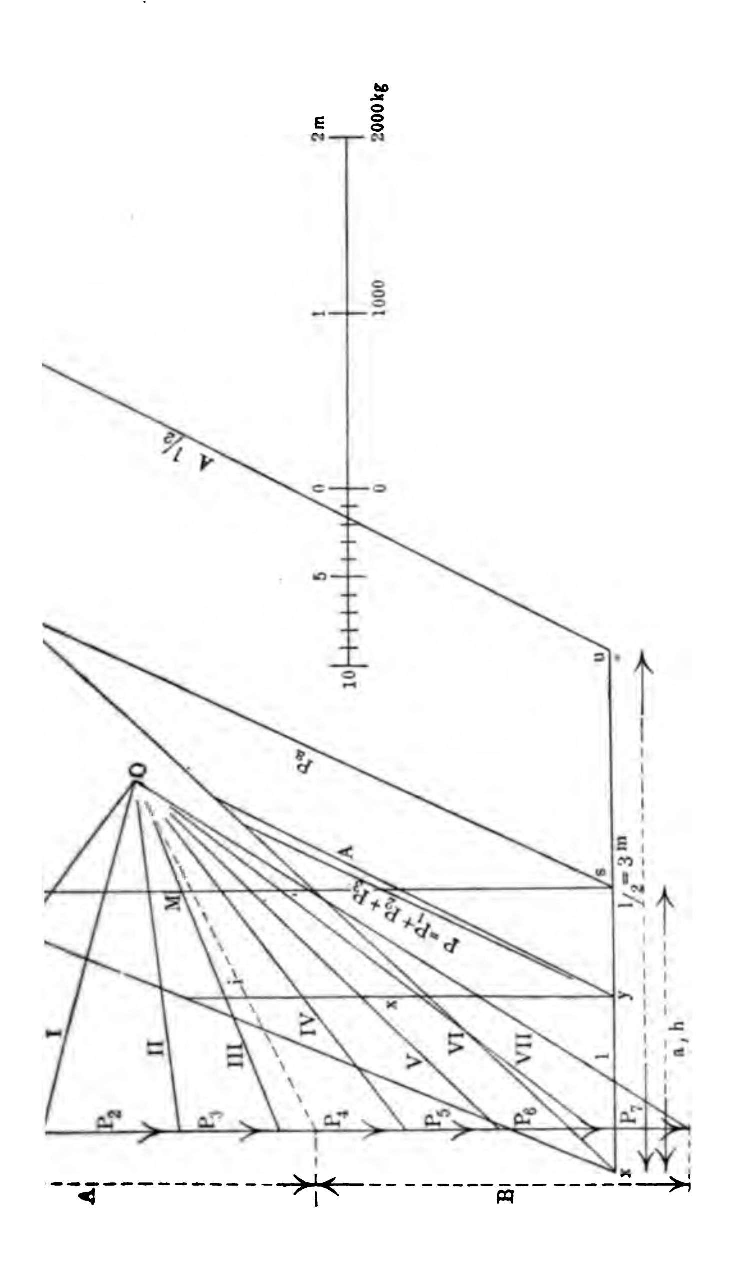


Fig. 320.



Man bildet nun mathematisch-graphisch durch die Einheit $xy = 1$ die Produkte $Pa = st$ und $A\,l/_2 = uv$; die Differenz der Momente $M = A\,l/_2 - Pa = vw$ in s aufgetragen, weil in unserer Zeichnung zufällig a und $h = xs$ gleich gross sind, findet man durch die Senkrechte X, am Endpunkt der Einheit in y. Die Längen und Kräfte können aus dem angeschlossenen Massstab entnommen werden.

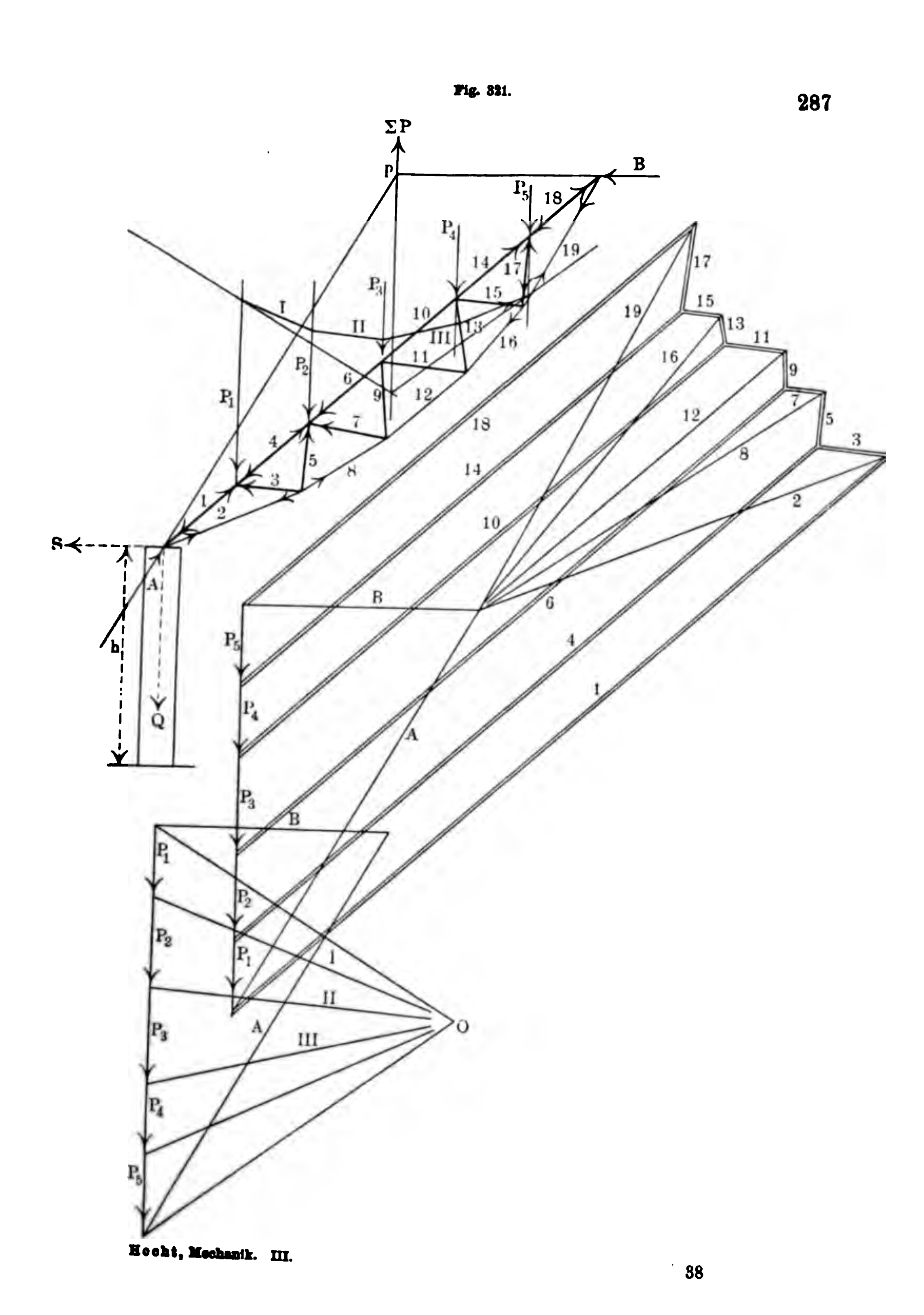
VIII. Gegeben ist in Fig. 321 ein unter einem Winkel geneigter Fischbauchträger, welcher durch die Kräfte $P_1\, P_2 \ldots P_5$ belastet ist; es sollen die Netzwerkspannungen 1, 2, 3 ... 19, sowie die Auflager A und B bestimmt werden, B wirkt horizontal. Man konstruiert zunächst durch Annahme des Polpunktes 0 in der Nebenfigur ein Seilpolygon, dadurch wird die Lage der Mittelkraft ΣP durch den Schwerpunkt der Kräfte $P_1\, P_2 \ldots P_5$ bestimmt. Die Kraft B schneidet die Richtung ΣP in p, sonach ist die Richtung des Auflagerdruckes A auch festgestellt, indem man p mit A verbindet. Die Grössen der Stützen A und B ergeben sich aus der Nebenfigur. Um von A aus mit der Vorzeichnung des Kräfteplanes beginnen zu können, trägt man die Kräfte $P_5\, P_4 \ldots P_1$ in umgekehrter Reihenfolge, ebenso A und B auf und reiht an das Kräftedreieck A, 1, 2 die anderen Kräftepolygone der Knotenpunkte an.

Zerlegt man die unter einem Winkel wirkende Druckkraft A in eine Vertikale und Horizontale Q und S, so bewirkt Q Knickungs- bezw. Druckspannungen, S hingegen durch das Moment Sh Biegungsspannungen, und es lassen sich mit Rücksicht auf das Material die Formeln Seite 231 zur Berechnung der Unterstützung in Anwendung bringen; wenn man es nicht vorzieht, die Fusskräfte der Unterstützung unmittelbar aus dem Moment festzustellen.

IX. Der nachstehende, besonders hohe Dachstuhl, Fig. 322, ist an den inneren Knotenpunkten mit den Kräften $P_1 = P_2 = P_3 = \ldots = 1000$ kg belastet.

Die Auflagerreaktionen sind $A = B = 3500$ kg. Um die Spannungen in den Streben zu ermitteln, ist der darunter stehende Kräfteplan ausgeführt. Der Verfolg der einzelnen Knotenpunkte ergiebt, dass man genötigt ist, die Spannung in der mittleren horizontalen Zugstange 14 zu berechnen. Es lässt sich dies wieder mathematisch-graphisch oder auch durch Rechnung durchführen, in beiden Fällen wird s als Drehpunkt angenommen.

Fig. 321.


ΣP
p
B
P_5
P_4
P_3
P_2
P_1
I
II
III
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
S
A
h
Q
A
B
O

Man bildet nun mathematisch-graphisch durch die Einheit $xy = 1$ die Produkte $Pa = st$ und $A\,l/_2 = uv$; die Differenz der Momente $M = A\,l/_2 - Pa = vw$ in s aufgetragen, weil in unserer Zeichnung zufällig a und $h = xs$ gleich gross sind, findet man durch die Senkrechte X, am Endpunkt der Einheit in y. Die Längen und Kräfte können aus dem angeschlossenen Massstab entnommen werden.

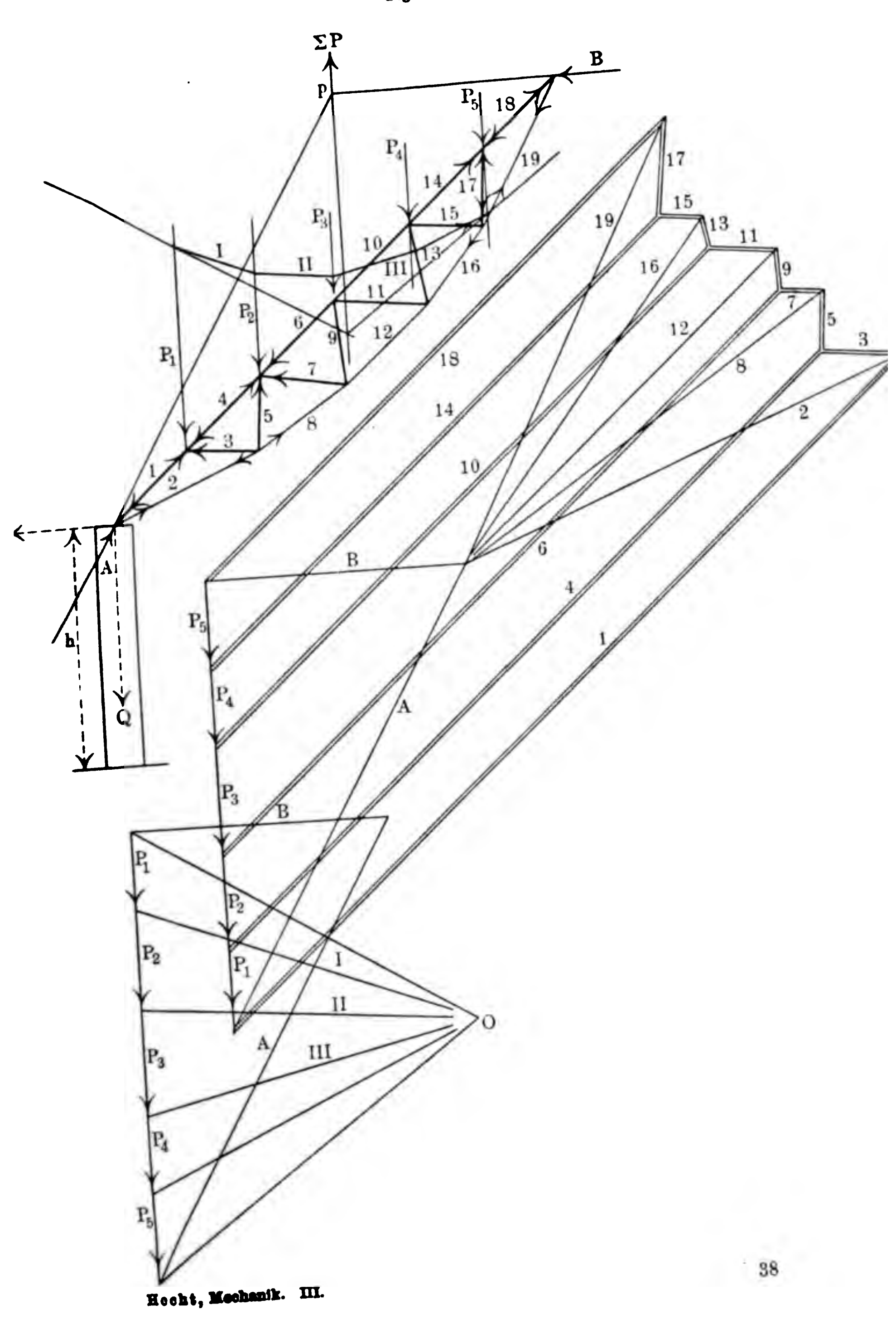
VIII. Gegeben ist in Fig. 321 ein unter einem Winkel geneigter Fischbauchträger, welcher durch die Kräfte $P_1\,P_2 \ldots P_5$ belastet ist; es sollen die Netzwerkspannungen 1, 2, 3 ... 19, sowie die Auflager A und B bestimmt werden, B wirkt horizontal. Man konstruiert zunächst durch Annahme des Polpunktes 0 in der Nebenfigur ein Seilpolygon, dadurch wird die Lage der Mittelkraft ΣP durch den Schwerpunkt der Kräfte $P_1\,P_2 \ldots P_5$ bestimmt. Die Kraft B schneidet die Richtung ΣP in p, sonach ist die Richtung des Auflagerdruckes A auch festgestellt, indem man p mit A verbindet. Die Grössen der Stützen A und B ergeben sich aus der Nebenfigur. Um von A aus mit der Vorzeichnung des Kräfteplanes beginnen zu können, trägt man die Kräfte $P_5\,P_4 \ldots P_1$ in umgekehrter Reihenfolge, ebenso A und B auf und reiht an das Kräftedreieck A, 1, 2 die anderen Kräftepolygone der Knotenpunkte an.

Zerlegt man die unter einem Winkel wirkende Druckkraft A in eine Vertikale und Horizontale Q und S, so bewirkt Q Knickungs- bezw. Druckspannungen, S hingegen durch das Moment Sh Biegungsspannungen, und es lassen sich mit Rücksicht auf das Material die Formeln Seite 231 zur Berechnung der Unterstützung in Anwendung bringen; wenn man es nicht vorzieht, die Fusskräfte der Unterstützung unmittelbar aus dem Moment festzustellen.

IX. Der nachstehende, besonders hohe Dachstuhl, Fig. 322, ist an den inneren Knotenpunkten mit den Kräften $P_1 = P_2 = P_3 = \ldots = 1000$ kg belastet.

Die Auflagerreaktionen sind $A = B = 3500$ kg. Um die Spannungen in den Streben zu ermitteln, ist der darunter stehende Kräfteplan ausgeführt. Der Verfolg der einzelnen Knotenpunkte ergiebt, dass man genötigt ist, die Spannung in der mittleren horizontalen Zugstange 14 zu berechnen. Es lässt sich dies wieder mathematisch-graphisch oder auch durch Rechnung durchführen, in beiden Fällen wird s als Drehpunkt angenommen.

Fig. 321.


ΣP
p
B
P5
18
P4
19
14
17
P3
15
17
10
15
13
11
I
II
III
13
16
19
16
P2
11
9
12
6
9
12
7
P1
18
8
4
5
3
8
14
2
1
2
10
B
6
A
h
4
P5
1
Q
P4
A
P3
B
P1
P2
P2
P1
I
II
O
A
III
P3
P4
P5

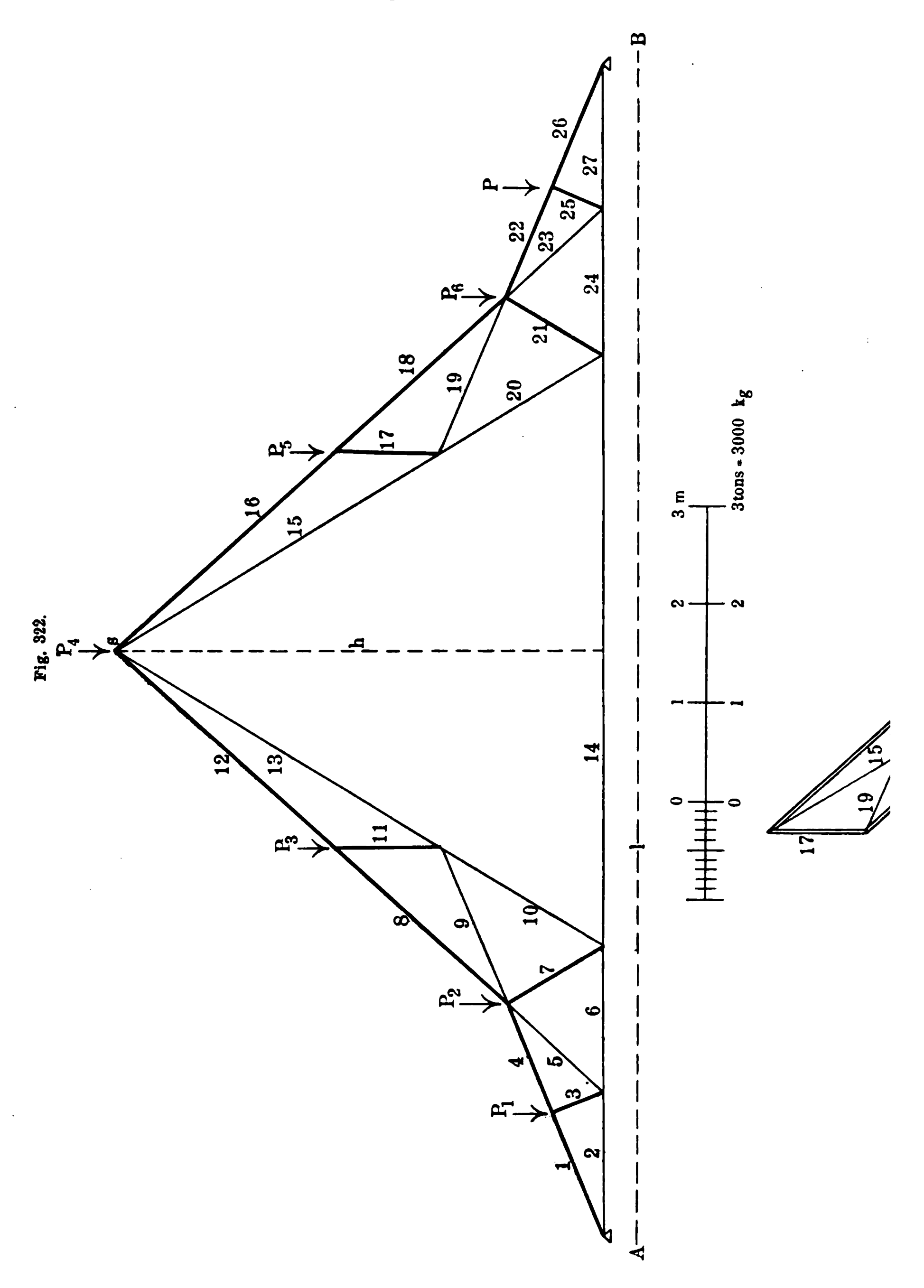
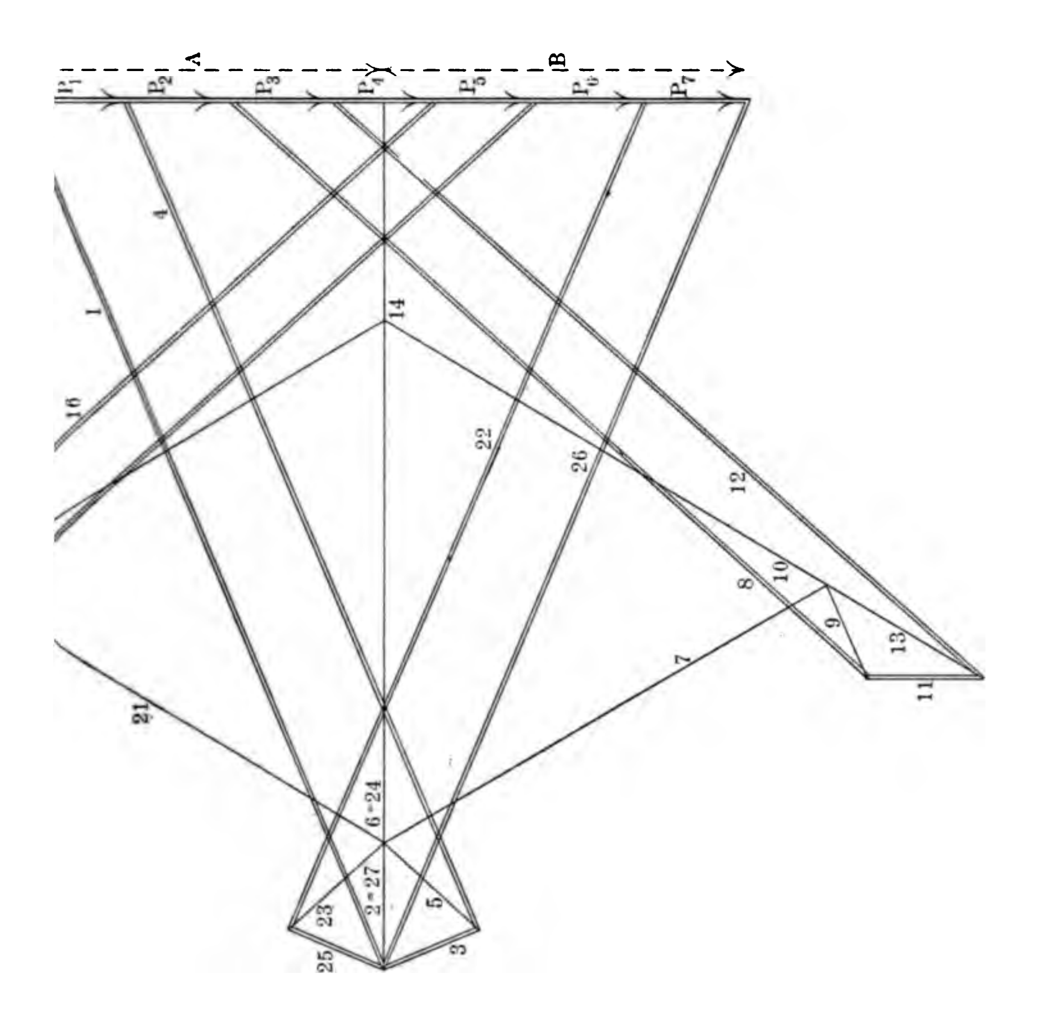


Fig. 322.


A
B
P1
P2
P3
P4
P5
P6
P7
1
4
14
16
22
26
12
10
8
9
13
11
7
21
6=24
2=27
23
25
5
3

Die bezügliche Momentengleichung ist

$$P_{14} \cdot h = A\,l/_2 - P_1 \cdot 95 - P_2 \cdot 78 - P_3 \cdot 40;$$

man erhält für $A = 3500$, $l = 12$, $h = 10$ $P_{14} = 2130$ kg.

Kräftepläne einiger hölzerner Dachkonstruktionen.

Die Fig. 323 bis 326 stellen einige Holzdachkonstruktionen dar*). Das Hängewerk, Fig. 323, ist den Konstruktionen Fig. 189 und 191 nachgebildet, die Zugstrebe 2, 8 liegt hier horizontal.

Der Binder, Fig. 324, ist mit $P_1 = P_2 \ldots = P_5$ an 5 Knotenpunkten belastet. Die Auflagerreaktionen sind $A = B = \frac{5}{2}$ P. Man beginnt bei A, schliesst an das Kräftedreieck A 1 2 das Kräfteviereck des Knotenpunktes P_1 an, P_1, 1, 3, 4. Es ist nun richtiger, den Knotenpunkt der Kraft P_2 festzustellen, um die Zugkraft in 5 zu erhalten, es ergiebt sich durch das Polygon, dass die Kräfte in 6 und 13 verschwinden; P_3 wirkt durch 9 auf den Knotenpunkt 7, 8, 11, 12. Nach Festlegung des Kräftefünfeckes 2, 3, 5, 8, 10 ist dann das eben bemerkte Kräfteviereck 7, 8, 11, 12 auch bestimmt.

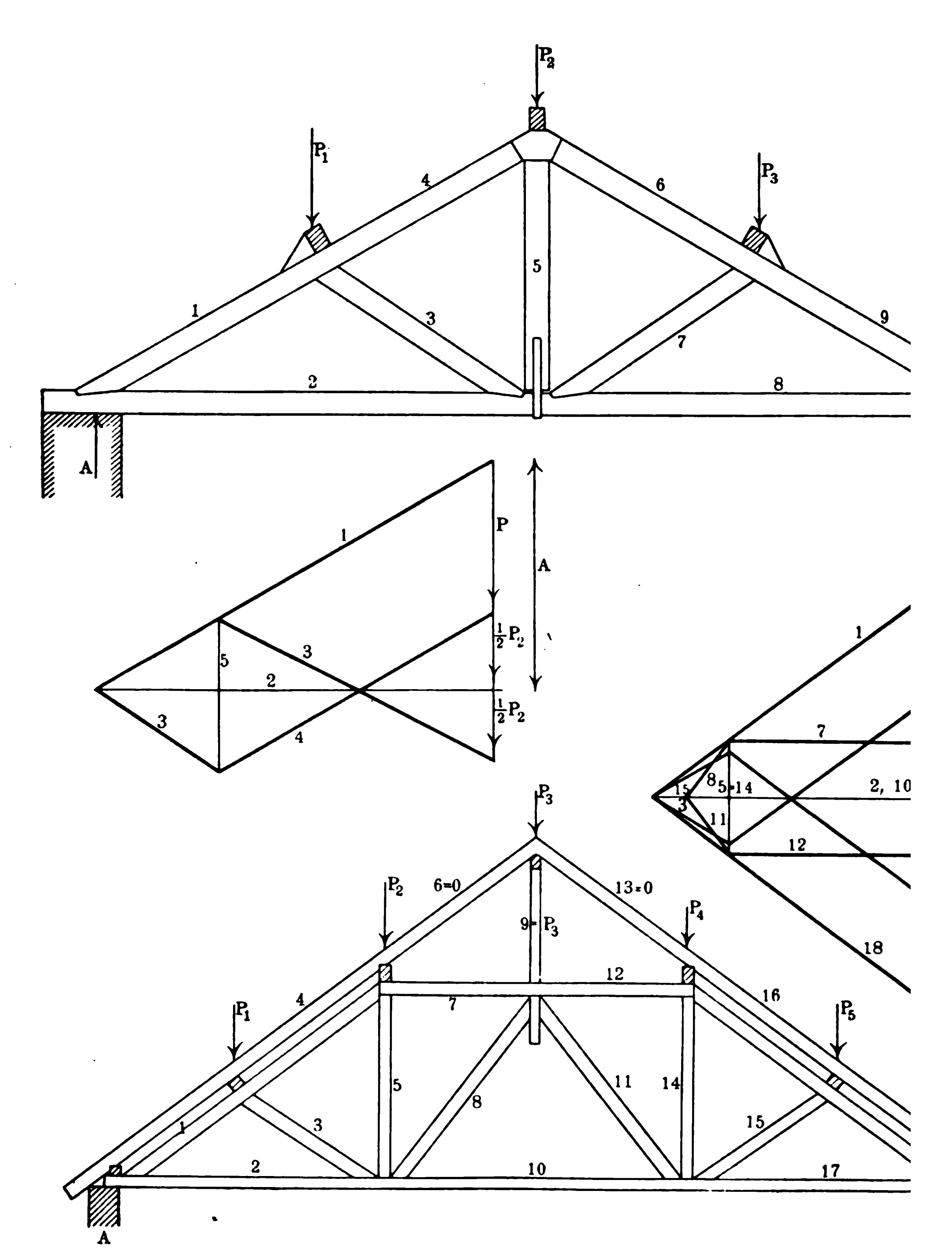
Fig. 325 ist ein Pfettendachstuhl mit Kniestock. Das erste Gebinde liegt gewöhnlich in 4 bis 5 m Entfernung; dazwischen liegen meist 4 bis 5 Nebengebinde. Diese sind mit je $P_1\,P_2\,P_3$ belastet, nach diesen lässt sich die Belastung in P_4 und P_5 berechnen. Man bestimmt zunächst die Spannungen in 1, 2, 3, und schliesst hieran das Kräfteviereck 1 P_2 K 2, in welchem $K = P_2$ wird. Die Sparren liegen zwischen den Hauptgebinden auf der Pfette p und diese erfährt eine Ausbiegung durch die Kräfte $K = P_2$. Die Kräfte P_1 und 1 bilden die Resultante Q, die sich auch wieder in eine horizontale und vertikale Kraft, welche die Wand aufnehmen muss, zerlegen lässt.

Die im Hauptgebinde wirkenden Pfettenkräfte lassen sich, wie oben bemerkt, aus den Knotenbelastungen P_2 der Leer- oder Nebengebinde der linken Seite berechnen. Die Knotenlast P_4 hat einesteils die n Kräfte der Zwischensparren n P_2, andernteils noch die Kraft P_2, welche auf den Hauptsparren selbst wirkt, aufzunehmen, also $(n + 1)\,P_2$; gewöhnlich legt man zwischen die Hauptgebinde $n = 3$ bis 4 Sparren. Die der Kraft Q symmetrisch wirkende Kraft Q_1 auf der rechten Seite ist dann auch $Q_1 = (n + 1)\,Q$. In q vereinigen sich die Kräfte Q, P_5 und 7. P_5 wird

*) Nach Lauenstein, Graph. Statik. A. Bergsträsser, Stuttgart.

von dem senkrechten Kniestockpfosten übernommen, die Zugkraft 7 wirkt als Biegungskraft in der Druckstrebe 5. Wir tragen, wie die Nebenfigur zeigt, Q_1 auf, und es ergeben sich die Kräfte 7 und P_5. In s wirken P_4, 3, 4 und 5, die Druckkraft 6 wird Null. P_4 ist berechnet, 3 ist bekannt, somit sind die Kräfte im Riegel 4 und in der Strebe 5 bestimmt. Die Strebe 5 ist auf Knickung und Biegung zu berechnen, die biegende Kraft ist 7. Im Auflager B bilden die Kräfte 8, 5 und $B = P_4 + \frac{1}{2} P_3$ ein geschlossenes Kräftedreieck; 8 ist auf Zug beansprucht. Kommt die Zugstrebe 8 in Wegfall, dann ist die Kraft 8 + 4 (streng genommen nur ein Teil von 4) von der Seitenmauer aufzunehmen.

Der Dachstuhl, Fig. 326, kann als Kombination eines Hänge- und Sprengwerkes aufgefasst werden. Gegeben sind die Knotenpunktkräfte P_1, P_2 und P_3 u. s. w. Man trägt (s. d. Nebenfigur), die Kraft P_3 auf, und zerlegt sie in 1 und 2; ferner schliesst man hieran das Kräfteviereck P_2, 4, 3 und 1, in welchem P_2 und 1 bekannt sind. Da man die Konstruktion nun gewöhnlich derart ausführt, dass man für 7 eine eiserne (möglichst schwache) Zugstange anwendet, welche nur einen Teil der horizontalen Kraft aufnimmt, während ein anderer durch das eingeschaltete Sprengwerkchen 8, 6 auf die Mauer übertragen wird, so muss auch von 4 ein Teil Kraft abgegeben werden, C kg, welche wiederum als Biegungskraft auf 4, 5 zwischen den Knotenpunkten P_1 und P_2 wirken. Die Kraft C greift im Knotenpunkt a an und bildet mit 5 und 6 ein Kräftedreieck 5, 6, C, während sich der Druck in 4 bis zum Auflager A fortsetzt, und in A das Kräfteviereck P_1, 7, 8, 4 bildet. Bezeichnet man mit Q den durch 6 übertragenen senkrechten Druck auf die Mauer und mit S die als Seitendruck wirkende Spannung 7, so müssen S = 7, Q und 6 ein Kräftedreieck bilden, wie auch aus der Nebenfigur ersichtlich. Die Kräfte Q und C lassen sich nun mit Hilfe des Kräfteplanes, ebenso die Teilkraft 5 dadurch finden, dass man die Kräftepolygone m, n und p, bezw. das Kräftedreieck m und das Kräfteviereck p so verzeichnet, dass in beiden die horizontale Kraft 7 gleich gross wird (im Kräfteviereck P_1, 7, 8, 4 ist der Buchstabe p nachzutragen). Die Stange s ist spannungslos, da das Sparrenwerk 1 und 2 die Druckkraft P_3 bereits aufgenommen hat.

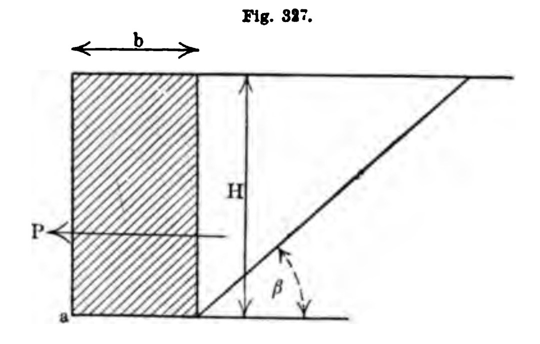

P2
P1
P3
4
6
5
1
3
9
7
2
8
A
1
P
A
3
5
2
3
4
$\frac{1}{2}P_2$
$\frac{1}{2}P_2$
1
7
2, 10
12
18
P3
P2
6=0
13=0
P4
9=P3
12
P1
4
7
16
P5
5
8
11
14
1
3
15
2
10
17
A

Stützmauern (Futtermauern).

Wir haben uns im 1. Band der Mech. S. 179 u. f. mit der Stabilität von Futtermauern beschäftigt und fanden dort als Druck des Erdmaterials gegen die senkrechte Wand einer Stützmauer mit rechteckigem Querschnitt, welche bestrebt ist, eine Kantung um a, Fig. 327, vorzunehmen,

$$P = \frac{H^2}{2} \gamma \operatorname{tg}^2 \left(45 - \frac{\beta}{2}\right),$$

Fig. 327.



wenn γ das Gewicht eines cbm Material und β der sog. Böschungswinkel ist; ferner fanden wir, dass tang $\beta = \varphi$, wenn φ der Reibungskoefficient für gleitende Reibung ist, nach welchem sich die Erdteilchen beim Abböschen aufeinander bewegen würden.

Die folgende Übersicht giebt (wiederholend aus Band I) einige praktische Anhaltepunkte.

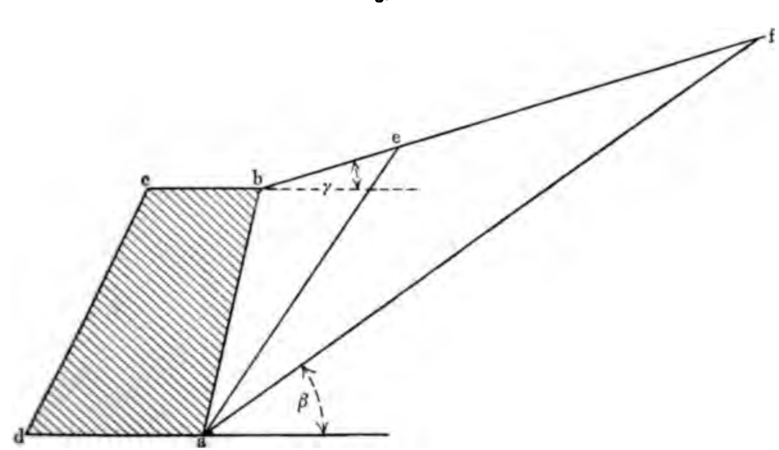
Material	β	φ	γ
Trockener Lehmboden . . .	40 ÷ 46°	0,84 ÷ 1,04	1500 kg
Nasser „ . . .	20 ÷ 25°	0,36 ÷ 0,47	1900 „
Trockene Thonerde	40 ÷ 50°	0,84 ÷ 1,19	1600 „
Nasse „	20 ÷ 25°	0,36 ÷ 0,47	1980 „
Trockene Dammerde . . .	40 ÷ 43°	0,84 ÷ 0,93	1400 „
Nasse „ . . .	30 ÷ 37°	0,58 ÷ 0,75	1650 „
Feuchter Kies und Sand . .	25 ÷ 30°	0,47 ÷ 0,58	1860 „
Nasser Steinschotter	35 ÷ 40°	0,70 ÷ 0,84	1600 „
Feiner Sand	30°	0,58	1500 „
Hülsenfrüchte	20°	0,36	750 „
Wasser	0°	0,00	1000 „

Wir nahmen auch im I. Bande Gelegenheit, auf konstruktivem Wege einige Anhaltepunkte zu geben, um die Stabilität zu sichern. In dem

Folgenden wollen wir uns nun die Aufgabe stellen, auf graphischem Wege sowohl den Erddruck als auch die Stabilität oder Standsicherheit festzustellen.

Es sei abcd, Fig. 328, eine beliebige Futtermauer im Querschnitt, wir denken sie uns B = 1 m lang, bezw. breit, senkrecht zur Schnittfläche gemessen. Das natürliche Terrain schliesst sich im Winkel γ an die innere Oberkante der Mauer an. Würde man die Mauer hinwegrücken, so würde sich die jetzt freiliegende Erdmasse bis zum Winkel

Fig. 328.



β abböschen. Da aber die Mauer mit ihrer Rückenwand durch ihre Reibung am Erdprisma als auch bei af dem Abböschen Widerstand leistet, so bleibt ein Teil des Prismas, wie uns auch schon aus dem I. Bande bekannt ist, stehen, die eigentliche Böschungs- oder Gleitebene ae wird steiler. Das Gewicht der Mauer soll nun dem abrutschenden Teil Widerstand leisten. —

Zur Bestimmung dieses Erddruckes verwenden wir am besten das von Rebhann angegebene graphische Verfahren*).

Es sei wieder abcd, Fig. 329, der berechnete Querschnitt der Stütz- oder Futtermauer, β der bekannte, aus obiger Tabelle zu entnehmende Böschungswinkel des Materiales. Man trägt die Linie bg unter dem Winkel 2β in b an, beschreibt über af einen Halbkreis und zieht die Senkrechte gk, ferner überträgt man ak nach ai und zieht ie parallel

*) Theorie d. Erddruckes u. d. Futtermauern, Wien 1871, J. Schlotke, Graph. Statik, Hamburg; Lauenstein, Graph. St., Stuttgart.

bg, so nennt man zunächst ae die Gleitlinie. Überträgt man dann noch ie nach ih, so stellt das Dreieck, △ eih den Querschnitt des

Fig. 329.

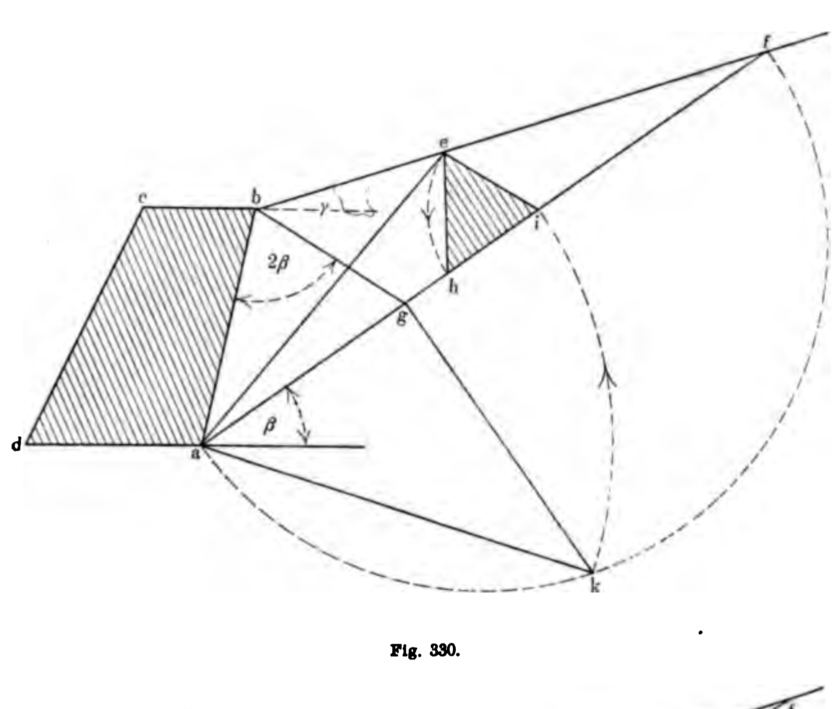
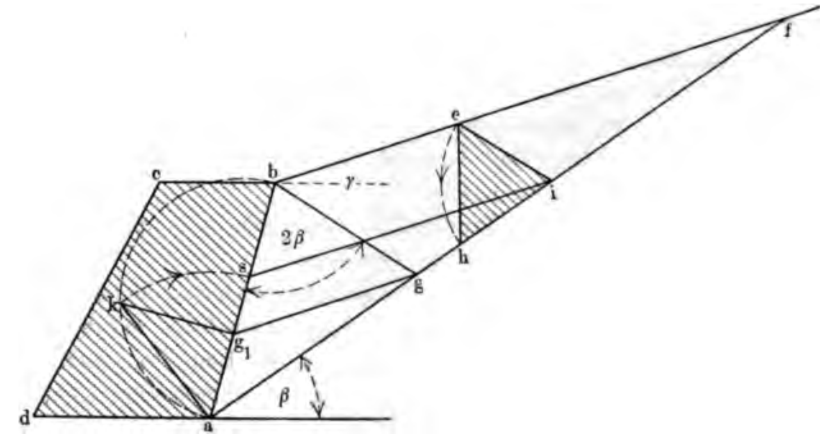


Fig. 330.

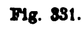


Erddruckprismas dar; bei einer 1 m breiten Stützmauer ist dann das Volumen des Erddruckes, wenn F = eih in qm ausgedrückt wird, V =

$\overline{eih}$ cbm; der Erddruck selbst ist dann

$$E = \gamma V = \gamma \cdot \overline{eih} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 32.$$

Dasselbe Resultat erhält man auch durch das in Fig. 330 angegebene Verfahren. Man beschreibt über ab, der Rückenwandschnittlinie


Fig. 331.

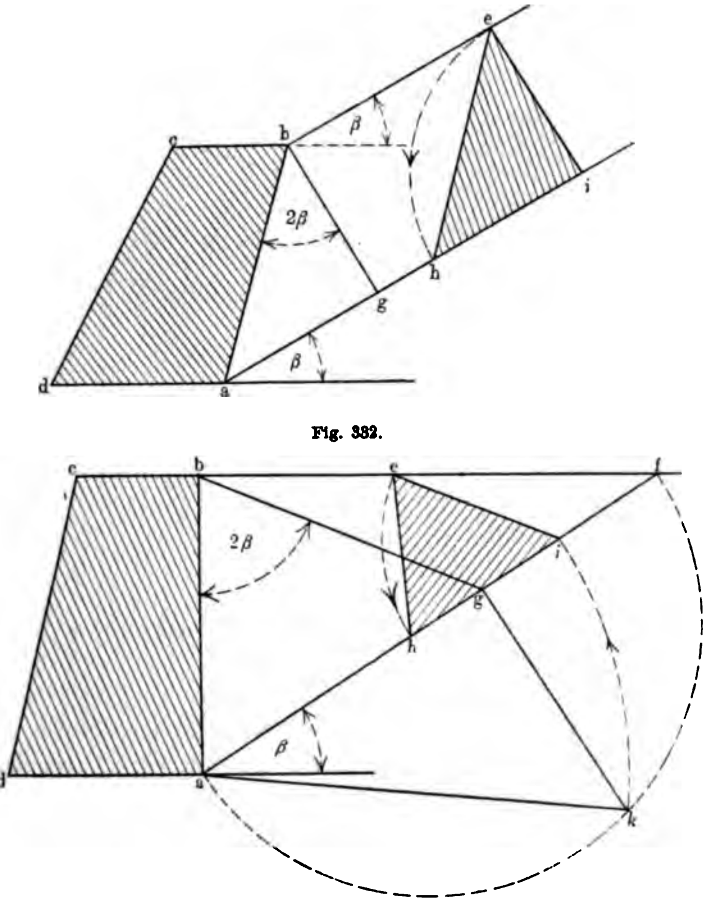


Fig. 332.

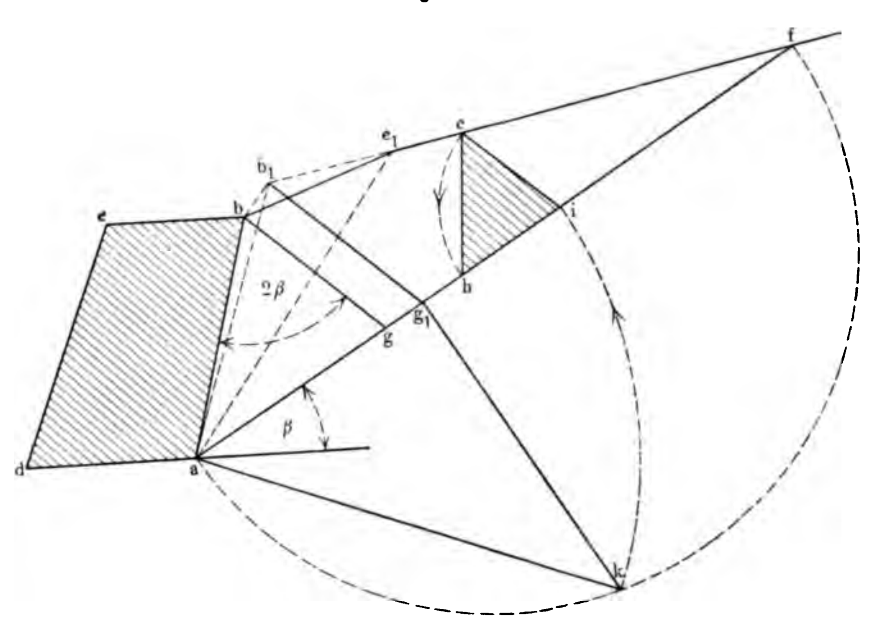
der Futtermauer, einen Halbkreis und trägt wieder 2β in b an, dann zieht man gg_1 parallel bf und errichtet die Senkrechte g_1k. Überträgt man dann ak nach as und zieht si parallel bf, so gewinnt man wieder den Punkt i; ie ‖ bg und nach ih übertragen, ergiebt wieder das Druckdreieck eih.

Wenn das natürliche Terrain zufällig dieselbe Neigung an der

Mauerkrone wie die Böschung besitzt, wenn also $\gamma = \beta$, Fig. 331, so hat man nur nötig, ei parallel bg zu ziehen und ie nach hi zu übertragen, um das charakteristische Dreieck zu erhalten.

Das konstruktive Verfahren bei senkrecht stehender Rückwand der Futtermauer und bei horizontaler Abgrenzung der natürlichen Bodenoberfläche, wie Fig. 332 andeutet, ist dasselbe.


Fig. 333.



Ist die natürliche Erdoberfläche gebrochen, geknickt, wie in Fig. 333 der Durchschnitt be_1f angiebt, so überträgt man wieder den doppelten Böschungswinkel nach b und zieht ae_1. Man verwandelt nun das Dreieck abe_1 in das gleich grosse ab_1e_1, indem man bb_1 parallel ae_1 zieht und e_1f bis b_1 verlängert. Man zieht dann ferner die Parallele b_1g_1 zu bg durch b_1 und verwendet die mittlere Proportionale g_1k, überträgt ak nach ai und zieht endlich wieder ie parallel b_1g_1; eih ist dann wieder der Querschnitt des Druckprismas. eih in qm aus der Zeichnung abgegriffen, liefert dann gleichzeitig das Volumen des Erdprismas; der Erddruck E ergiebt sich aus Gl. 32.

Um die Grösse und Richtung des Erddruckes E zu finden, überträgt man die gleiche Grösse des Erddruckdreiecks hinter die Rückenwand

Fig. 334.

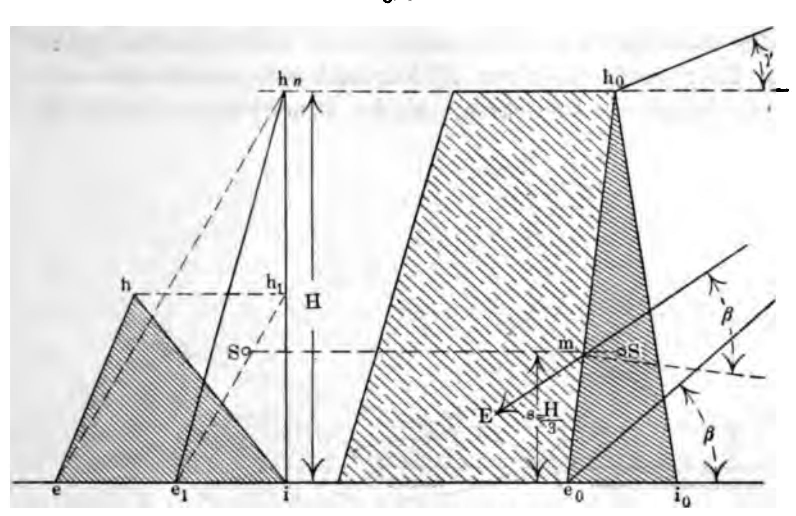
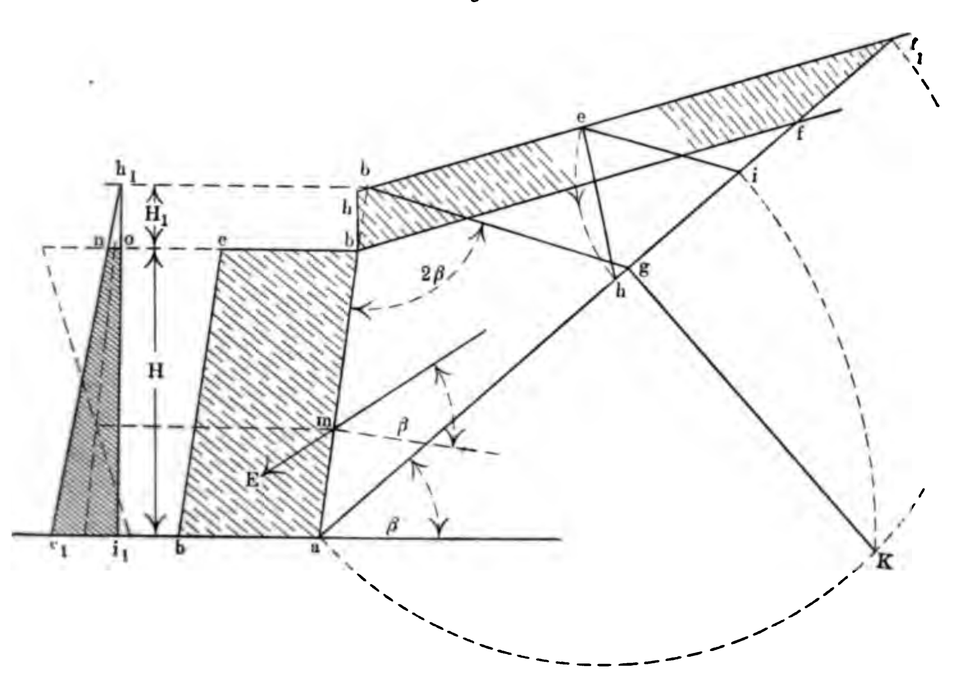
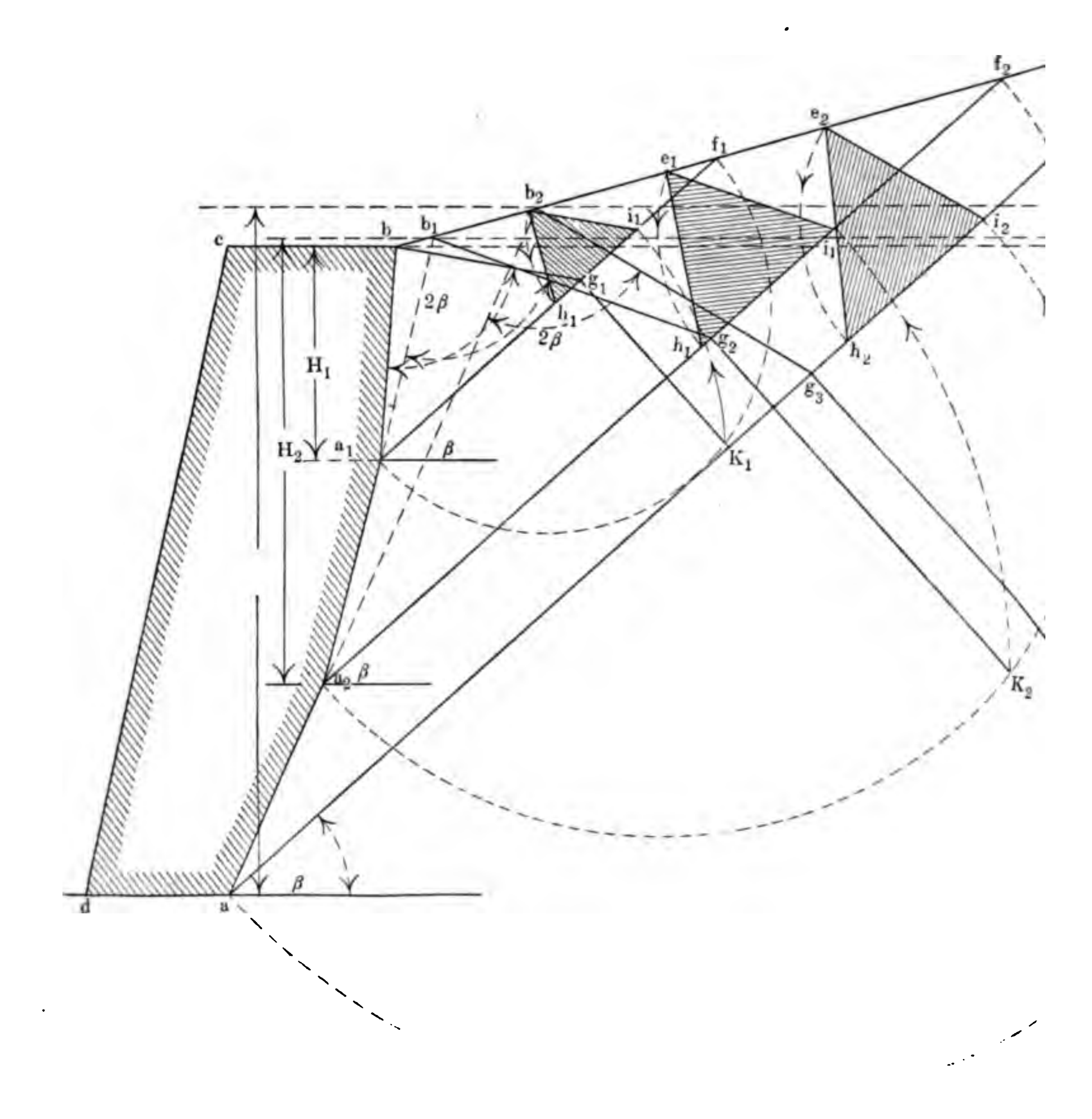


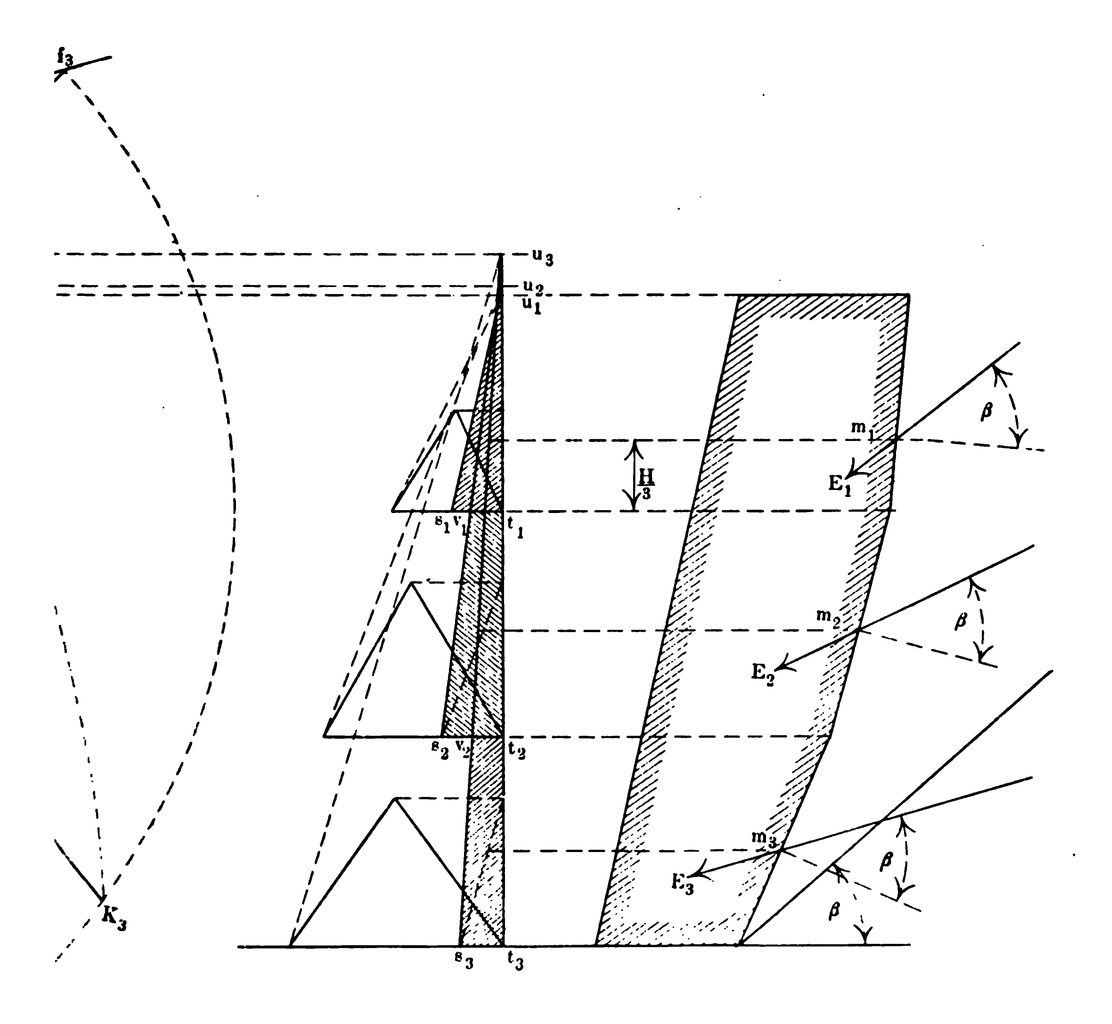
Fig. 335.



der Futtermauer, Fig. 334, $e_0\ i_0\ h_0$; in der gleichen Höhe des Schwerpunktes desselben in $s = H/_3$ greift dann E unter dem Böschungswinkel β, an einer Senkrechten zur Rückenwand $e_0\ h_0$ angetragen, an. Den gleichen Inhalt des Dreiecks $e_0\ i_0\ h_0$ des Druckdreieckes findet man da-



durch, dass man dasselbe zunächst in ein gleich hohes rechtwinkliges △ eih_1 verwandelt, indem man hh_1 parallel ei zieht und e mit h_1 verbindet; letztere Verbindungslinie ist in der Figur hinweggefallen. Da nun das Druckdreieck die gleiche Höhe H der Stützmauer erhalten soll,



so muss man ferner das $\triangle\, e i h_1$ in das $\triangle\, e_1 i h_{,,}$ verwandeln, welches dann nach $e_0 i_0 h_0$ übertragen werden kann. Diese letzte Verwandlung geschieht dadurch, dass man zu $e h_{,,}$ eine Parallele $e_1 h_1$ durch h_1 zieht, den Schnittpunkt e_1 verbindet man mit $h_{,,,}$ dann ist

$$\triangle\, e i h = \triangle\, e_1 i h_{,,} = e_0 i_0 h_0.$$

In den meisten Fällen genügt es, das $\triangle\, e i h$ in qm aus der Konstruktionszeichnung, Fig. 329, 330 u. f., zu berechnen und den Angriffspunkt m, Fig. 334, in $H/_3$ anzunehmen.

Befindet sich oberhalb des natürlichen Terrains, oberhalb bf, Fig. 335, noch eine besondere Belastung, etwa eine Fahrstrasse mit Fuhrwerk- oder Eisenbahnverkehr, so verwandelt man das bekannte Gewicht der Belastung in ein gleiches Erdgewicht von derselben Einheit γ und mit Rücksicht auf die in Betracht kommende Druckfläche $\overline{bf} \cdot 1$ qm, wenn bf in m. Man erhält dann eine ideale Höhe h, um welche die Erdoberfläche erhöht werden muss, die nun in Rücksicht zu ziehende Rückenfläche $a b_1$ ist durch Verlängerung von ab bis $b_1 f_1$ bestimmt. In der Figur ist im oberen b der Strich an b zu ergänzen. Man trägt wieder 2β an b_1 an, und konstruiert wie oben das Dreieck eih anschliessend an die ideale Erdoberfläche $b_1 f_1$. Das Druckdreieck verwandelt man wieder in das gleich grosse $e_1 i_1 h_1$, aber von der Höhe $H + H_1$, H_1 ergiebt sich durch horizontale Übertragung des Schnittpunktes b_1 nach h_1. Der Querschnitt des in Frage kommenden Druckprismas von der Höhe der Stützmauer ist alsdann das Trapez $n o e_1 i_1$, dessen Schwerpunktshöhe nach m übertragen, ergiebt den Angriffspunkt von E. (S. Bd. I S. 97, Trapezschwerpunkt.) —

Man führt die Futtermauern vielfach mit gebrochener Rückenwand aus, auch mit geneigt stehender Basis, wie wir noch erkennen werden; dadurch wird die Standsicherheit erhöht. Bei der Aufführung des Mauerwerkes muss aber gleichzeitig eine Hinterfüllung des Erdmaterials stattfinden, besonders dann, wenn die Stützmauer ohne Erddruck nicht genügend stabil ist; es dürfte dies bei der in Fig. 336 gezeichneten Futtermauer der Fall sein. Bei einer solchen unterschnittenen Futtermauer sollen die Lagen der Fugen eine solche Neigung erhalten, dass der Reibungswinkel noch nicht erreicht ist, so dass das ganze Mauerwerk freistehend, standsicher, stabil ist.

Man teilt die Mauer nach den Knicken, hier in 3 Schichten, verlängert die Begrenzungen $a_2 a_1$ bis b_1, $a a_2$ bis b_2 und trägt in b, b_1, b_2 den doppelten Böschungswinkel 2β an. Durch die Knickpunkte a_1 und a_2 zieht man dann parallele Linien zu der Böschung $a f_3$ und konstruiert

für jede Schicht besonders das charakteristische Dreieck. Das erste ist dann die Druckfläche für die Rückenwand $a_1 b$; das mittlere bezieht sich auf $a_2 b_1$ und das Dreieck $i_2 e_2 h_2$ stellt den Querschnitt des Druckprismas der Rückenfläche $a b_2$ dar.

In der Hilfsfigur rechts sind diese drei Querschnitte mit Rücksicht auf die 3 Höhen $H_1 H_2 H$ in die Druckdreiecke $s_1 t_1 u_1$, $s_2 t_2 u_2$, $s_3 t_3 u_3$ verwandelt. Der Schwerpunkt des obersten Dreiecks $s_1 t_1 u_1$ kann unmittelbar verwendet werden, die Höhenlage $H/_3$ wird nach m_1 übertragen, Lage und Richtung des Erddruckes $E_1 = \gamma \cdot \triangle \overline{s_1 t_1 u_1}$ sind bestimmt. Um die Druckfläche für $a_2 a_1$ zu erhalten, müssen wir von dem verwandelten Dreieck $s_2 t_2 u_2$ den sich auf den oberen Teil $a_1 b_1$ beziehenden, nämlich $v_1 t_1 u_2$ in Abzug bringen. Zur Berechnung des Erddruckes E_2 dient sonach das Trapez $s_2 t_2 t_1 v_1$, es ist $E_2 = \gamma \cdot \overline{s_2 t_2 t_1 v_1}$; der Schwerpunkt desselben wird nach m_2 übertragen, und E_2 in bekannter Weise eingezeichnet. Für die untere Rückenwand der Futtermauer $a a_2$ kommt in derselben Gedankenfolge das Trapez $s_3 t_3 t_2 v_2$ in Anrechnung, $E_3 = \gamma \cdot \overline{s_3 t_3 t_2 v_2}$, dessen Schwerpunkt nach m_3 übertragen wird. Dem gesamten Erddruck $E_1 + E_2 + E_3$ hat die Stützmauer Widerstand zu leisten.

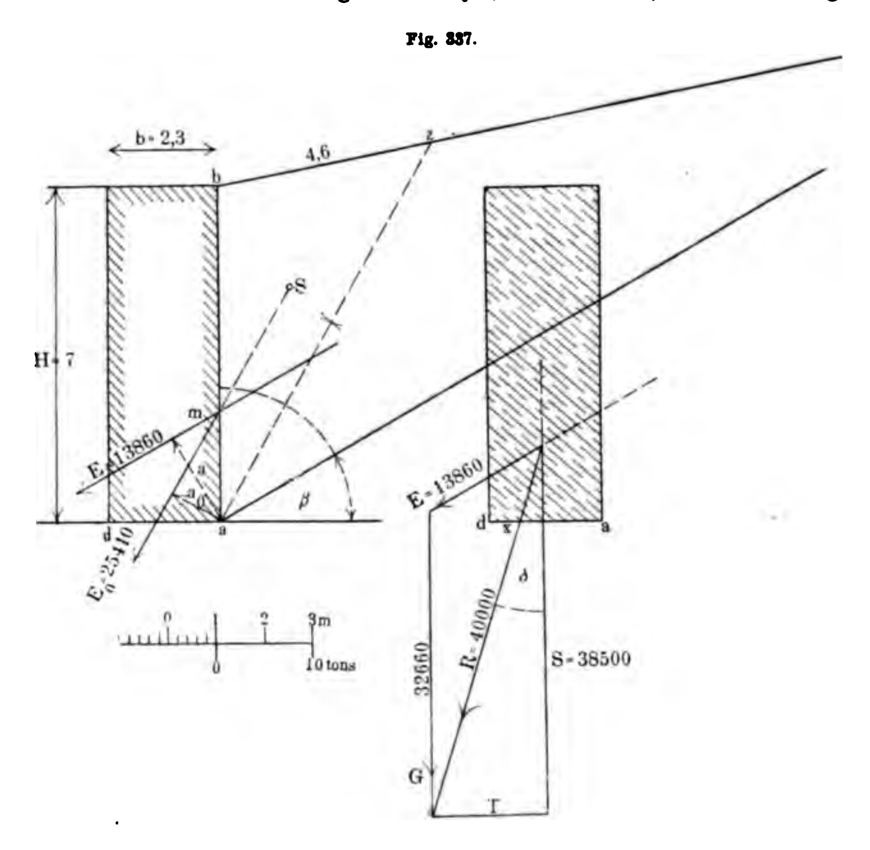
Die folgenden Figuren sollen uns neben weiteren Erklärungen gleichzeitig als **Beispiele** dienen.

I. Die Futtermauer, Fig. 338, ist $H = 7$ m hoch, sie soll nasse Dammerde, deren Böschungswinkel $\beta = 30°$ und deren Einheitsgewicht $\gamma = 1650$ kg ist, abdämmen. Wir tragen uns $2\beta = 60°$ an ab an und errichten die mittlere geometrische Proportionale gk, welche von a aus nach i übertragen wird, das Dreieck hie haben wir in das rechtwinklige von der Höhe 7 m und der Basis 2,4 m verwandelt und an ab angetragen, es enthält $\frac{2{,}4 \cdot 7}{2} = 8{,}4$ qm Flächeninhalt, bei 1 m Breite also auch 8,4 cbm Inhalt. Der Erddruck wird dann $E = 8{,}4 \cdot 1650 = 13860$ kg. E greift unter 30° Neigung in $^1/_3$ der Höhe, in m an. Die Verwandlung des Dreiecks hie war hier nicht unbedingt nötig, da die Fläche von 8,4 qm unmittelbar aus hie entnommen werden kann und m in $^1/_3$ der Höhe liegen muss. Wir gelangen übrigens nach unserer im I. Bande durchgeführten analytischen Berechnung zu demselben Angriffspunkt m in $^1/_3$ der Höhe und zu nahe demselben Umsturzmoment bezogen auf die Kante a. Teilt man den Winkel $90 - \beta$ in zwei Teile (Band I, S. 181) und berechnet den Querschnitt abz, dessen Inhalt aus der Figur 337 entnommen ist, $\frac{4{,}6 \cdot 6{,}7}{2} = 15{,}4$ qm, so erhält man

als Druckprisma auf der Gleitebene a z $E_0 = 15{,}4 \cdot 1 \cdot 1650 = 25\,410$ kg. Die Richtung der Kraft E_0 durch den Schwerpunkt S des Dreiecks a b z läuft parallel a z und geht auch durch den Punkt m in $^1/_3$ der Höhe der Mauer.

Beide Momente E a und $E_0\, a_0$ ergeben fast die gleichen Resultate, $E a = 13\,860 \cdot 2 = 27\,720$ kgm und $E_0\, a_0 = 25\,410 \cdot 1{,}08 = 27\,700$ kgm.

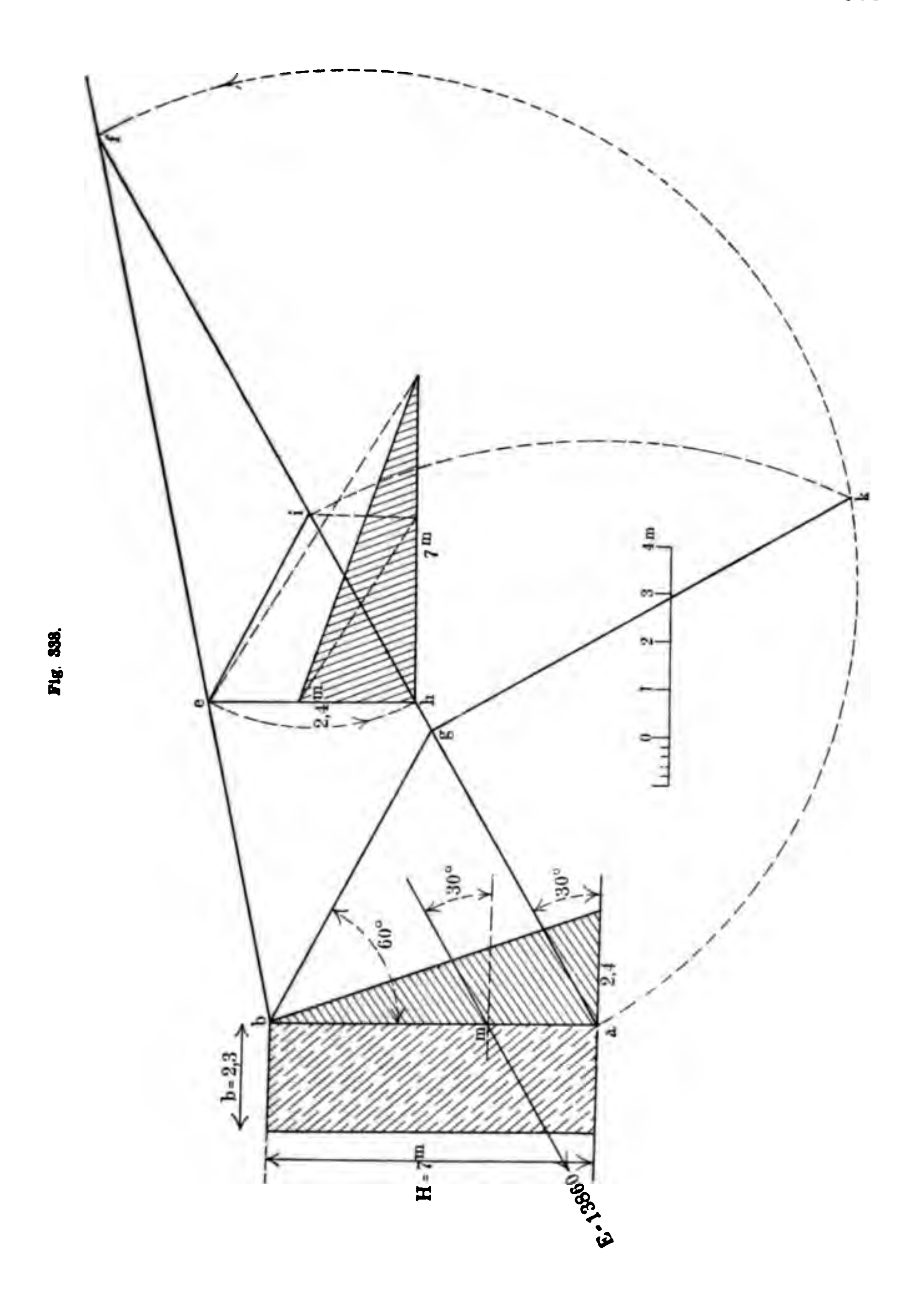
Fig. 337.



Wir können sonach auch vorläufig ohne Rücksicht auf die Festigkeitsverhältnisse der Futtermauer zur Berechnung der Mauerstärke die Stabilitätsformel Gl. 79a, bezw. Gl. 79b, Mech. Band I, S. 181 und 182 verwenden:

$$\left.\begin{aligned} b &= 0{,}58\, H \operatorname{tg}(45 - \beta/_2) \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_1}}, \text{ bezw.} \\ b &= 0{,}4\, H \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_1} \operatorname{cotg} \beta \cos(45 + \beta/_2)} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (33)$$

Fig. 338.



Für $\beta = 30^\circ$ erhalten wir

$$b = 0{,}34\,H\sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_1}} \text{ bis } 0{,}36\,H\sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_1}},$$

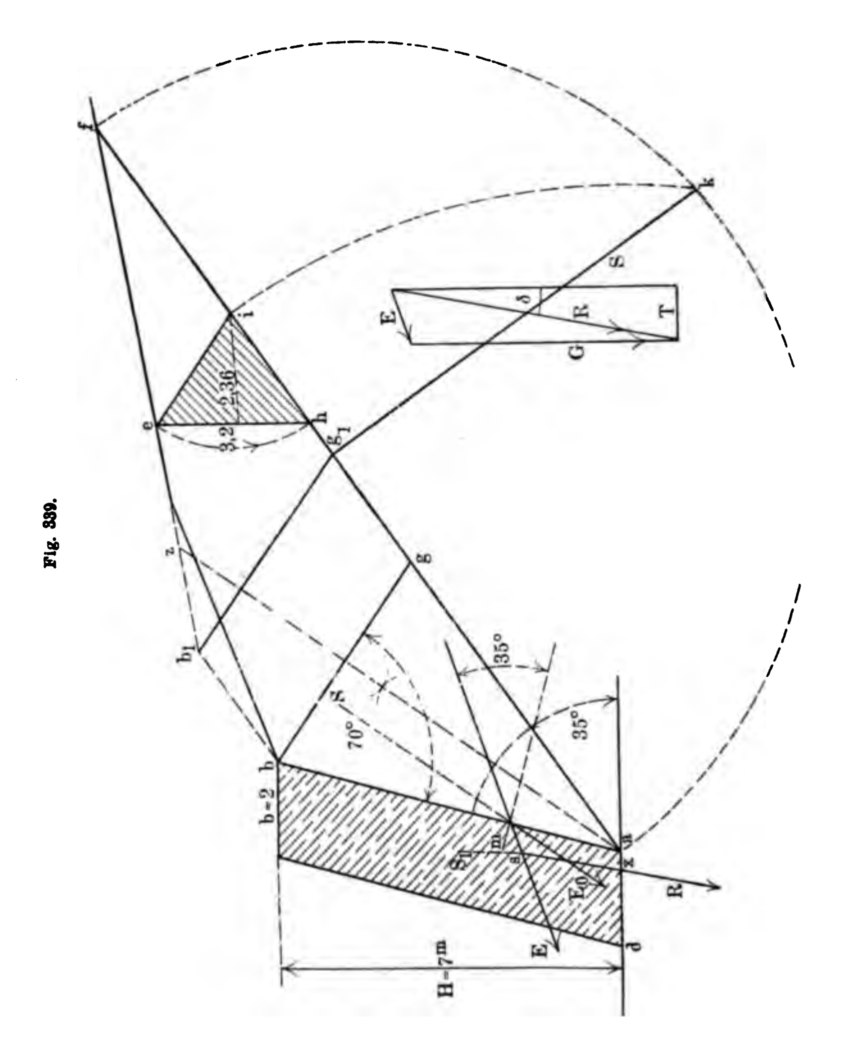


Fig. 339.

worin γ_1 das Gewicht der Kubikeinheit Mauer ist; nehmen wir für dasselbe $\gamma_1 = 2000$ kg auf den cbm an, so ergiebt sich

$$b = 0{,}36 \cdot 7\sqrt{\frac{1650}{2000}} = 2{,}3 \text{ m}.$$

Das Mauergewicht für 1 m Breite ist hiernach

$$G = 2{,}3 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 2000 = 32660 \text{ kg}.$$

Die Resultierende aus E und G ergiebt, wie aus dem Kräftedreieck Fig. 337 zu ersehen, R = 40000 kg, sie fällt innerhalb der Basis ad, die Mauer ist sonach standsicher. —

II. Die Höhe der Futtermauer in Fig. 339 ist wieder H = 7 m, das abzustützende Material wiegt $\gamma = 1600$ kg für d. cbm, das Mauerwerk selbst wieder $\gamma_1 = 2000$ kg. Das natürliche Terrain ist innerhalb bf einmal geknickt; der Böschungswinkel ist $\beta = 35°$. Man trägt an b den Winkel 70° an, zieht bb_1 parallel af bis zur Verlängerung b_1 der Linie ef; zieht $b_1 g_1$ parallel bg und konstruiert in bekannter Weise das Druckdreieck eih, dessen Inhalt ist

$$F = \frac{3{,}2 \cdot 2{,}36}{2} = 3{,}78 \text{ qm}.$$

Man erhält sonach $E = 3{,}78 \cdot 1600 = 6048$ kg, E greift in m in $^1/_3$ H an. Halbiert man wieder den Winkel 90 — 35°, sucht den Schwerpunkt S des Dreiecks abz und überträgt ihn parallel zu az, so geht diese Linie auch durch m.

Die Stärke der Mauer, um der Stabilität zu genügen, ist

$$b = 0{,}58 \operatorname{tg}\left(45 - \frac{35}{2}\right)\sqrt{\frac{1600}{2000}} \backsim 2 \text{ m};$$

das Mauergewicht für 1 m Breite $G = 2 \cdot 7 \cdot 2000 = 28000$ kg. Die Resultierende aus G und E ergiebt das beigezeichnete Kräftedreieck. Sucht man den Schwerpunkt der Mauer S_1 und benutzt die Richtung R durch die Gewichtssenkrechte $S_1 s$, so hat man nur nötig, R parallel durch s in die Mauer zu übertragen, um sich zu überzeugen, ob R nicht ausserhalb der Basis fällt. —

III. Die Futtermauer, Fig. 340, soll eine Höhe von H = 8 m erhalten, der Böschungswinkel ist wieder $\beta = 30°$, $\gamma = 1650$ kg und das Mauerwerk wiegt $\gamma_1 = 1800$ a. d. cbm.

Ausser dem Erddruck ist noch die Belastung von zwei Lokomotivachsen für eine zweigeleisige Eisenbahn, 30000 kg, vorhanden, welche bei 1 m Mauerlänge in Anrechnung zu bringen sind. Die in diesem Beispiel horizontale Erdoberfläche hat eine Länge von bf = 14,7 m, bei 1 m Breite sonach einen Flächeninhalt von 14,7 qm. Bezeichnen wir mit H_1 die ideale der obigen zufälligen Belastung von 30000 kg entsprechenden Erdhöhe, so ergiebt sich diese aus der Gleichung

$$H_1 \cdot 14{,}7 \cdot 1650 = 30000, \text{ zu } H_1 = 1{,}24 \text{ m}.$$

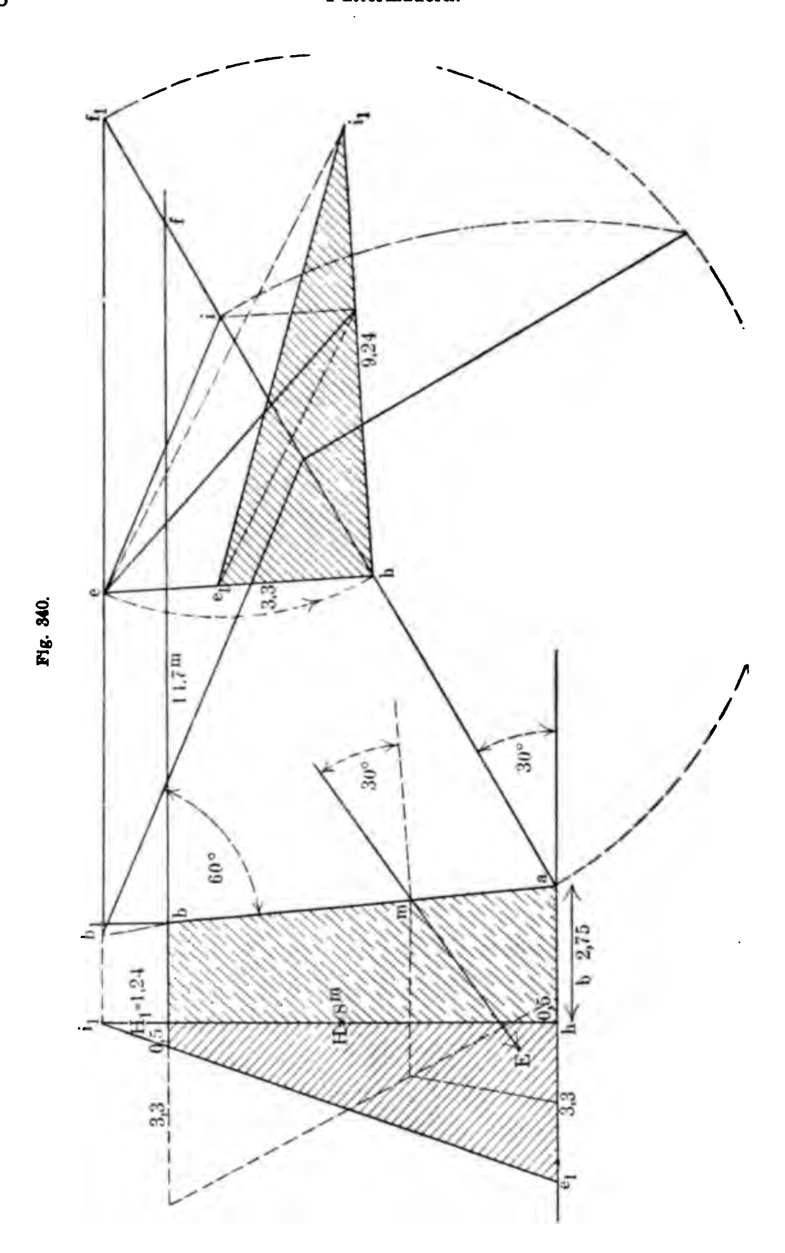


Fig. 340.

Wir tragen $H_1 = 1,24$ m senkrecht an b an und ziehen die ideale Abgrenzungslinie $b_1 f_1$; den Winkel 2β in b_1, in der Verlängerung von ab angesetzt, findet man in derselben Weise wie oben das Druckdreieck

eih, wir verwandeln dasselbe in das rechtwinklige he_1i_1 von der Höhe $H + H_1 = 9{,}24$ m und übertragen es an die senkrechte Aussenwand der Futtermauer. Die Basisbreite der letzteren ergiebt sich zu

$$b = 0{,}36 \cdot 8 \sqrt{\frac{1650}{1800}} = 2{,}75 \text{ m.}$$

Aus Fig. 335 wissen wir, dass der Erddruck sich aus dem Trapez $e_1 i_1 o n$ ergiebt. In Fig. 340 ist der Inhalt des in Frage stehenden Trapezes

$$\frac{8\,(3{,}3 + 0{,}5)}{2} = 15{,}20 \text{ m, somit } E = 15{,}2 \cdot 1650 = 26\,100 \text{ kg.}$$

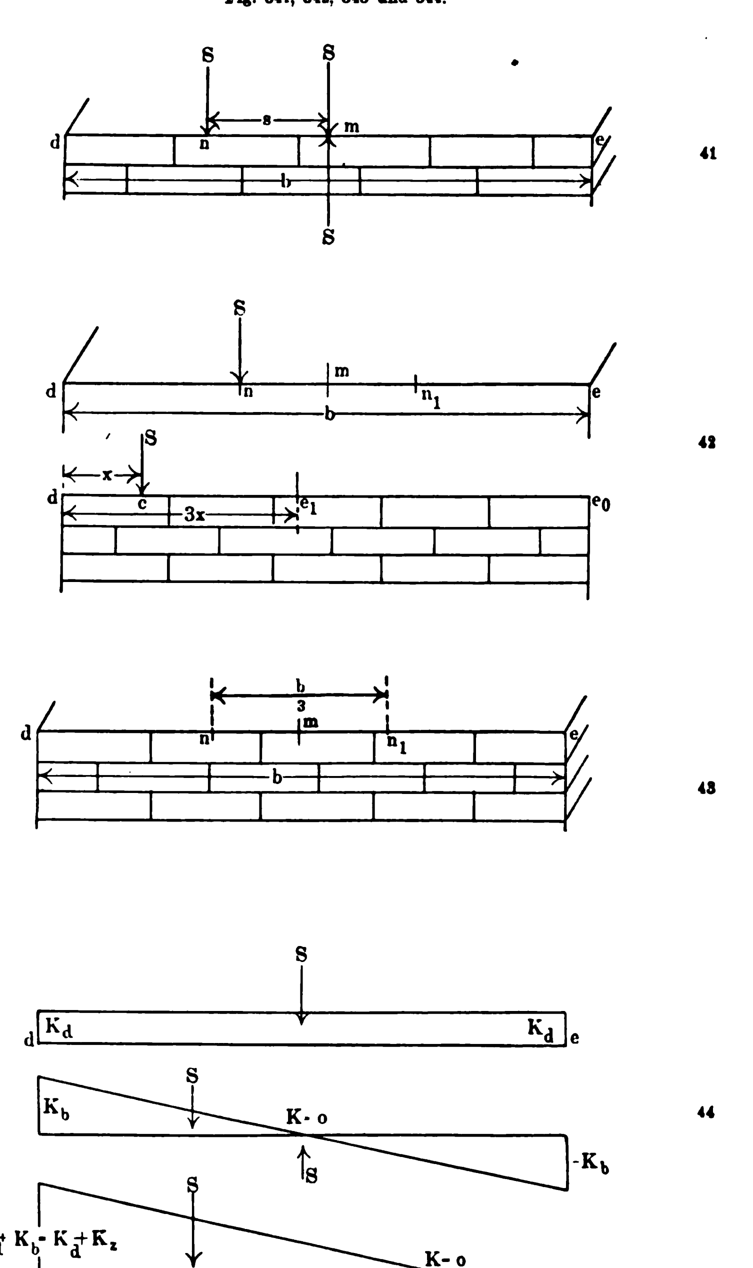
Die Schwerpunktshöhe wird nach m übertragen, wo E unter 30° angreift.

Die Stabilität der Stützmauern, die Berechnung der Stärke b, um die Standsicherheit festzustellen, genügt uns aber nicht allein, sondern wir müssen uns noch klar über die Festigkeitsverhältnisse und über die Druckverteilung werden, was für Spannungen durch den Erddruck, durch das Mauergewicht erzeugt werden, und ob diese die erlaubten Grenzen nicht überschreiten; ähnliche Untersuchungen haben wir bereits im Beispiel IX, S. 226, bei Betrachtung der Festigkeits- und Stabilitätsverhältnisse eines Fabrikschornsteins vorgenommen.

Der Erddruck sucht die Mauer zu kanten, umzustürzen, gerade so, wie die Seitenkraft K S. 231 den Schornstein. Das Eigengewicht der Mauer und die Reibung, welche der Erddruck an der Mauer selbst verursacht, bewirken gleichzeitig einen senkrechten Druck auf das Fundament der Futtermauer. Durch die Kantung wird ein Moment hervorgerufen, welches die Stützmauer am unteren Querschnitt des Fundaments abzubrechen bestrebt ist. Durch das Moment entstehen Zug- und Druckspannungen, die sich mit den Druckspannungen der senkrechten Kräfte nach den Regeln der kombinierten Festigkeit summieren, die idealen Spannungen sind schliesslich mit den zulässigen zu vergleichen. Massgebend sind die Druckspannungen; Zugspannungen sollen bei Mauerwerkskörpern möglichst ganz gemieden werden.

Zerlegt man den resultierenden Druck R in die Vertikale S und in die horizontale Kraft T, s. Fig. 337, 339, so sucht die letztere das Mauerwerk zu verschieben, S bildet mit R den Winkel δ. Wir haben hier dieselben Vorbedingungen wie S. 235, und können auch denselben Grundsatz wie oben verwerten: Bezeichnet man wieder mit α den Reibungswinkel, so muss $\delta < \alpha$ sein, d. h. damit keine seitliche Verschiebung eintritt, muss δ kleiner als der Reibungswinkel **des Materiales** sein.

Fig. 341, 342, 343 und 344.



Gehen wir nun näher auf die Materialspannungen im Mauerwerk selbst ein, so sei de, Fig. 341, eine beliebige horizontale oder geneigte Mauerfuge, oder ein Mauerschnitt, auf welchen die aus der Resultierenden R sich ergebende senkrechte Kraft S einwirkt. Die Entfernung, in welcher S vom Schwerpunkt m oder ev. Mittelpunkt angreift, sei s. S bildet am Hebelarm s das Moment $M = Ss$, S für sich allein bewirkt als vertikale oder Querkraft einen Druck auf de, dem letzteren entspricht die Spannung k_d, dem Moment die Biegungsspannung k_b. Moment und Mittelkraft lassen sich auch dadurch erkennen, dass man in m eine zu S gleiche und parallele und eine gleiche Gegenkraft zufügt. Das Kräftepaar SS an s veranlasst dann die Drehung, bezw. Biegung, die Kraft S in der Mitte die gleichmässig verteilte Druckspannung.

Kann man von der excentrischen Belastung absehen, d. h. greift S in m an, ist $s = o$, so ist auch kein Moment vorhanden*), dann treten überhaupt nur Druckspannungen im Querschnitt ein.

Bezeichnen wir mit f den Fugenquerschnitt von de, so folgt aus

$$S = f\,k_d,\quad k_d = \frac{S}{f};\ \text{ferner aus}$$

$$M = Ss = k_b\,W,\ \text{wenn W das Widerstandsmoment ist,}$$

$$k_b = \frac{M}{W}.$$

Nach den im II. Band S. 311 aufgestellten Grundsätzen sind dann die Fugen- bezw. Kantenspannungen

$$\left.\begin{aligned} k_i &= \frac{P}{f} - \frac{M}{W} = k_d - \frac{M}{W},\ \text{die ideale Zugspannung} \\ k_i' &= \frac{P}{f} + \frac{M}{W} = k_d + \frac{M}{W},\ \text{die ideale Druckspannung} \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

Berücksichtigen wir, dass die uns augenblicklich vorliegende Mauer einen rechteckigen Querschnitt von der Stärke b und der Breite 1 m = 100 cm hat, wonach $f = 100\,b$ qcm, so ist für $W = \frac{100\,b^2}{6}$ einzuführen, und man erhält

$$k_d = \frac{S}{100\,b}\ \text{und}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\quad (35)$$

$$k_b = \frac{M}{\left(\frac{100\,b^2}{6}\right)} = \frac{6\,S\,s}{100\,b^2};\ \text{folglich}$$

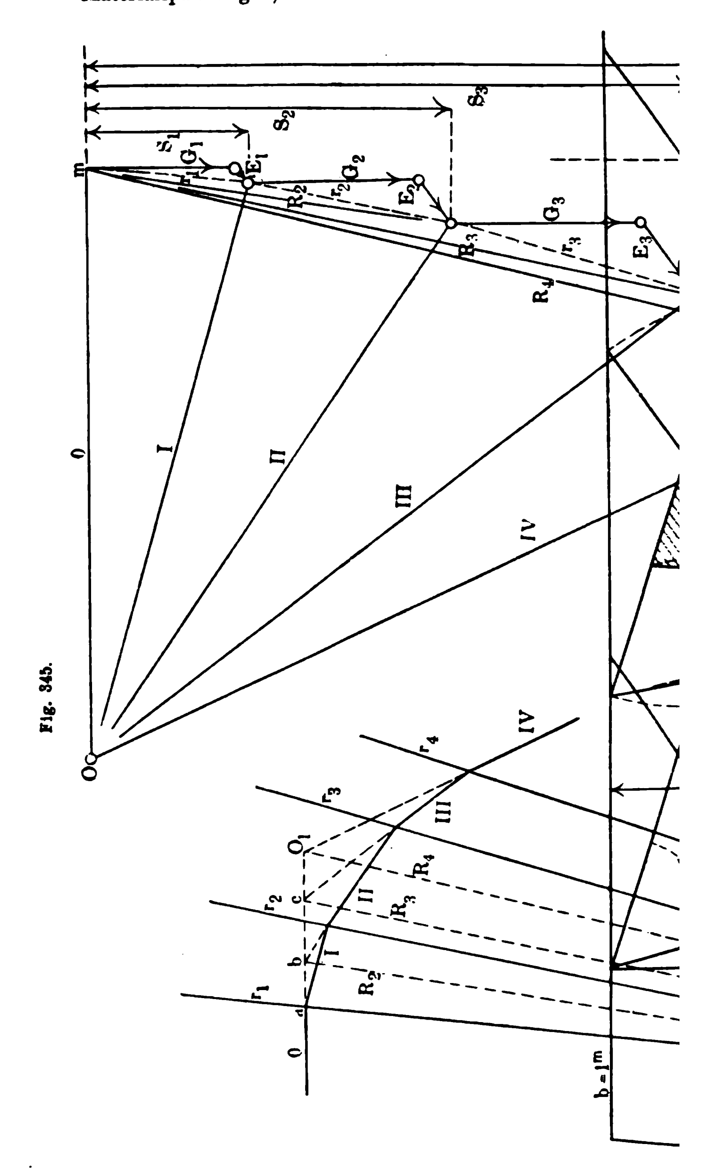
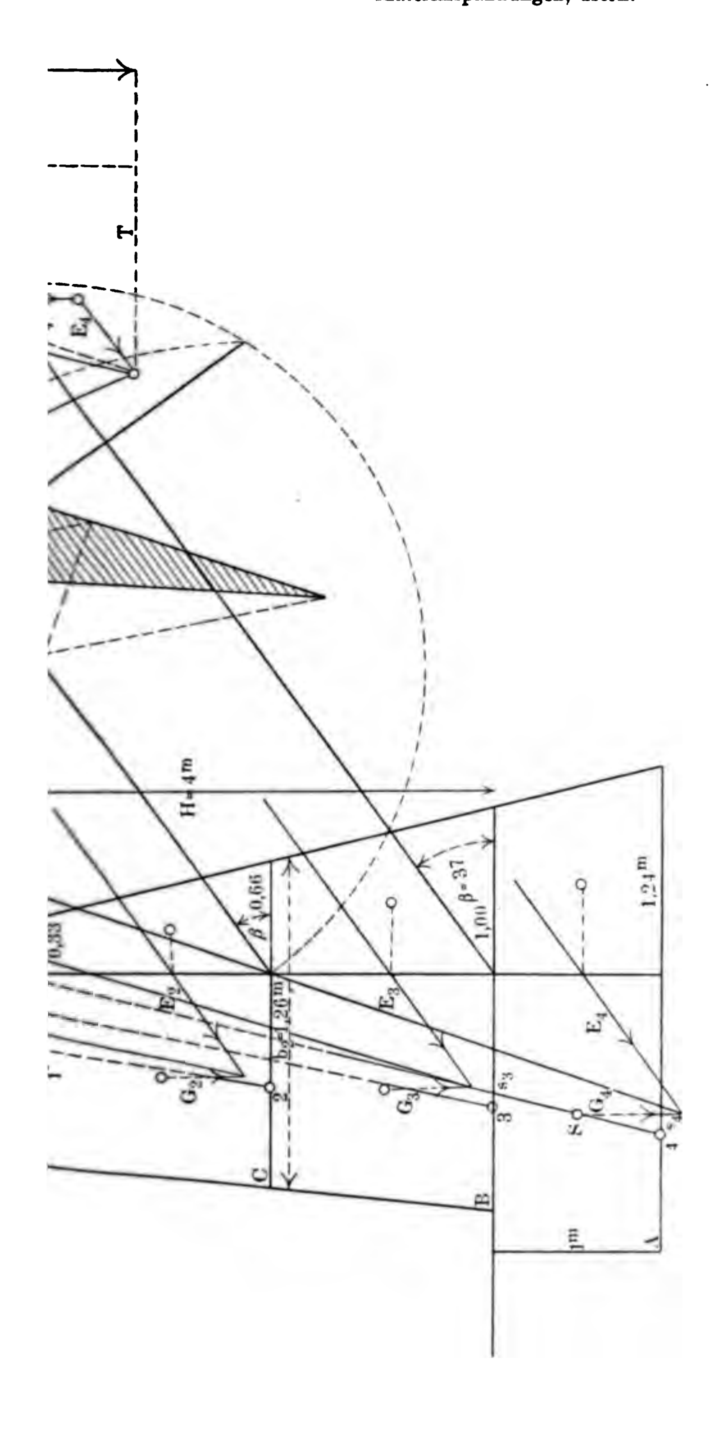

m
O
0
I
II
III
IV
S_1
S_2
S_3
G_1
G_2
G_3
E_1
E_2
E_3
R_2
R_3
R_4
r_1
r_2
r_3
r_4
O_1
b
c
$b = 1^m$

Fig. 345.


T
E_4
H=4m
0,66
0,33
β=37
1,00
1,24m
b_2=1,26m
E_2
E_3
E_4
G_2
G_3
G_4
S
s_3
2
3
4
C
B
A
1m

$$\left.\begin{aligned} k_i &= \frac{S}{100\,b} - \frac{6\,S\,s}{100\,b^2} = \frac{S}{100\,b}\left(1 - \frac{6\,s}{b}\right), \text{die Spannung in e, Fig. 341} \\ k_i' &= \frac{S}{100\,b} + \frac{6\,S\,s}{100\,b^2} = \frac{S}{100\,b}\left(1 + \frac{6\,s}{b}\right), \text{ die Pressung in d .} \end{aligned}\right\} (36)$$

Sollen nun keine Zugspannungen auftreten, so muss $k_i = o$ werden, woraus sich die Bedingung ergiebt

$$1 - \frac{6\,s}{b} = o \text{ oder } s = \frac{b}{6} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (37)$$

Wenn die Druckkraft S innerhalb der Grenzen m n und m n_1, Fig. 342, also im mittleren Drittel der Mauer angreift, dann tritt nur eine Druckverteilung im Querschnitt ein und sind keine Zugspannungen vorhanden, man nennt n n_1 den Kern und n_1 n_1 die Kerngrenzen. Da nun S nur eine Teilkraft von R, Fig. 337, 339, so gilt, wenn man von der Reibungs- oder Verschiebungskraft T absieht, von R als Resultierende aus E und G dasselbe; man wird also die Futtermauer, aber auch jede andere excentrisch belastete Mauer so stark ausführen, dass die Druckkraft möglichst in das innere Drittel fällt, damit keine Zugspannungen eintreten.

Greift S in der Kerngrenze n, Fig. 342, an, dann tritt noch keine Zugspannung ein, weil $s = \frac{b}{6}$, aber dann erhält die Druckspannung ihren grössten Wert; die Kantenpressung in d wird dann nach Gl. 36

$$k_d = \frac{S}{100\,b}\left(1 + \frac{6 \cdot b}{b \cdot 6}\right) = \frac{2\,S}{100\,b} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (38)$$

sie ist doppelt so gross als innerhalb des Kernes.

Greift die Druckkraft S bezw. R rechts von m, in n_1 an, so erhält die Pressung in e den gleichen Wert wie Gl. 38, in d wird sie zu Null, weil dann $k_i = \frac{S}{100\,b}\left(1 - \frac{6\,b}{b \cdot 6}\right) = o$ wird.

Dürfen über die Kerngrenzen hinaus keine Zugspannungen auftreten, sind diese bei excentrischer Belastung ganz auszuschliessen, so muss eine Verschiebung der Grenzen eintreten. In lose aufeinander geschichteten Steinen, in Trockenmauerwerk, bei schlechtem Verbandsmaterial kann von Zugwiderständen keine Rede sein, jede Zugkraft würde ein Klaffen der Fugen veranlassen. Liegen in der Fuge a e_1, Fig. 342, die Steine lose aufeinander, so verteilt sich S bei excentrischem Druck nur auf einen Teil d e_1 der Fuge, dieser muss die ganze Kraft in sich aufnehmen. Wir denken uns dann in c eine Kerngrenze, messen x und können aber

nur den Teil $de_1 = 3x$ der Fuge de_0 als Druckfuge in Rücksicht ziehen. Die Kantenpressung ist dann nach Gl. 38 für $b = 3x$,

$$k_d = \frac{2S}{100 \cdot 3x} = \frac{2S}{300x}, \text{ bezw. bei Abnahme} \quad \ldots \quad (39)$$

einer Maximalpressung k

$$x = \frac{2S}{300k} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (39a)$$

Eine graphische Übersicht über die Verteilung der Spannungen bei excentrischer Belastung haben wir bereits in Bd. II, S. 319, angedeutet, in Fig. 344 sind sie unmittelbar eingetragen. In der ersten der 3 letzten Fig. S. 310 wirkt S in der Mitte, es findet eine gleichmässige Druckverteilung statt, der Querschnitt ist durch die Spannung k_d beansprucht; in der 2. Fig. wirkt S excentrisch, das Moment bewirkt eine von der Mitte aus zunehmende Biegungsspannung. Die dritte Figur setzt sich aus beiden zusammen, der Punkt z wird spannungslos.

Aus Fig. 337 ergiebt sich aus dem Kräftedreieck für R, L und T, $S = 38500$ kg, ferner greift R in der Entfernung $x = 0{,}65$ m $= 65$ cm von der Kante d an. Mit Vernachlässigung von T erhält man dann die Kantenpressung in d nach Gl. 39

$$k = \frac{2 \cdot 38500}{300 \cdot 65} = 4 \text{ kg auf d. qcm.}$$

In der Entfernung $3x = 3 \cdot 0{,}65 = 1{,}95$ m ist die Pressung Null. Darf man sich mit der Druckspannung oder Pressung $k = 4$ kg begnügen, dann könnte man die Futtermauer um $2{,}3 - 1{,}95 = 0{,}35$ m schwächer ausführen, allerdings vorausgesetzt, dass dadurch die Stabilität nicht leidet.

Die Fundamentfläche $ad \cdot 1\,\text{m} = 23000$ qcm, Fig. 337, hat für sich allein ohne Erddruck, vom Gewicht der Mauer der Druckspannung

$$k_d = \frac{G}{23000} = \frac{32660}{23000} = 1{,}4 \text{ kg auf d. qcm}$$

Widerstand zu leisten.

Aus Fig. 339 ergiebt sich $S = 29000$ kg, $G = 28000$ kg und $x = 0{,}4$ m $= 40$ cm, sonach

$$k = \frac{2 \cdot 29000}{300 \cdot 40} = 4{,}8 \text{ kg.}$$

In d ist keine Spannung mehr vorhanden, weil der Nullpunkt der Pressung bereits in die Entfernung $3 \cdot 40 = 120$ cm von a fällt, während d in 200 cm Entfernung liegt.

Um die Druckverteilung im Mauerkörper festzustellen, teilen wir

die ganze Mauer in horizontale Abschnitte, gleich oder ungleich hoch, und bestimmen den Erddruck für jeden dieser; in Fig. 336 ergiebt sich die Einteilung schon unmittelbar aus dem mehrfach unterschnittenen Querschnitt. Für jeden dieser Teile erhalten wir dann einen Wert für E, welchen wir mit dem jeweiligen Mauergewicht G kombinieren, wir erhalten dann schliesslich bis zum Fundament eine Reihe von Resultierenden, eine gebrochene Linie, die uns bereits bekannte Stützlinie oder Mittellinie des Druckes, deren Konstruktion wir graphisch in ähnlicher Weise wie beim Schornstein, S. 228 u. f., ausführen werden. Zur Klarlegung der Konstruktion verwenden wir gleich einige praktische Ausführungen.

I. Beispiel. Es sind die Druck- und Spannungsverhältnisse einer $H = 4$ m hohen Futtermauer zu untersuchen, welche zum Abstützen von nasser Dammerde verwendet werden soll. Der Böschungswinkel ist $\beta = 37°$. Das Einheitsgewicht des Mauerwerkes ist $\gamma_1 = 2200$ kg a. d. cbm, das der Erde $\gamma = 1600$ kg.

Die Stärke der Stützmauer nehmen wir vorläufig nach der Formel Gl. 33

$$b = 0{,}58 \cdot H \operatorname{tang}\left(45 - \frac{\beta}{2}\right)\sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_1}}, \text{ man erhält}$$

$$b = 0{,}58 \cdot 4 \operatorname{tg}\left(45 - \frac{37}{2}\right)\sqrt{\frac{1600}{2200}} \sim 1\,\text{m};$$

diese Dimension soll die Mauerkrone erhalten, ob sie genügt, werden uns die Spannungs- bezw. Druckverteilungen lehren. Die Mauer wird nach der Aussenseite abgeböscht und erhält ein um eine Steinstärke (25 cm) hervorstehendes Fundament von 1 m Höhe. Die Erdbegrenzung an der Mauerkrone ist horizontal.

Wir zeichnen, Fig. 345, die Mauer mit dem anschliessenden unter 37° geböschten Terrain auf und teilen sie in 3, hier gleich hohe Schichten von $1\,{}^1\!/_3$ m Höhe. Für jede Schicht wird zunächst der Erddruck festgestellt. Nach uns jetzt bekannten Regeln (etwa nach Fig. 229) konstruieren wir die Druckdreiecke, wir haben die Konstruktion in der Figur nur für die beiden oberen Schichten ausgeführt, thatsächlich genügt es hier, das grösste Druckdreieck auszuführen und dasselbe zu verwandeln, etwa das für die Höhe $H = 4$ m, da sie sich alle ähnlich sind. Nun berechnet man aus der Fläche des Kronendreiecks und der darunter liegenden 3 Trapeze die Seitenkräfte $E_1 \ldots E_4$. Man erhält die Dimensionen, aus der Zeichnung entnommen:

$$E_1 = 0{,}33 \cdot 1{,}33 \cdot \tfrac{1}{2}\, 1600 = 355 \text{ kg}$$

$$E_2 = \frac{0{,}66 + 0{,}33}{2} \cdot 1{,}33 \cdot 1600 = 1068 \text{ kg}$$

$$E_3 = \frac{1{,}00 + 0{,}66}{2} \cdot 1{,}33 \cdot 1600 = 1780 \text{ kg}$$

$$E_4 = \frac{1{,}24 + 1{,}00}{2} \cdot 1{,}33 \cdot 1600 = 1790 \text{ kg.}$$

Die diesen Werten entsprechenden Mauergewichte sind auch wieder für eine 1 m breite Mauer:

$$G_1 = \frac{1 + 1{,}14}{2} \cdot 1{,}33 \cdot 2200 = 3140 \text{ kg}$$

$$G_2 = \frac{1{,}14 + 1{,}26}{2} \cdot 1{,}33 \cdot 2200 = 3520 \text{ kg}$$

$$G_3 = \frac{1{,}26 + 1{,}40}{2} \cdot 1{,}33 \cdot 2200 = 3900 \text{ kg}$$

$$G_4 = 1{,}6 \cdot 1 \cdot 2200 = 3520 \text{ kg.}$$

Man stellt nun in einer Seitenfigur ein Kräftepolygon aus obigen Kräften $G_1\, E_1\, G_2\, E_2\, G_3\, E_3$ .. zusammen, diese liefern die Resultierenden $r_1\, r_2\, r_3\, r_4$, welche man aus der Nebenfigur parallel in die Hauptfigur überträgt: r_1 geht durch den Schnittpunkt der Kräfte $G_1\, E_1$, r_2 durch den der Kräfte $G_2\, E_2$ u. s. w.

Man wählt nun einen Polpunkt O und zieht die den Resultierenden $r_1\, r_2$ . . entsprechenden Polstrahlen O, I, II . ., überträgt diese in die Hauptfigur, verlängert sodann die Seilpolygonseiten II und III bis zum Schnitt in o O_1 und verbindet in der Hauptfigur die Endpunkte der Kräfte $E_2\, E_3\, E_4$ mit m, so erhält man geschlossene Kräftedreiecke; die Schlusslinien $R_2\, R_3\, R_4$ (r_1 ist schon übertragen) überträgt man natürlich wieder parallel in die Hauptfigur nach, sie gehen durch die Punkte b, c, d bezw. a und schneiden die Mauerschichten in den Punkten 1, 2, 3, 4. Die Verbindungslinie derselben ist die Mittellinie des Druckes.

Die in den Fugen 1, 2, 3, 4 wirkenden senkrechten Kräfte $S_1\, S_2\, S_3\, S_4$ lassen sich, wie aus Fig. 345 zu ersehen, leicht austragen. Man findet $S_1 = 3400$, $S_2 = 7500$, $S_3 = 12500$ und $S_4 = 17200$ kg.

Zu bemerken ist, dass in unserer Zeichnung die Kraft R_4 zufällig durch den Schwerpunkt S des Fundamentquerschnittes geht.

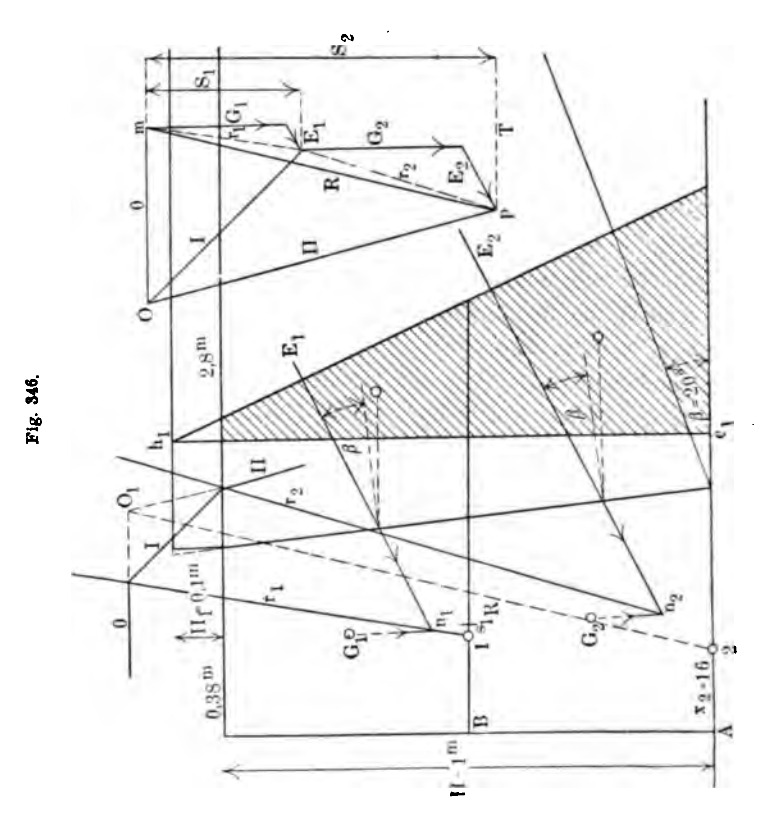
Um die Kantenpressungen in A, B, C, D zu erhalten, messen wir die Entfernungen s in den betr. Fugen und wenden die oben entwickelten Formeln an.

In der obersten Fuge ist s = o, d. h. es fällt der Schnittpunkt 1 der Kraft R bezw. r_1 in die Mitte, wir erhalten aus Gl. 35, S. 311, die Druckspannung für $b_1 = 1{,}14$ m = 114 cm,

$$k_i' = k_d = \frac{S_1}{100 b_1} = \frac{3400}{100 \cdot 114} = 0{,}3 \text{ kg}.$$

Im zweiten Fugenschnitt, dessen Breite $b_2 = 1{,}26$ m, fällt der Schnitt R_2 um $s_2 = 3{,}6$ cm links von der Mitte, also auch in das mittlere Drittel, sonach ist keine Zugspannung vorhanden und wir finden die Pressung durch

$$k_i' = k_d = \frac{S_2}{100 b_1}\left(1 + \frac{6 s_2}{b_2}\right) = \frac{7500}{100 \cdot 126}\left(1 + \frac{6 \cdot 3{,}6}{126}\right) = 0{,}7 \text{ kg}.$$


Fig. 346.

Im dritten Fugenschnitt fällt R_3 um $s_3 = 8$ cm links der Mitte und liegt noch im Kern, sonach ist für b = 1,4 m die Pressung in B

$$k_i' = k_d = \frac{S_3}{100 b_3}\left(1 + \frac{6 s_3}{b_3}\right) = \frac{12500}{100 \cdot 140}\left(1 + \frac{6 \cdot 8}{140}\right) = 1{,}2 \text{ kg}.$$

Die Kantenpressung in A ergiebt sich für die unterste Fuge, für welche $b_4 = 1{,}65$ m, $s_4 = 12$ cm, $S_4 = 17\,200$,

$$k_i' = \frac{17\,200}{100 \cdot 165}\left(1 + \frac{6 \cdot 12}{165}\right) = 1{,}5 \text{ kg.}$$

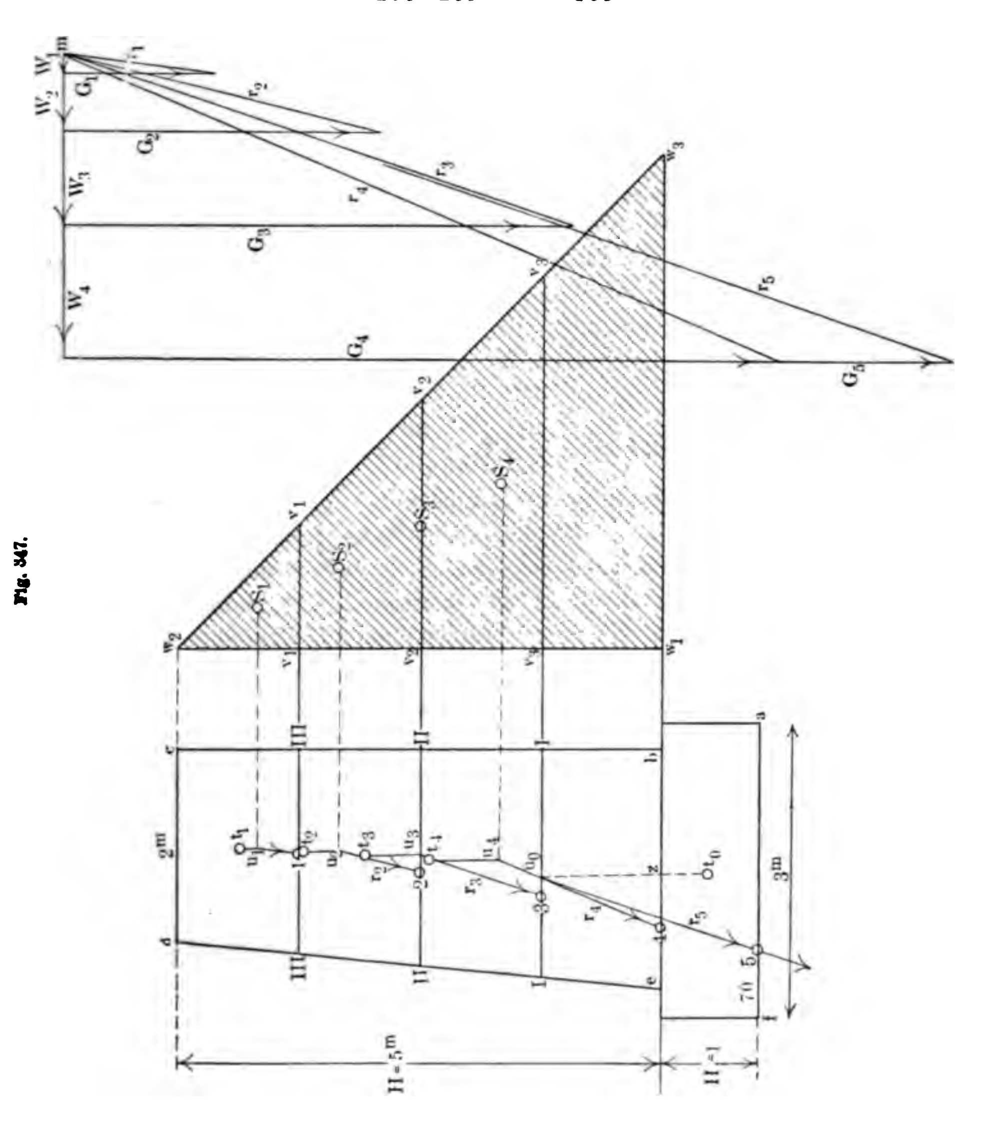


Fig. 347.

Wir ersehen aus dem Vorstehenden, dass die Futtermauer standsicher, ferner, dass die Druckverteilung eine günstige ist und dass die

Materialpressungen gering sind; die Erdpressung in 4 erreicht noch nicht 2 kg auf d. qcm und ist darum auch noch zulässig.

Der Winkel, den die Kraft R_2 mit der Vertikalen, also mit S_2, bildet, ist $\delta = 13°$, dessen trig. Tang. ist tg $13° = 0{,}23$, während nach der Tabelle, S. 294, für unseren vorliegenden Fall $\varphi = 0{,}58$ bis $0{,}75$; es ist somit $0{,}23 < \varphi$ und demnach von einer seitlichen Verschiebung in den Fugen keine Rede. Die grösste Verschiebungskraft in der Fundamentsohle ist übrigens aus der Figur entnommen, $T = 4300$ kg.

II. In Fig. 346 haben wir uns die Aufgabe gestellt, für einen Getreideboden eine Stützmauer von $H = 1$ m Höhe herzustellen; das Getreide ist an der Mauerkrone horizontal abgeglichen, aber soll noch auf 1 m in der Richtung der Mauer, also auf 1 m lfd. mit 200 kg belastet werden, z. B. durch Menschen, welche das Getreide betreten. Der Böschungswinkel ist $\beta = 20°$, das Einheitsgewicht des Getreides ist 750 kg und das des Mauerwerkes $\gamma_1 = 1400$ kg. Die Stärke der Mauer ist dann

$$b = 0{,}58 \cdot 1 \operatorname{tg}\left(45 - \frac{20}{2}\right)\sqrt{\frac{750}{1400}} = 0{,}3 \sim 38 \text{ cm}.$$

Wir haben die Mauer an der Krone mit $1^1/_2$ Stein = 38 cm ausgeführt und sie nach innen an der Rückenfläche geböscht, und zwar mit 50 cm Stärke am Fundament. Die horizontale Begrenzung an der Krone ergiebt mit der Böschung von 20° eine horizontale Entfernung von 2,8 m, die aus der Zeichnung entnommen werden kann; die zufällige Belastung von 200 kg entspricht der Überhöhung von H_1, diese ergiebt sich aus der Gleichung $2{,}8 \cdot 1 \cdot H_1\ 750 = 200$, man erhält $H_1 = 0{,}1$ m abg.

Man konstruiert nun zunächst das Druckdreieck im Sinne der Fig. 335 und legt ein oder mehrere horizontale Schnitte durch die Mauer, wir haben uns in Fig. 346 mit einem Schnitt in der halben Höhe der Mauer begnügt; man erhält dann zwei Trapeze zur Berechnung des Erddruckes E_1 und E_2.

Aus dem Inhalt der Trapeze 0,08 qm und 0,2 qm erhält man
$E_1 = 0{,}08 \cdot 1 \cdot 750 = 60$ kg und $E_2 = 0{,}2 \cdot 1 \cdot 750 = 150$ kg.

Die beiden entsprechenden Gewichte der Mauer sind

$$G_1 = 0{,}205 \cdot 1400 = 287 \text{ kg und}$$
$$G_2 = 0{,}235 \cdot 1400 = 329 \text{ kg}.$$

Man sucht ferner die Schwerpunkte der Trapeze und konstruiert in einer Seitenfigur die Kräftepolygone $G_1\ E_1\ r_1$ und $G_2\ r_2\ E_2$; r_1 und r_2 werden durch die Schnittpunkte n_1 und n_2 parallel in die Hauptfigur übertragen. Weiter wählt man auf der Horizontalen mO den

Polpunkt O und überträgt die Polstrahlen o, I und II in die Hauptfigur, o I bilden mit r_1 und I II mit r_2 ein Kräftedreieck. R bildet mit o II ein Kräftedreieck; überträgt man daher R parallel durch O_1 in die Hauptfigur, so schneidet R in 2 die untere Fuge, während r_1 die mittlere Fuge in 1 schneidet, 1 und 2 sind die Endpunkte der Drucklinie.

Der Schnittpunkt 2 liegt in der Entfernung $x_2 = 16$ cm von der Kante A, also fast in $1/3$ der Fuge im Kernrande. Der Schnittpunkt 1 fällt in das mittlere Drittel, s_1 wird 2,5 cm. Die senkrechten in diesen beiden Punkten wirkenden Kräfte sind aus der Figur entnommen, $S_1 = 315$ kg und $S_2 = 725$ kg, die Schubkraft $T = 320$ kg. Diese letztere sucht die Mauer vom Fundament abzuschieben.

Die Kantenpressung in A ist nach Gl. 39 S. 315, wenn das Mauerwerk keinen Zug vertragen kann,

$$k_d = \frac{2\,S_2}{300 x_2} = \frac{2 \cdot 725}{300 \cdot 16} = 0{,}3 \text{ kg.}$$

Die Druckspannung in der mittleren Fuge

$$k_d = \frac{S_1}{100 b_1}\left(1 + \frac{6 \cdot s_1}{b_1}\right) = \frac{315}{100 \cdot 44}\left(1 + \frac{6 \cdot 2{,}5}{44}\right) = 0{,}1 \text{ kg.}$$

Die Druckspannungen in den Fugen sind ohne Rücksicht auf die Kräfte E_1 und E_2, also wenn die Mauer frei stehen würde, in der mittleren Fuge

$$k_d = \frac{G_1}{4400} = \frac{287}{4400} = 0{,}07 \text{ kg auf d. qcm,}$$

in der unteren Fuge

$$k_d = \frac{G_1 + G_2}{50 \cdot 100} = \frac{616}{5000} = 0{,}12 \text{ kg.}$$

Denken wir uns das Mauerwerk frei aufliegend ohne Verbindung mit dem Boden, so findet die folgende Beziehung der gleitenden Reibung statt (s. S. 235)

$$T = \varphi\, S_2 \quad \text{oder} \quad \varphi = \frac{T}{S_2} = \frac{320}{725} = 0{,}43;$$

d. h. der Reibungskoefficient muss 0,43 überschreiten, da die Mauer sonst seitlich verschoben wird.

III. Für ein Wasserbassin ist eine Stützmauer, eine Teichmauer, herzustellen, Fig. 347, die Höhe sei $H = 5$ m, die Fundamenthöhe $H_1 = 1$ m. Das Mauerwerk habe ein Gewicht von $\gamma_1 = 2400$ kg für d. cbm. Um die nötige Stabilität zu erreichen, ist nach Gl. 79c, S. 186 Mech. Bd. I, die Mauerstärke

$$b = 18 \frac{H}{\sqrt{\gamma_1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

$$\text{folglich } b = 18 \frac{5}{\sqrt{2400}} = 1{,}8 \text{ m} \sim 2 \text{ m}.$$

Wir wollen dieses Mass auch als Kronenstärke verwenden. Die Form der Mauer ist aus dem Querschnitt, Fig. 347, zu ersehen. Wir haben die Mauer in 4 gleich hohe Teile geteilt und müssen nun den Wasserdruck für jeden Teil und das Gewicht eines jeden feststellen.

Der Wasserdruck auf die ganze Rückenfläche bc der Mauer für eine Mauerlänge von 1 m lässt sich darstellen durch den Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks $w_1\, w_2\, w_3$, dessen Basis der Höhe H gleich ist*), multipliciert mit dem Gewicht γ eines cbm Wasser.

$$W_4 = \tfrac{1}{2} \cdot 5^2 \cdot 1000 = 12500 \text{ kg}.$$

Der Wasserdruck auf die Rückenfläche der Schicht I I c d ist

$$W_3 = \tfrac{1}{2} \cdot 3{,}75^2 \cdot 1000 = 7030 \text{ kg}.$$

Für die Schicht II II c d ist

$$W_2 = \tfrac{1}{2} \cdot 2{,}5^2 \cdot 1000 = 3125 \text{ kg}$$

und für die oberste Mauerschicht wird

$$W_1 = \tfrac{1}{2} \cdot 1{,}25^2 \cdot 1000 = 781 \text{ kg}.$$

Die Angriffspunkte dieser horizontal auf die Mauer einwirkenden Kräfte $W_1\, W_2\, W_3\, W_4$ liegen in den Schwerpunkten der Dreiecke $v_1 v_1 w_2$ in S_1, für W_2 in S_2, Schwerpunkt des Dreiecks $v_2 v_2 w_2$, für W_3 in S_3, Schwerpunkt des Dreiecks $v_3 v_3 w_2$, für W_4 in S_4, Schwerpunkt des ganzen Dreiecks $w_1 w_2 w_3$.

Wir suchen nun die Schwerpunkte der entsprechenden Mauertrapeze t_1 für III III cd, t_2 für II II cd, t_3 für I I cd und t_4 für e b c d.

Die betreffenden Mauergewichte sind

$$G_1 = \frac{2{,}1 + 2}{2} \cdot 1{,}25 \cdot 2400 = 6250 \text{ kg}$$

$$G_2 = \frac{2{,}25 + 2{,}1}{2} \cdot 2{,}50 \cdot 2400 = 13100 \text{ kg}$$

$$G_3 = \frac{2{,}35 + 2{,}25}{2} \cdot 3{,}75 \cdot 2400 = 21000 \text{ kg}$$

$$G_4 = \frac{2{,}50 + 2{,}35}{2} \cdot 5{,}00 \cdot 2400 = 29500 \text{ kg}$$

Das Fundamentgewicht ist $G\,5 = 3 \cdot 1 \cdot 2400 = 7200$ kg, das letztere hat keinen Wasserseitendruck auszuhalten.

Die Kraftlinien von $G_1\, G_2\, G_3\, G_4$ und $W_1\, W_2\, W_3\, W_4$ schneiden sich in den Punkten $t_1\, t_2\, t_3\, t_4$. In einer Nebenfigur tragen wir von m

*) Näheres folgt im IV. Bd. d. Mech.

aus die Wasserkräfte W_1 W_2 W_3 W_4 und an deren Endpunkten die Gewichte $G_1 \ldots G_4$ an; die Resultierenden dieser jeweiligen Parallelogramme r_1 r_2 r_3 r_4 übertragen wir parallel durch die Schnitte $u_1\,u_2\,u_3\,u_4$ in die Hauptfigur. r_1 schneidet die Fuge der Mauerschicht III III in 1, r_2 die Schichtfuge II II in 2, r_3 trifft in 3, r_4 r_4 in 4 die Fuge eb.

Das Gewicht der Fundamentschicht G s, deren Schwerpunkt in t_0 liegt, muss mit der Kraft r_4 eine Resultierende bilden, deren Grösse r_5 wir aus dem Kräftedreieck r_4 G_5 r_5 der Nebenfigur finden; die Richtung derselben geht durch u_0, dem Schnittpunkt der Kraftlinien r_4 und G_5, sie trifft die unterste Mauerschicht af in 5.

Die in den Schnittpunkten 1, 2 ... 5 senkrecht auf die Fugen wirkenden Kräfte sind die Mauergewichte G.

Die Breiten b sind aus der Figur

$b = 2$ m; $b_1 = \text{III III} = 210$ cm; $b_2 = \text{II II} = 225$ cm;
$b_3 = \text{II II} = 235$ cm; $b_4 = \text{eb} = 250$ cm; $b_5 = \text{af} = 3$ m.

Der Schnittpunkt 1 liegt in der Mitte der Fuge; es ergiebt sich eine Druckspannung von

$$k_1 = \frac{G_1}{100\,b_1} = \frac{6250}{100 \cdot 210} = 0{,}3 \text{ kg.}$$

Im zweiten Schnitt II II greift S bezw. G_2 im Kern an, und zwar in der Entfernung $u_3\,2 = s_2 = 20$ cm von der Mitte, es findet also nur Druck in der Fuge statt, die Druckspannung ist

$$k_2 = \frac{G_2}{100\,b_2}\left(1 + \frac{6 \cdot s_2}{b_2}\right) = \frac{13\,100}{100 \cdot 225}\left(1 + \frac{6 \cdot 20}{225}\right) = 0{,}9 \text{ kg.}$$

Die Kraft G_3 in I I greift in 3 im Kernrande an, es ist I 3 $= \frac{1}{3} b_3 = \frac{1}{3} \overline{\text{I I}}$.

Die Pressung in I linksseitig ist Gl. 38 S. 314

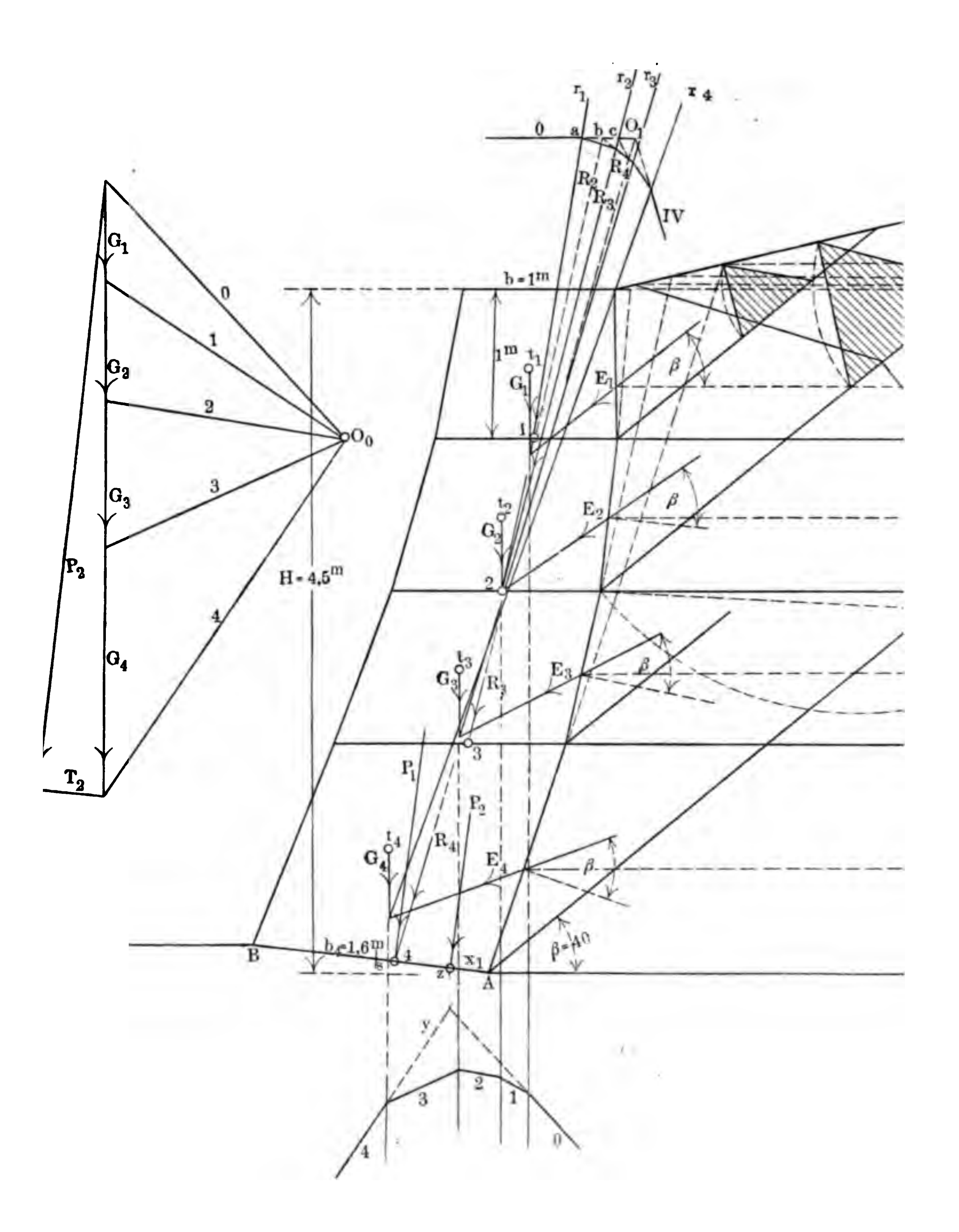
$$k_3 = \frac{G_3}{100\,b_3}\left(1 + \frac{6 \cdot \frac{1}{6} b_3}{b_3}\right) = \frac{2\,G_3}{100\,b_3} = \frac{2 \cdot 21000}{100 \cdot 235} = 1{,}8 \text{ kg.}$$

Auf der rechten Seite in I ist die Spannung Null. In der Fuge eb ist nach der Gl. S. 314, wenn eine Zugspannung zulässig ist, wenn die Mauersteine durch Bindemittel miteinander verbunden sind, die Druckspannung oder Pressung links für $s = z\,4 = 55$ cm,

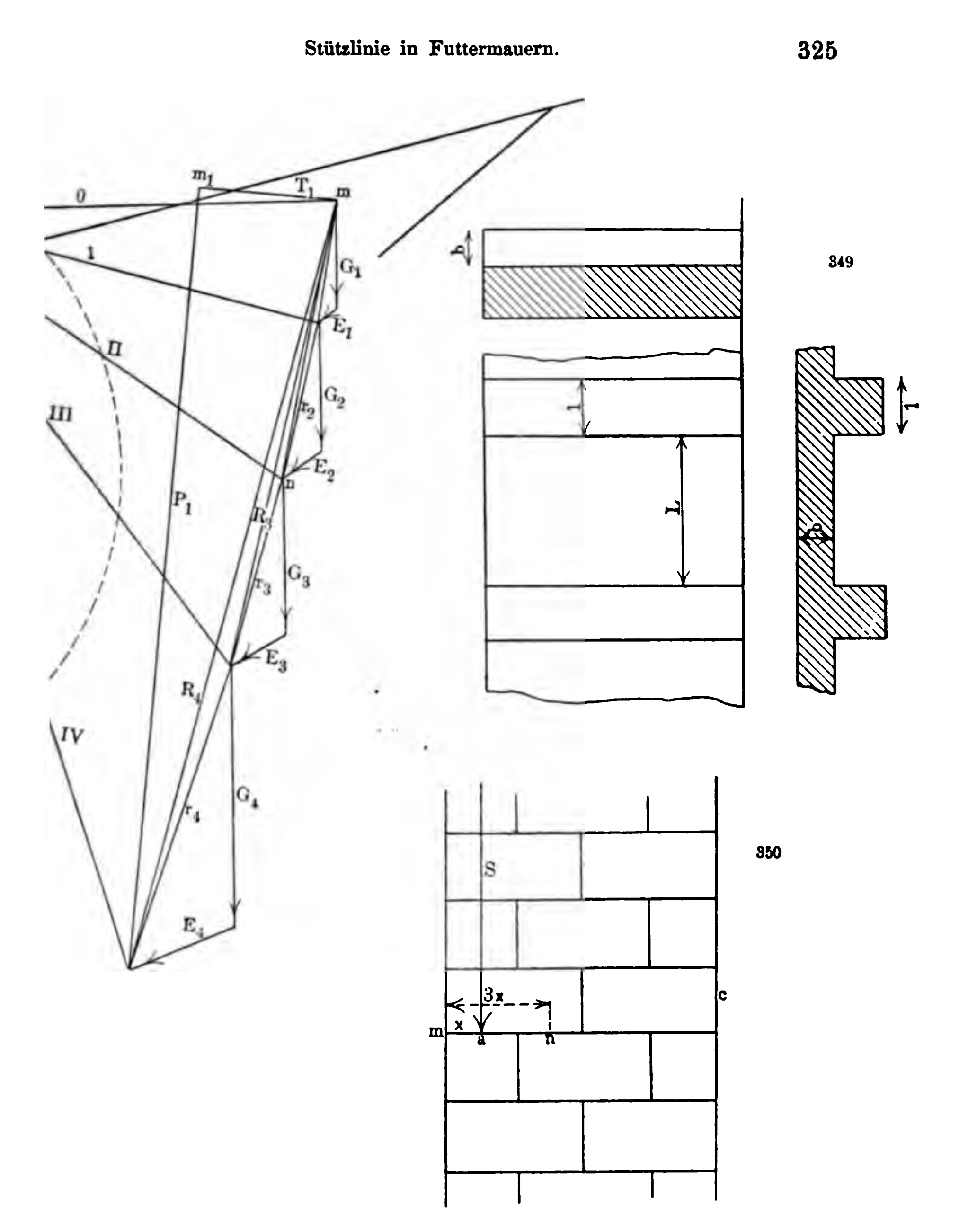
$$k'_1 = \frac{S}{100\,b_4}\left(1 + \frac{6\,s}{b_4}\right) = \frac{29\,500}{100 \cdot 250}\left(1 + \frac{6 \cdot 55}{250}\right) = 2{,}7 \text{ kg,}$$

die Zugspannung rechts

$$k_1 = \frac{29\,500}{100 \cdot 250}\left(1 - \frac{6 \cdot 55}{250}\right) \doteq -\,0{,}4 \text{ kg.}$$



r1
r2
r3
r4
0
a
b
c
O1
R2
R4
R3
IV
G1
G2
G3
G4
P2
T2
0
1
2
3
4
O0
b = 1m
1m
t1
E1
β
t2
E2
β
H = 4,5m
t3
R3
E3
β
3
P1
P2
t4
R4
E4
β
B
b = 1,6m
4
z
x1
A
β = 40
y
3
2
1
4
0


349
350
m
x
a
3x
n
c
S
L
b
1

Ist keine Zugspannung zulässig, sind die Steine ohne Bindemittel, beispielsweise nur aufeinander geschichtet, so ist die grösste Druckpressung in e für $x = e\,4 = 64$ cm,

$$k = \frac{2 \cdot 29500}{300 \cdot 64} = 3{,}1 \text{ kg}.$$

Die Kantenpressung in f ist für $x = 70$ cm

$$k = \frac{2 \cdot (G_1 + G_2 \ldots + G_5)}{300 \cdot x} = \frac{2 \cdot 36700}{300 \cdot 70} = 3{,}5 \text{ kg}.$$

IV. Es soll für trockene Dammerde eine Stützmauer hergestellt werden, Fig. 348; der Böschungswinkel ist $\beta = 40^\circ$, die Einheitsgewichte sind für das Mauerwerk $\gamma_1 = 2000$, für die Erde $\gamma = 1600$ kg für d. cbm. Die Höhe der Mauer ist $H = 4{,}5$ m, die unterste Fundamentfuge ist gegen die Horizontale um 10° geneigt. Aus der mittleren Hauptfigur ist die äussere Form der Mauer ersichtlich.

Um der Stabilität zu genügen, führen wir die Mauer mit einer Stärke von

$$b = 0{,}58 \cdot 5 \operatorname{tang}\left(45 - \frac{40}{2}\right)\sqrt{\frac{1600}{2000}} \sim 1 \text{ m}$$

aus, die wir, um möglichst geringe Spannungen zu erhalten, auf die Krone der Mauer beziehen wollen.

Wir teilen die Mauer in 4 Schichten, von denen die 3 oberen je 1 m, die untere 1,5 m Höhe hat.

Die Gewichte der einzelnen Mauerschichten sind

$$G_1 = \frac{1 + 1{,}26}{2} \cdot 1 \cdot 2000 = 2260 \text{ kg},$$

$$G_2 = 2800 \text{ kg},\ G_3 = 3400 \text{ kg},\ G_4 = 5800 \text{ kg}.$$

Die Schichten werden auf das anschliessende Terrain übertragen, und die Druckdreiecke jedesmal vom Schnitt bis zur Krone wie in Fig. 336 konstruiert. Nach der Verwandlung in die Dreiecke, den Schichthöhen entsprechend, findet man aus den Trapezen den jedesmaligen Erddruck für die betreffende Mauerschicht:

$$E_1 = 520 \text{ kg},\ E_2 = 1200 \text{ kg},\ E_3 = 1350 \text{ kg},\ E_4 = 2500 \text{ kg}.$$

Die Schwerpunkte $S_1\, S_2\, S_3\, S_4$ werden dann horizontal auf die Rückenfläche der Mauer übertragen, die Kräfterichtungen $E_1\, E_2\, E_3\, E_4$ unter $\beta = 40^\circ$ senkrecht auf die Schichtlinien eingezeichnet und die Schnittpunkte der Kräfterichtungen $G_1\, E_1$; $G_2\, E_2$; $G_3\, E_3$; $G_4\, E_4$ in der Hauptfigur gebildet. In einer Nebenfigur entwickelt man dann wieder aus dem Kräftezug $G_1\, E_1\, G_2\, E_2 \ldots$. Die Resultierenden $r_1\, r_2 \ldots$ und überträgt diese parallel durch die oben gefundenen Schnittpunkte in die

Hauptfigur. Durch den Polpunkt O ergiebt sich wieder das Seilpolygon O I II III IV, welches in die Kraftrichtungen übertragen wird.

Durch die Verlängerungen der einzelnen Seilpolygonseiten bis in die Linien o O_1 erhält man die Schnittpunkte b und c; a und O_1 sind schon vorhanden. Durch a geht die Kraft r_1 (R_1), welche die erste Fuge in 1 trifft; durch b überträgt man parallel die Resultierende $R_2 = mn$, sie trifft die zweite Fuge in 2; in unserer Konstruktionszeichnung fällt zufällig der Punkt 2 mit dem Schnittpunkt der Kräfterichtungen G_2 und E_2 zusammen.

Die Resultierenden R_3 und R_4 werden dann weiter parallel durch c und 0_1 übertragen und treffen die Fugen in 3 und 4; R_3 fällt bei uns nahezu mit r_2 in eine Linie. Die Verbindungslinie der Punkte 1, 2, 3, 4 liefert uns einen Überblick der Mittellinie des Druckes.

Die sämtlichen 4 Punkte fallen in den Kern, in das mittlere Drittel, es ist also keine Zugspannung vorhanden.

Um die in AB im Punkt 4 senkrecht wirkende Kraft P_1 festzustellen, ziehen wir in der Nebenfigur mm_1 parallel AB, und durch m_1 die Parallele P_1, sie ergiebt sich zu $P_1 = 17000$ kg.

Der Punkt 4 liegt um $s = 16$ cm rechts von der Mitte, die Breite der Fuge ist $b_4 = 1{,}6$ m $= 160$ cm, die Druckspannung in A ergiebt sich demnach zu

$$k'_1 = \frac{17000}{100 \cdot 160}\left(1 + \frac{6 \cdot 16}{160}\right) = 1{,}7 \text{ kg}.$$

Übersteigen diese Pressungen die zulässigen Werte oder schneidet die Kraft P_1 derart die Fundamentfuge, dass die Stabilität beeinträchtigt erscheint, so muss die Form der Mauer geändert werden. Werden die Pressungen sehr gering, so kann die Mauer schwächer ausgeführt werden.

Bei dieser unterschnittenen Futtermauer ist aber noch in Erwägung zu ziehen, ob die Mauer beim Aufbau auch die genügende Stabilität besitzt, und nicht während des Baues um die Kante A nach innen fällt.

Die links gezeichnete Hilfsfigur giebt uns hierüber Aufschluss. Wählen wir zu den in dieser Figur aneinander gereihten Kräften G_1 G_2 G_3 G_4 einen beliebigen Polpunkt 0_0 und konstruieren das Seilpolygon 0 1 2 3 4 hier unterhalb der Hauptfigur, so liefert uns yz die Schwerlinie, unter der die Mittelkraft der Gewichte G wirkt; sie schneidet die Fuge AB in z. Die in diesem Punkte senkrecht wirkende Kraft $P_2 = 14100$ kg ergiebt sich aus der Hilfsfigur rechts, indem man die beiden Parallelen T_2 parallel AB und $P_2 \parallel P_2$ zieht. $T_2 = 1500$ kg ist die Seitenkraft der alleinstehend ge-

dachten Mauer in der Richtung von AB, während aus der rechten Hilfsfigur $T_1 = 3000$ kg die gesamte Schubrkaft ist.

Entnimmt man $x_1 = Az = 25$ cm aus der Zeichnung, so lässt sich die Pressung in A aus $k = \frac{2 \cdot P_2}{300 \cdot x_1}$ berechnen, welche die Mauer für sich allein ausübt; man findet $k = \frac{2 \cdot 14100}{300 \cdot 25} = 3,7$ kg, also grösser wie oben, weil in obigem Falle die Erdschicht entgegendrückt.

Man pflegt, um bei ausgedehnten Futtermauern an Material zu sparen, die Mauer verhältnismässig schwächer auszuführen, aber die Mauerfront in bestimmten möglichst gleichen Abständen mit **Strebepfeilern** zu versehen, Fig. 349 S. 325. Die letzteren sollen ein Kanten der gesamten Mauer verhindern. Die zwischen den Pfeilern stehende Mauer kann wohl an der Grenze der Standsicherheit liegen, sie muss aber wenigstens so stark sein, dass sie weder von dem Erddruck verschoben, noch dass sie an der Bodenfuge abgebrochen wird; die zulässige Biegungsspannung soll jedoch 1 bis 1,5 kg auf d. qcm nicht überschreiten.

Es sei, Fig. 351, ABCD eine Stützmauer, welche dem Erddruck E Widerstand leisten soll, G ist das Gewicht der Mauer. Die Resultierende R beider veranlasst unter allen Umständen ein Kanten um D. Um wieder die nötige Stabilität zu erreichen, verstärken wir das Mauerwerk um ED, dann fällt R in den Kern. Oder wir nehmen eine neue Resultierende R_1 an, welche innerhalb AD liegt, aber in einer solchen Entfernung, x von D, dass eine gewisse Druckspannung

$$k = \frac{2\,S}{300\,x} \text{ nicht überschritten wird.}$$

Damit nun R_1 mit R wieder das Gleichgewicht erreichen, muss eine Horizontalkraft T ermittelt werden, welche als Biegungskraft ein Moment bildet, welches die Mauer im Querschnitt AC abzubrechen sucht; damit dies nun nicht geschieht, werden Pfeiler angeordnet, die dieser Kraft Widerstand leisten. Der Mauerquerschnitt wird nach obigem Moment berechnet, und zwar unter Zugrundelegung der Formel $M = k_b\,W$.

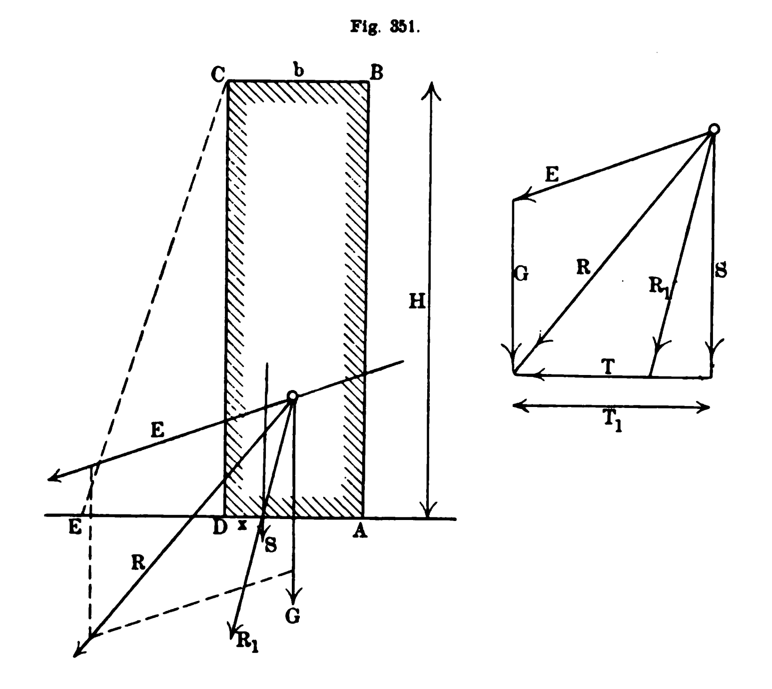
Trägt man ein Kräftepolygon mit E, G, R auf und überträgt R_1 aus der Hauptfigur, so ergiebt sich leicht die Horizontalkraft T, ebenso auch die senkrechte Fugenkraft S und die Schubkraft T_1; die letztere bewirkt wieder eine Verschiebung bezw. Abscherung der Mauer vom Fundament.

Damit nun die Mauer für sich allein gegen Abbruch gesichert ist, muss der Bedingung Genüge geleistet werden

$$\frac{T L \cdot L}{8} = k_b \frac{H b^2}{6},$$

in dieser Gleichung bezieht sich die Kraft T auf 1 m Länge, sonach T L kg auf L m lfde. Mauerlänge, welch letztere in Fig. 349 angedeutet ist.

Fig. 351.



Aus obiger Gleichung ergiebt sich

$$L = 2 b \sqrt{\frac{H k_b}{3 T}}, \quad \text{bezw. } k_b = \tfrac{3}{4} \frac{T}{H} \left(\frac{L}{b}\right)^2 \quad . \; . \; . \quad (41)$$

Letztere Formel dient zur Feststellung der Spannung, und zwar kann k_b hier nur die Zugspannung des Materiales bedeuten, welche die obige Grenze S. 328 nicht erreichen darf.

Will man noch Rücksicht auf die Querkraft nehmen, welche die Mauerquerschnitte 2 b H abscheren würde, so ist der Gleichung $T L = K_s 2 b H$ Genüge zu leisten; aus dieser folgt

$$k_s = \tfrac{1}{2} \frac{T L}{b H}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (42)$$

wenn k_s die zulässige Schubspannung, $k_s \overline{<} 1$ kg auf d. qcm, bedeutet.

Die weiteren Untersuchungen beziehen sich dann auf den Pfeiler, ob dieser standsicher ist und wie gross die Maximalspannungen, bezw. Pressungen in demselben werden können.

I. Es soll beispielsweise, Fig. 352, eine Futtermauer von $H = 5$ m Höhe und $b = 1$ m Stärke untersucht, und sollte sie sich nicht stabil und fest genug erweisen, durch Strebepfeiler verstärkt werden. Das Einheitsgewicht des Mauerwerkes ist $\gamma_1 = 2000$ kg, das des Materiales 1600 kg, der Böschungswinkel $\beta = 30°$. Das Druckdreieck ergiebt auf 1 m lfde. Mauer 4 qm Inhalt, somit ist der Erddruck

$$E = 4 \cdot 1600 = 6400 \text{ kg.}$$

Das Gewicht der Mauer ist $G = 5 \cdot 1 \cdot 2000 = 10000$ kg.

Es sollen nun die Spannungen $k_d = 4$ kg und $k_z = 1{,}5$ kg nicht überschritten werden; danach ist die weitere Konstruktion zu richten. Man trägt die Mauer ABCD auf, E wirkt in $^1/_3$ der Höhe und schneidet die Schwerlinie der Mauer in s. Das Kräftepolygon, Fig. 353, ergiebt die Resultante R, welche die Kante A in der Hauptfigur überschneidet, man hat nur nötig, R parallel durch s zu übertragen. Um die Mauer standsicher herzustellen, sind Strebepfeiler erforderlich. Das Kräftepolygon ergiebt durch die senkrechte Linie S und den horizontalen Abschluss mit R_1 $S = 13200$ kg. Da nun $k_d \gtreqless 4$ kg, so ergiebt sich aus Gl. 39a S. 315

$$x = \frac{2\,S}{300\,k} = \frac{2 \cdot 13200}{300 \cdot 4} = 22 \text{ cm,}$$

trägt man diese von der Kante A nach z, so ist die Richtung R_1 gegeben; diese überträgt man parallel in die mittlere Fig. 353 und findet dann die horizontale Kraft $T = 2650$ kg aus der Zeichnung.

Aus Gl. 41 der vorigen Seite berechnen wir hiernach die Länge L der Mauer

$$L = 2\,b\sqrt{\frac{H\,k_b}{3\,T}} = 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{\frac{5 \cdot 15000}{3 \cdot 2650}} = 6{,}1 \text{ m.}$$

In die letzte Formel musste K_b bezw. $k_z = 1{,}5$ kg auf d. qcm in Metermass, also auf d. qm eingeführt werden.

Die Breite des Strebepfeilers wollen wir $l = 2$ m annehmen, dann ist die Horizontalkraft T_0 auf diese Breite reduziert

$$T_0 = \frac{T\,L}{l}, \text{ in unserem Falle } T_0 = \frac{2650 \cdot 6{,}1}{2{,}0} = 8100 \text{ kg.}$$

E und T_0 greifen in der Schwerlinie G der Mauer an, und bilden

die Resultierende r, die sich aus einem Kräftepolygon aus Fig. 354 rechts oben ergiebt.

Wir haben nun einen Pfeiler angenommen von $b_0 = 2{,}6$ m unterer und 1,8 m oberer Stärke, dessen Gewicht wird

$$G_0 = 2 \cdot 5 \cdot \frac{1{,}8 + 2{,}6}{2} \cdot 2000 = 44000 \text{ kg},$$

dessen Schwerlinie geht durch s_0, dem Schnittpunkt von r und G_0. Die beiden letzteren Kräfte bilden, wie aus Fig. 354 zu entnehmen, die Resultierende R_0, welche wir durch s_0 übertragen; die kleinere Zeichnung Fig. 354 ergiebt, dass z_0 in den Kern fällt, in das mittlere Drittel, es ist also nur Druck vorhanden, welcher sich aus

$$k_0 = \frac{S_0}{100 b_0}\left(1 + \frac{6 s}{b_0}\right)$$

berechnen lässt. Den Wert $S_0 = 47000$ entnimmt man aus (d), ebenso $s = 18$ cm und findet

$$k_d = \frac{47000}{100 \cdot 260}\left(1 + \frac{6 \cdot 18}{260}\right) = 2{,}5 \text{ kg}.$$

Bei den angenommenen Strebepfeilerdimensionen ist also $k_d = 4$ kg noch nicht erreicht.

Bei geringerer Stärke, also auch kleinerem Gewicht, G_0 würde vielleicht R_0 ausserhalb des Kernes, sagen wir nach z_1, gefallen sein, man würde dann die betreffende Entfernung x_1 von der Kante messen und die Spannung k aus

$$k = \frac{2 S_0}{300 x_1}$$

berechnen, welche dann auch $k_d = 4$ kg nicht übersteigen darf.

Mauerbelastungen.

Ist eine Mauer gleichmässig verteilt belastet, so lässt sich ihre Flächenausdehnung nach dem gleichmässig verteilten Flächendruck und der zulässigen Druckspannung auf die Quadrateinheit berechnen. Tritt eine ungleichmässig verteilte Belastung, eine excentrische Belastung ein, so kommen auch hier die im vorigen Beispiel angeführten Regeln in Betracht.

Fig. 352, 353 und 354.

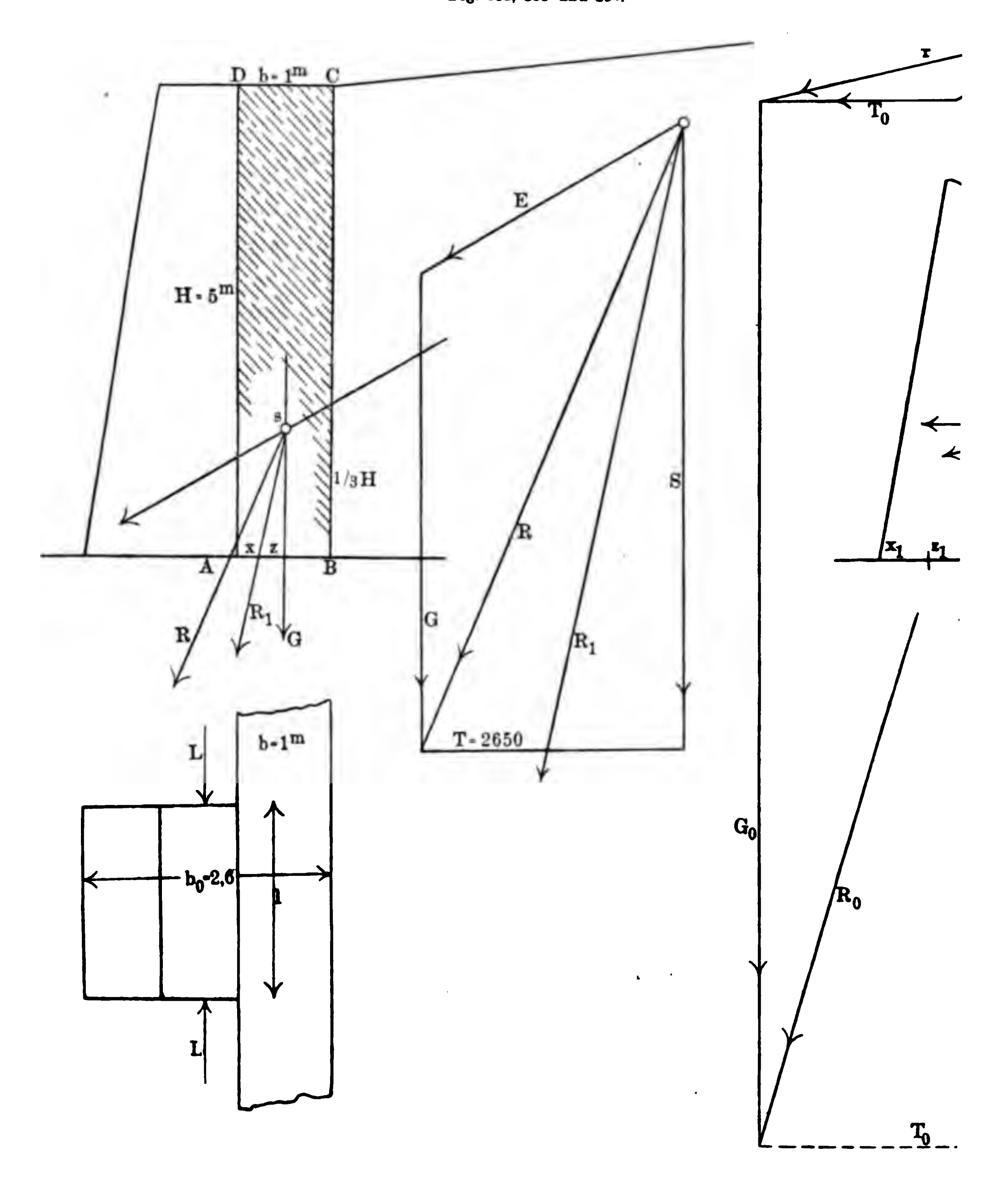
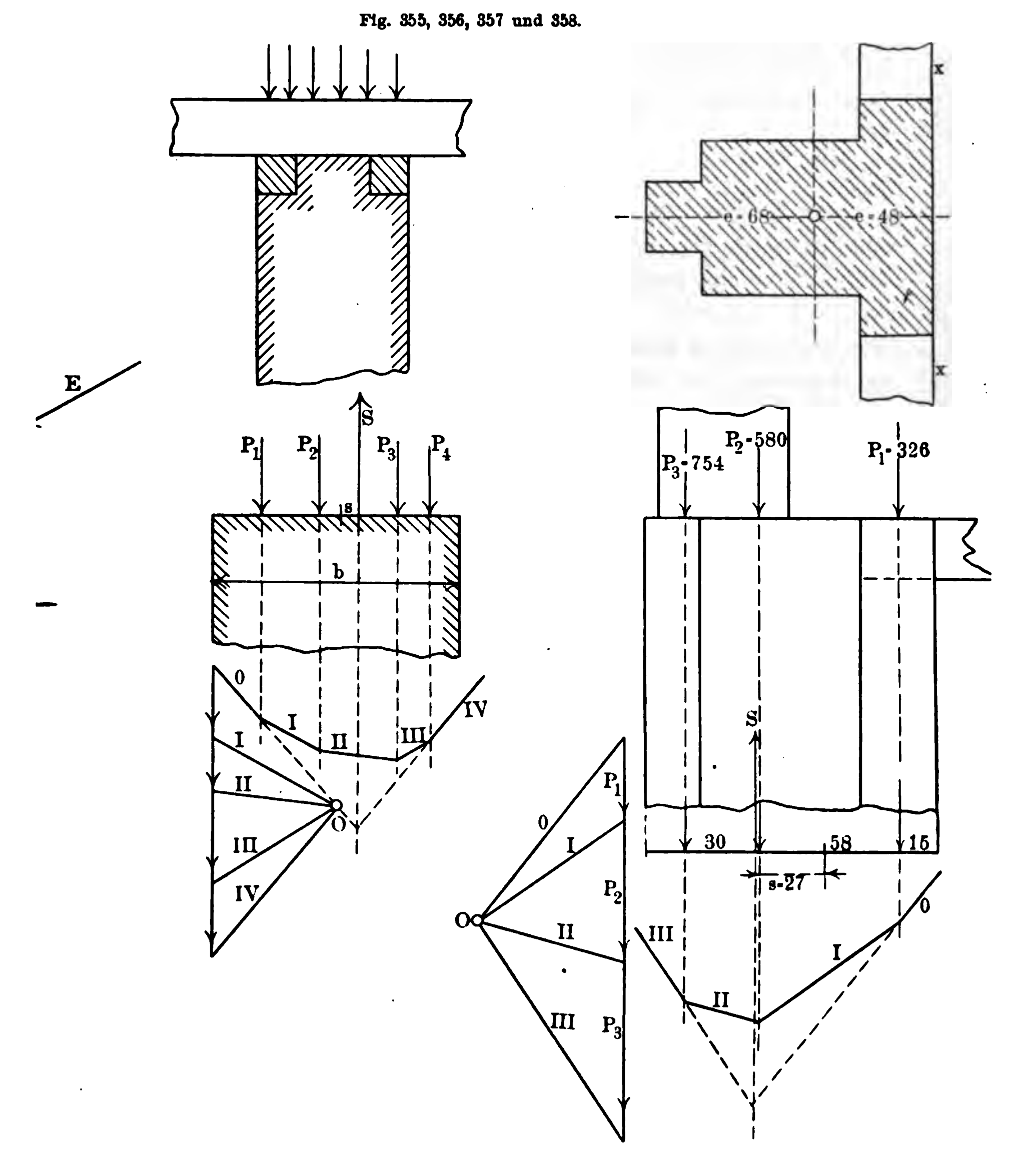


Fig. 355, 356, 357 und 358.



Die Mauer, Fig. 355, ist durch die senkrecht wirkenden Kräfte $\Sigma P = Q$ gleichmässig, symmetrisch belastet, die zulässige Druckspannung liefert die Formel (vergl. S. 311)

$$k_d = \frac{Q}{f} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (a)$$

Der Pfeiler, Fig. 356 unterhalb der Mauer, mit rechteckigem Querschnitte ist durch verschieden grosse senkrechte Kräfte belastet. Wir stellen ein Seilpolygon her und finden, dass die Mittelkraft S um s von der Mitte abweicht. Fällt sie in den Kern, so findet nur Druckverteilung statt und es kommt die zweite der Gleichungen 36, S. 314, für die Kantenpressung in Betracht

$$k_d = \frac{S}{100\,b}\left(1 + \frac{6\,s}{b}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (b)$$

Fällt S in die Kerngrenze, so berechnen wir die Kantenpressung nach Gl. 38

$$k_d = \frac{2\,S}{100\,b} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (c)$$

Fällt S ausserhalb des Kernes und sind Zugspannungen zulässig. d. h. ist das Mauerwerk mit einem genügenden Bindematerial hergestellt, so rechnen wir die Zugspannung in der Kante nach der ersten der Gl. 36

$$k_z = \frac{2\,S}{100\,b}\left(1 - \frac{S\,s}{b}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (d)$$

Ist das Bindematerial aber schlecht, so dass es sofort bei Zugspannungen nachgiebt, die Steine als einfach aufeinander geschichtet angesehen werden müssen, so verteilt sich der Druck nur auf die Flächenlänge 3 x, wenn x die Entfernung von der Kante ist; die Druckspannung ist sodann nach Gl. 39

$$k_d = \frac{2\,S}{300\,x} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (e)$$

Hierbei kann es eintreten, dass k sehr gross wird, wenn ev. x klein ist, dann muss man bei Annahme von einem Maximalwert für k, x berechnen nach

$$x = \frac{2\,S}{300\,k} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (f);$$

unter Umständen kann dann eine andere Kräftelage erforderlich werden, oder eine Änderung der Verteilung der Kräfte. Die Kraft S wird in c, s. Fig. 350 S. 325, eine Zugspannung veranlassen; kann aber die Fuge c keinen Widerstand leisten, so muss von Zug abgesehen werden, dann

muss der Teil mn der Fuge den ganzen Druck übernehmen, wird dieser zu gross, so muss S verlegt werden. —

Wenn nun in den Fig. 357 u. 358, S. 333 ein nach einer Ausdehnung unsymmetrischer Körperquerschnitt vorliegt, so ist es erforderlich, zunächst den Schwerpunkt zu suchen; durch ein Seilpolygon stellt man die Mittelkraft der parallelen Kräfte fest und entnimmt den Wert s, die Entfernung des Angriffspunktes der Mittelkraft vom Schwerpunkt.

Berechnet man nun ferner die Widerstandsmomente

$$W_e = \frac{J}{e} \text{ und } W_{e1} = \frac{J}{e_1} \quad \ldots\ldots\ 43$$

wenn J das Trägheitsmoment des Querschnittes und e und e_1 die Entfernungen der neutralen Faser (s. Bd. II, S. 77 u. f.), so sind die zulässigen Spannungen, wenn f der Querschnitt,

$$k_1 = \frac{S}{f} - \frac{S\,s}{W_e} \text{ Zugspannung.}$$

$$k_1' = \frac{S}{f} + \frac{S\,s}{W_{e1}} \text{ Druckspannung.}$$

Hierbei haben wir angenommen, dass die Summe der Kräfte $S = \Sigma P$ links vom Schwerpunkt angreift.

Beispiel. I. In Fig. 356 ist die Summe der 4 Kräfte S = 12000 kg; b = 100 cm; s = 10 cm; man erhält somit als zulässige Druckspannung, weil S in den Kern fällt,

$$k_1' = \frac{12000}{100 \cdot 100}\left(1 + \frac{6 \cdot 10}{100}\right) = 2 \text{ kg.}$$

II. Die Kräftesumme in Fig. 358 ist S = 1660 kg. Nach den eingetragenen Dimensionen ergiebt sich als Querschnitt die Fläche:

$$f = 30 \cdot 95 + 63 \cdot 64 + 28 \cdot 23 = 7526 \text{ qcm.}$$

Das Trägheitsmoment haben wir durch Rechnung festgestellt, zunächst haben wir dasselbe auf die xxachse bezogen, dann auf die Schwerpunktsachse reduziert (s. Bd. I, S. 322):

$$J^{(cm)} = \tfrac{1}{3}(35 \cdot 30^3 + 35 \cdot 94^3 + 26 \cdot 116^3) - 7526 \cdot 48^2 = 6193008;$$

die sich hiernach ergebenden Widerstandsmomente sind

$$W_{e1} = \frac{J}{e_1} = \frac{6193008}{68} = 91073 \text{ und}$$

$$W_e = \frac{6193008}{48} = 129021.$$

Aus der Zeichnung ergiebt sich nun der Abstand s zu 27 cm; man kann dann die zulässigen idealen Spannungen berechnen, und findet

$$k'_1 = \frac{1660}{7526} + \frac{1660 \cdot 27}{91073} = 0{,}22 + 0{,}49 = 0{,}71 \text{ kg}$$

auf d. qcm Druck und

$$k_1 = \frac{1660}{7526} - \frac{1660 \cdot 27}{129021} = 0{,}22 - 0{,}35 = 0{,}13 \text{ kg Zug.}$$

Diese Spannungen lassen allerdings noch Querschnittsverringerungen zu.

C. Die Darstellung der Momente.

1. Graphomathematisches Verfahren.

Auf einen Balken oder Träger, Fig. 359, wirken verschiedene Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4; durch Vermittelung des Seilpolygones finden wir die Auflagerreaktionen A und B, indem wir die Schlusslinie i in Fig. 359 nach Fig. 360 übertragen. Das Moment in Punkt m_1 ist $M = A\,x_1$. Um dasselbe graphisch darzustellen, ist eine Multiplikation erforderlich; man trägt, Fig. 361, A und von demselben Punkt eine Einheit ab, ebenso die Länge x_1, durch Konstruktion der ähnlichen Dreiecke findet sich, wie uns aus dem Früheren bekannt, $M = A\,x_1$.

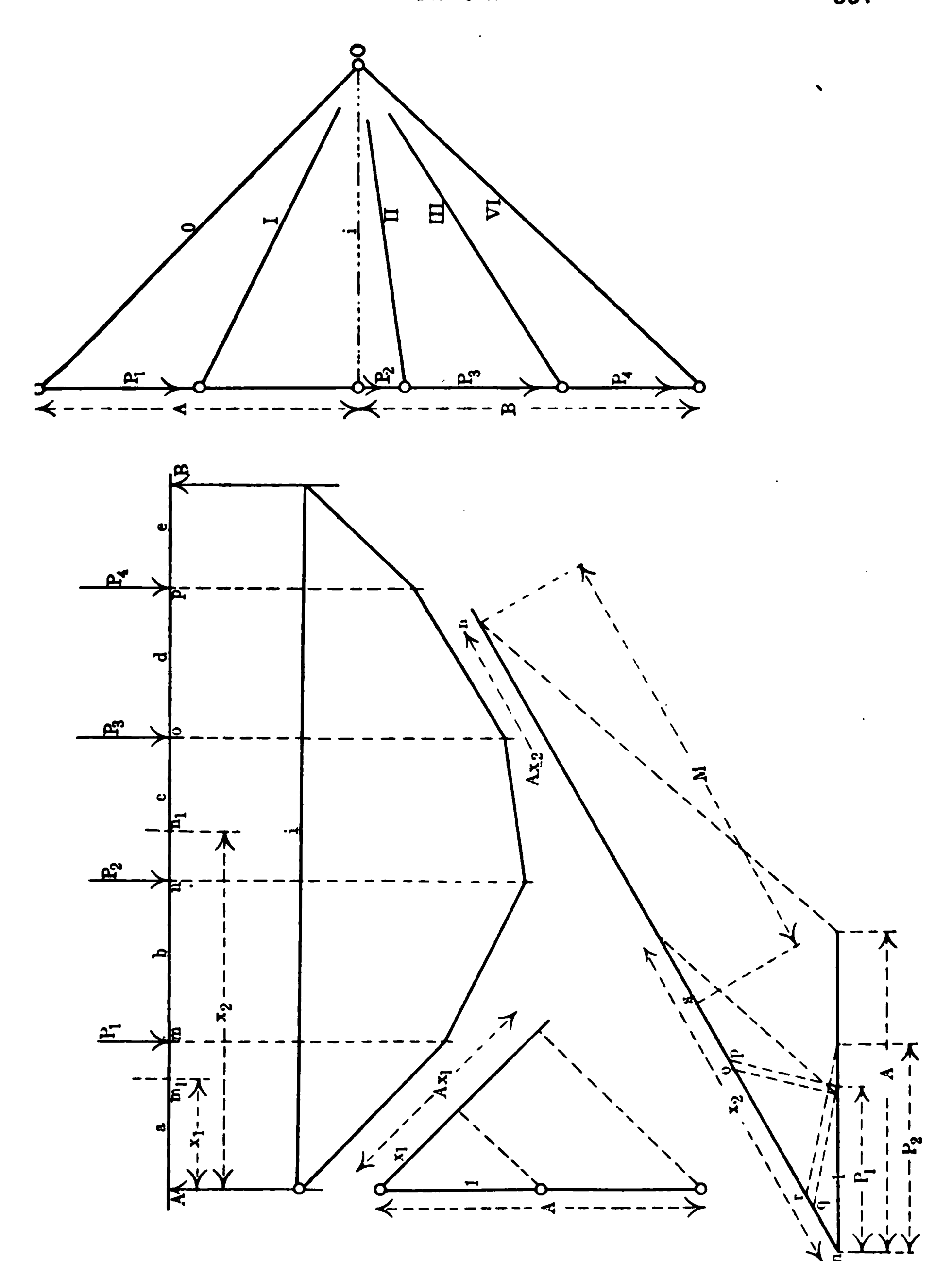
Das Moment in n_1 ist

$$M = A\,x_2 - P_1\,(x_2 - a) - P_2\,[x_2 - (a + b)];$$

die graphische Rechnung ist in Fig. 362 ausgeführt.

Man bildet sich zunächst das Produkt $A\,x_2 = mn$; hierauf die Produkte $P_1\,(x_2 - a)$ und $P_2\,[x_2 - (a + b)]$, die graphisch-algebraische Subtraktion liefert M.

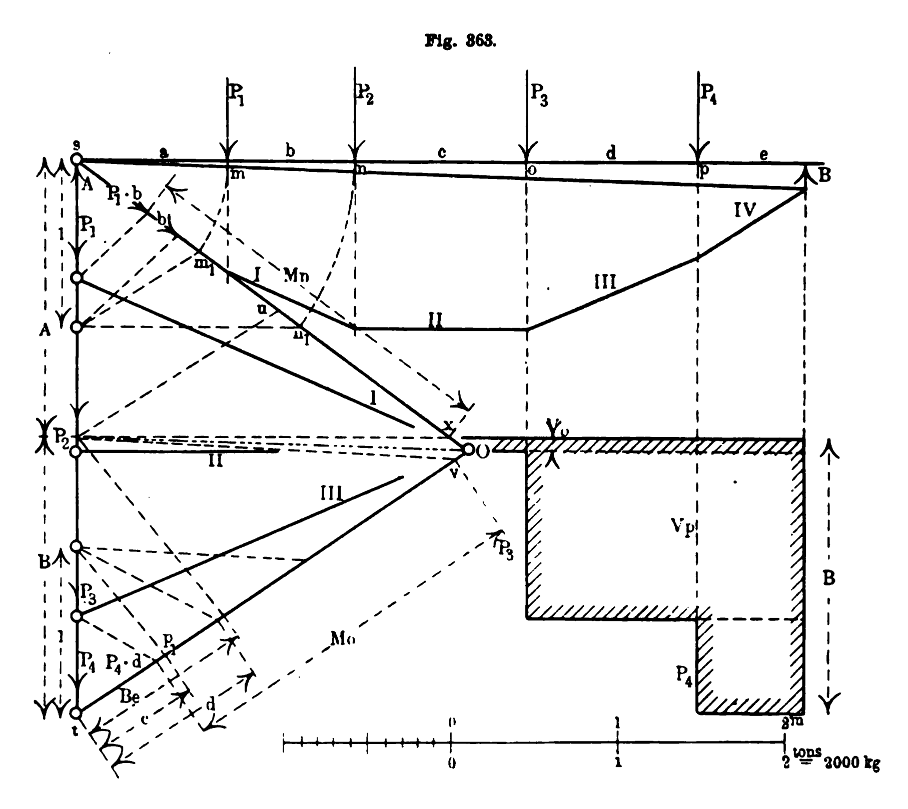
Das Produkt $A\,x_2$ ergiebt sich, indem man von m die Einheit, x_2 und A aus Fig. 360 und 359 anträgt, die ähnlichen Dreiecke liefern mn. Ferner überträgt man $x_2 - a = mn_1$ aus Fig. 359 nach mo, Fig. 362, ebenso P_1, es ergiebt sich $mp = P_1\,(x_2 - a)$, ebenso P_2 von m und $nn_1 = x_2 - (a + b)$ nach mq, Fig. 362, übertragen, liefern durch die graphische Multiplikation das Produkt $mr = P_2\,[x_2 - (a + b)]$, mo zu


O
0
I
i
II
III
VI
P_1
P_2
P_3
P_4
A
B
a
b
c
d
e
m
n
o
p
x_1
x_2
Ax_1
Ax_2
M
1

mr addiert, giebt ms, sonach ist die Längendifferenz mn — ms = sn = M das gesuchte Moment in n, Fig. 362.

Wie uns bekannt, benötigen wir meist nur die Momente in den Angriffspunkten der Kräfte, also in m, n, o und p, dadurch vereinfacht sich das graphische Verfahren, wie aus Fig. 363 ersichtlich.

Fig. 363.



Aus dem beigefügten Massstabe sind die gegebenen Kräfte P_1 bis P_4 und deren Abstände a bis e zu entnehmen. Mit einem beliebigen Polpunkt O konstruiert man zunächst durch das Seilpolygon o, I..IV die Auflagerdrücke A und B. In das Kräftepolygon, bezw. hier in die Kraftlinie st trägt man von den Endpunkten s und t aus die Einheiten an. Die Momente in m und p sind $M_m = Aa$ und $M_p = Be$. Um diese beiden graphischen Multiplikationen auszuführen, schlagen wir die Länge a nach sm_1 und übertragen e nach tp_1, durch Konstruktion der ähnlichen Dreiecke finden wir $M_m = su$ und $M_p = Be$, letzteres Moment ist von t an abzugreifen. Das Moment in n ist $M_n = A(a + b) - P_1 b$.

Die letztere Multiplikation ergiebt sich durch Übertragung der Länge b von s aus, P_1 und die Einheit verwendet man unmittelbar aus der Kraftlinie, das Produkt $P_1 b$ wird dann von s aus abgegriffen.

Man schlägt dann ferner sn nach sn_1, verbindet n_1 mit dem Endpunkt der Einheit und findet durch die Parallele durch A den Punkt x, es ist dann $sx = M_n$; die Konstruktion für M_o von t aus ist die gleiche.

Die angenommenen Druckkräfte sind

$$P_1 = 700,\ P_2 = 1040,\ P_3 = 1000,\ P_4 = 580 \text{ kg},$$

die Längen

$$a = 0{,}91,\ b = 0{,}78,\ c = 1{,}03,\ d = 1{,}03,\ e = 0{,}65 \text{ m},$$

die Auflager A und B sind zufällig gleich gross $A = B = 1660$ kg.

Die Momente ergeben die Längen

$$su = M_m = 1510 \text{ kg},\ M_p = Be = 1080 \text{ kg},$$
$$M_n = 2250 \text{ kg},\ M_o = 2140 \text{ kg}.$$

Die vertikalen Kräfte, auf deren besondere Verwertung wir noch weiter unten zurückkommen werden, haben wir für den halben Träger in derselben Weise wie bereits in Band I, S. 114 aufgetragen; das grösste Moment fällt nach n, dem Angriffspunkt der Kraft P_2.

Man erhält $V_m = A - P_1 = 1660 - 700 = + 960$ kg;

$$V_n = A - (P_1 + P_2) = 1660 - 1740 = - 80;$$
$$V_o = B - (P_4 + P_3) = 1660 - 1580 = + 80;$$
$$V_p = B - P_4 = 1660 - 580 = + 1080 \text{ kg}.$$

V_e und V_p sind in Fig. 363 eingezeichnet.

2. Die Momentenfläche.

Zur Bestimmung der Momente wird das vorstehende graphomathematische Verfahren vielleicht nur dann eingeschlagen, wenn es sich um Ermittelung eines bestimmten Moments handelt, oder um eine Kontrolle zu erhalten, oder wenn die Auflagerreaktionen bereits bekannt sind; indem, wie wir gleich sehen werden, das Seilpolygon unmittelbar verwendet werden kann.

In unseren früheren analytischen Betrachtungen im I. Bd. d. Mech. S. 114 u. f. berechneten wir zunächst die Auflagerdrücke A und B, hiernach die Momente in den einzelnen Kräfteangriffspunkten m, n, o, p, Fig. 364; die Zahlenwerte der Momente trugen wir in einem passenden Massstab, wir haben der Fig. 364 einen solchen beigefügt, oberhalb der Balkenachse auf, und erhalten einen Linienzug (die Momente stellen sich hier als Gl. I. Grades dar), der uns eine Übersicht über sämtliche Mo-



Fig. 364, 365 und 366.

mente darstellt; bei gleichmässig verteilter Belastung geht der gebrochene Linienzug in eine Parabel (s. Bd. I S. 110) über.

Wir haben nun, Fig. 365 und 366 für dieselben Kräfte

$$P_1 = 620,\ P_2 = 550,\ P_3 = 830,\ P_4 = 580 \text{ kg}$$

ein Seilpolygon konstruiert, um A und B zu erhalten; der Polpunkt ist zwar beliebig, aber in einer noch näher zu bestimmenden Entfernung von ab angenommen. Wir haben dann ferner das Seilpolygon 0, I, II, III, IV, i in die Achse AB übertragen, so dass die Schlusslinie $i_1 = AB$ mit der Achse zusammenfällt. Wir können dies erreichen, wenn wir, wie auf S. 262, Fig. 297, die Linien (Ordinaten) s .... nach s_1, t, u ... übertragen. Berücksichtigen wir aber, dass die Auflager A und B für jeden Polpunkt dieselben Werte erhalten müssen, dass also jedesmal bei übertragener Schlusslinie der Punkt c resultieren muss, so haben wir nur nötig, in c eine Senkrechte 0_1c zu errichten und auf dieser den Polpunkt O_1 in der gleichen senkrechten Entfernung f anzunehmen, in diesem Fall erhalten wir durch die ähnlichen Dreiecke infolge der parallelen Seilstrahlen die gleichen Längen, bezw. Ordinaten $s = s_1$ u. s. w.; sie werden grösser bei näher gerücktem und kleiner bei weiter abstehendem Polpunkte. In Fig. 365 sind die Polstrahlen für die Achsenschlusslinie $i_1 = AB$ und den Polpunkt O_1 ausgeführt. Übertragen wir nun den Polpunkt O_1 in Fig. 364 entgegengesetzt nach O_0 und zwar mit der gleichen Entfernung f, ziehen die Polstrahlen 0, 1, 2, 3, 4 und übertragen diese parallel in die Hauptfigur von A aus oberhalb der Achse, so fallen sie mit den berechneten und aufgetragenen Momenten zusammen, wenn f mit derselben Einheit angenommen wurde, mit welcher die berechneten Werte aufgetragen wurden. Die Linien s, s_1, t, u ... liefern uns somit die Momente unmittelbar aus dem Seilpolygon, man nennt sie Momentenordinaten und die Flächen A_1I II ... B_1, A I_1 II_1 III_1 ... B_1 Momentenflächen.

Die berechnete Momentenfläche A 1 2 3 ... B in Fig. 364 ist sonach das Spiegelbild der konstruierten Momentenfläche A I_1 II_1 ... B mit in die Achse fallender Seilpolygonschlusslinie.

Das Moment im ersten Angriffspunkt m der Kraft P_1 ist $M_m = Aa = Va$, weil, wie uns bekannt, die Vertikalkraft hier dem Auflager gleich ist.

Aus dem Parallelismus der Seilpolygonseiten mit den Polstrahlen folgt die Ähnlichkeit der Dreiecke

$\triangle\, O_0\, b\, c \sim A\, m\, q$, Fig. 364 und

$\triangle\, O_1\, b\, c \sim A\, m_1\, q_1$, Fig. 365 und 366; wonach

$s_1 : a = A : f$ und $s_0 : a = A : f$, folglich
$Aa = f s_1 = f s_0$.

Für $f = 1$ ergiebt sich $M_m = Aa = s = s_1 = s_0$.

Das Moment ist das Produkt der Seilpolygonordinate mit dem Polabstand.

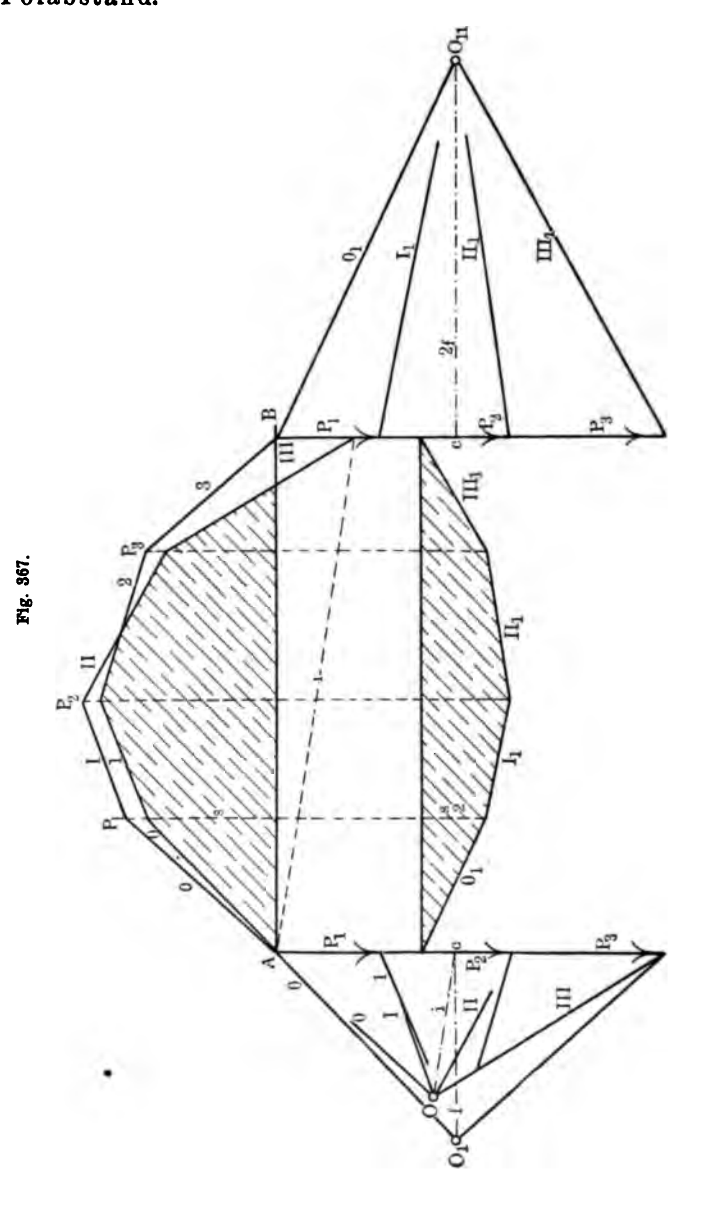


Fig. 367.

Der Massstab des letzteren ist massgebend und sind die Momentenordinaten in demselben Verhältnis zu vergrössern oder zu verkleinern, wie der Polabstand ab- oder zunimmt.

In Fig. 367 haben wir für den beliebigen Polpunkt O das Seilpolygon O I II III oberhalb AB konstruiert, die Auflager sind durch den Schnittpunkt c bestimmt, in c haben wir eine Senkrechte in der Entfernung f errichtet und mit dem Polpunkt O_1 das Seilpolygon 0 1 2 3 konstruiert, dessen Schlusslinie in AB fällt. Nimmt man nun in der Entfernung 2 f den Polpunkt $O_{,,}$ an und konstruiert das Seilpolygon O_1 I_1 II_1 III_1, so sind dessen Ordinaten halb so gross wie die obigen, um die richtigen Momente für $f = 1$ zu erhalten, ist für diese Ordinaten eine Multiplikation mit 2 erforderlich.

In den folgenden Figuren haben wir wiederum einen Träger auf zwei Stützen mit mehreren Kräften belastet, es kommt uns aber hier darauf an, durch Vermittelung des Seilpolygones den Nachweis zu liefern, dass das Moment auch durch das Produkt aus der Seilpolygonordinate und dem Polabstand bestimmt ist, wenn es sich darum handelt, das Moment innerhalb der Kräfte festzustellen.

Wir haben zunächst wieder das Seilpolygon für einen beliebigen Polpunkt O, Fig. 368, konstruiert, die Schlusslinie i liefert uns die Auflager. Es soll nun das Moment im Schnitt x x ermittelt werden, x x liegt innerhalb der Kräfte P_1 und P_2 im Punkt p der Achse.

Die vertikale Kraft V (Querkraft, Transversalkraft) innerhalb A m ist $V = A$ innerhalb m n, also auch in p ist sie, wie auch aus Fig. 364 zu ersehen, um P_1 kleiner, $V = A - P_1$; das Moment in p ist

$$M_p = Ax_1 - P_1 \lambda.$$

Die Differenz $A - P_1 = V$ lässt sich unmittelbar aus Fig. 369 entnehmen, sie wird durch die Linie ce dargestellt.

Denken wir uns nun V in der Entfernung s von p wirken, so entsteht in p Gleichgewicht, wenn $Vs + P_1 \lambda = A x_1$. V ist nun die Mittelkraft zu A und P_1, somit die Kraft im Angriffspunkte des Schwerpunktes S (der Buchstabe S unterhalb u ist in der Fig. zu ergänzen), und s ist die Entfernung dieser Mittelkraft, das ist der Schwerpunktsabstand von einer in p gedachten Achse, wie wir solche bei Bestimmung des Schwerpunktes von Linien, Flächen und Körpern im Band I, S. 84 u. f. angenommen haben. Den Schwerpunkt S finden wir durch Verlängerung der äussersten Polstrahlen; für $V = ce$ sind I und i die Polstrahlen, verlängert man dieselben im Seilpolygon, Fig. 368, so schneiden sie sich in S.

Aus obiger Schwerpunktsgleichung folgt nun $Vs = Ax_1 - P_1 \lambda$, das ist aber das Moment in p; errichten wir in O eine Senkrechte $f = Od$, so ist das Dreieck ecO, dessen Höhe f darstellt, dem Dreieck von der

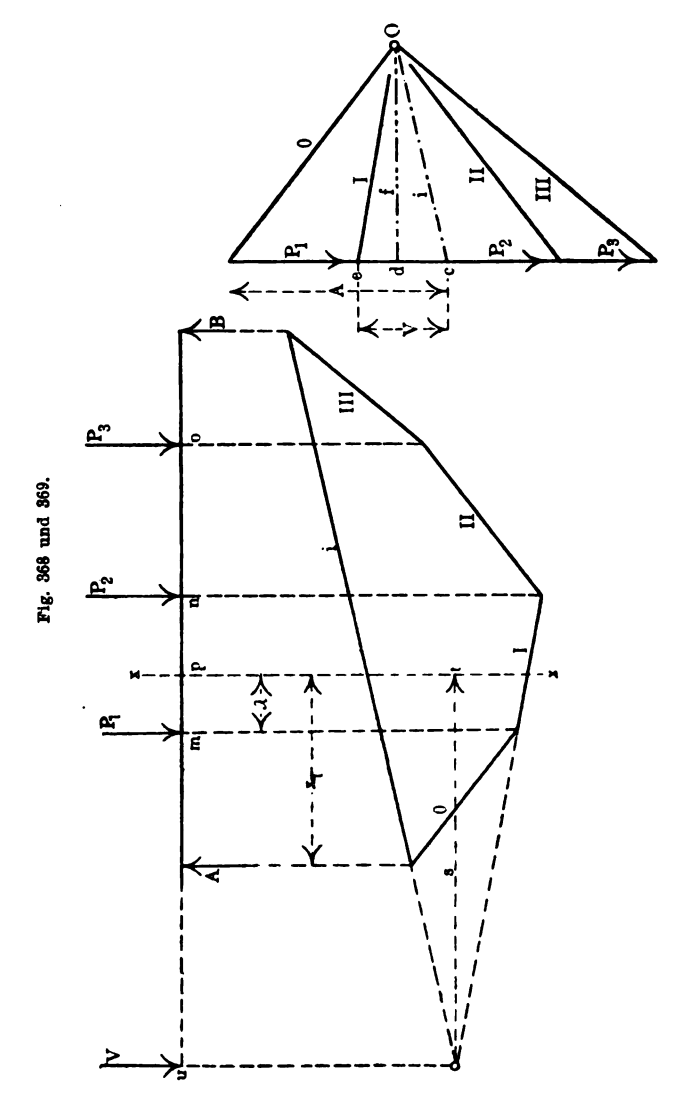


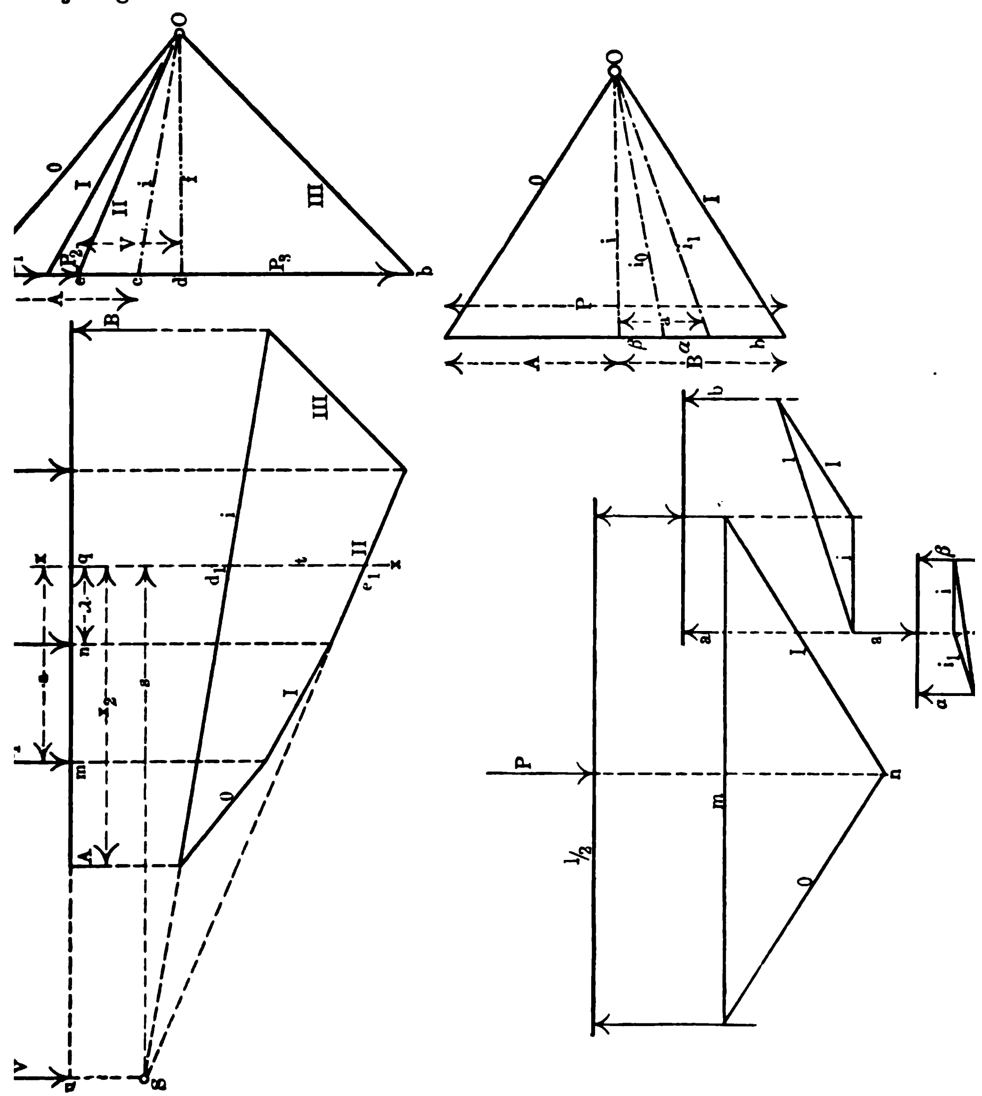
Fig. 368 und 369.

Höhe s in Fig. 368 ähnlich, da die Seiten unter sich parallel sind. Es verhält sich nun

$$t : s = V : f, \text{ woraus } Vs = tf \text{ oder } M_p = t \cdot f.$$

Das Moment ist das Produkt der Seilpolygonordinate mit dem Polabstand.

In Fig. 370 haben wir den Schnitt xx innerhalb der Kräfte P_2 und P_3 angenommen. Das Moment ist hier



$$M_q = A x_2 - P_1 a - P_2 \lambda,$$

die Querkraft, bezw. die Mittelkraft zu A, P_1 und P_2 ist

$$V = A - (P_1 + P_2).$$

In Fig. 371 ist sie durch de angedeutet.

Denken wir uns wieder V in der Entfernung s wirkend, so tritt Gleichgewicht ein, wenn

$$Vs + P_1 a + P_2 \lambda = Ax_2, \text{ aus dieser Gl. folgt}$$
$$Vs = Ax_2 - P_1 a - P_2 \lambda = M_q.$$

Die Höhen f und s fallen hier ausserhalb der ähnlichen Dreiecke edO und $e_1 d_1 S$; aus der Proportion $t : s = V : f$ folgt wieder

$$Vs = M_q = t \cdot f \quad \ldots\ldots\ldots \quad (44).$$

Um bei der Bestimmung der Momente Reduktionen zu umgehen, ist es das einfachste, die Kräfte und deren Abstände im Kräfteplan und in der Hauptzeichnung in der Einheit des Polabstandes aufzuzeichnen.

Die Lage des grössten Momentes wird dargestellt durch die grösste Momentenordinate.

Ist der Polabstand der Einheit gleich, dann liefern die Momentenordinaten unmittelbar die Momente. —

Gleichmässig verteilte Lasten teilt man in möglichst gleich grosse Elemente, in deren Schwer- bezw. Mittelpunkten die Elementenkräfte wirken. Zur Bestimmung der Auflagerreaktionen ist, wie uns bekannt, eine Mehrteilung der gleichmässig verteilten oder der Streckenlast nicht erforderlich, hier genügt die Annahme einer Kraft im Schwerpunkt, die Bestimmung der Momente wird aber um so genauer, je mehr Elemente wir annehmen.

In Fig. 372 d. vor. S. wirkt eine Einzelkraft in der Mitte, das Moment wird durch die Ordinate mn dargestellt, wie bekannt, hat es den Wert

$$M = \frac{Pl}{4}. \text{ —}$$

Die Zeichnung wurde übrigens, nebenbei bemerkt, gleichzeitig verwendet, um das eine Auflager in mehrere Lagerungen zu zerlegen, deren Grössen sich aus Fig. 373 ergeben.

Das Auflager B wurde ersetzt durch einen kleineren Träger mit den Auflagern ab, das Auflager a des letzteren ruht auf dem Träger $\alpha\beta$; das Auflager B ist in der Mitte des Trägers ab angenommen. Man überträgt aus Fig. 373 die Polstrahlen i und I parallel nach Fig. 372, zieht i_1, die parallele Übertragung dieser Linie nach Fig. 373 ergiebt die Grössen von a und b. In derselben Weise wird i_0 aus Fig. 372 parallel nach Fig. 373 übertragen und erhält man schliesslich α und β.

Um nach dieser Abschweifung auf eine Vergleichung von Einzel- und verteilten Lasten zurückzukommen, haben wir in Fig. 374 verschie-

dene Teilungen zur Vergleichung der Momente ineinander gezeichnet. Die gleichmässig verteilte Last Q ist durch eine gleich grosse Kraft Q ersetzt, welche in der Mitte angreift, durch den Polpunkt O_1 Fig. 375 erhält man das Moment mn. Teilt man Q in 2 Teile, 1 und 2,

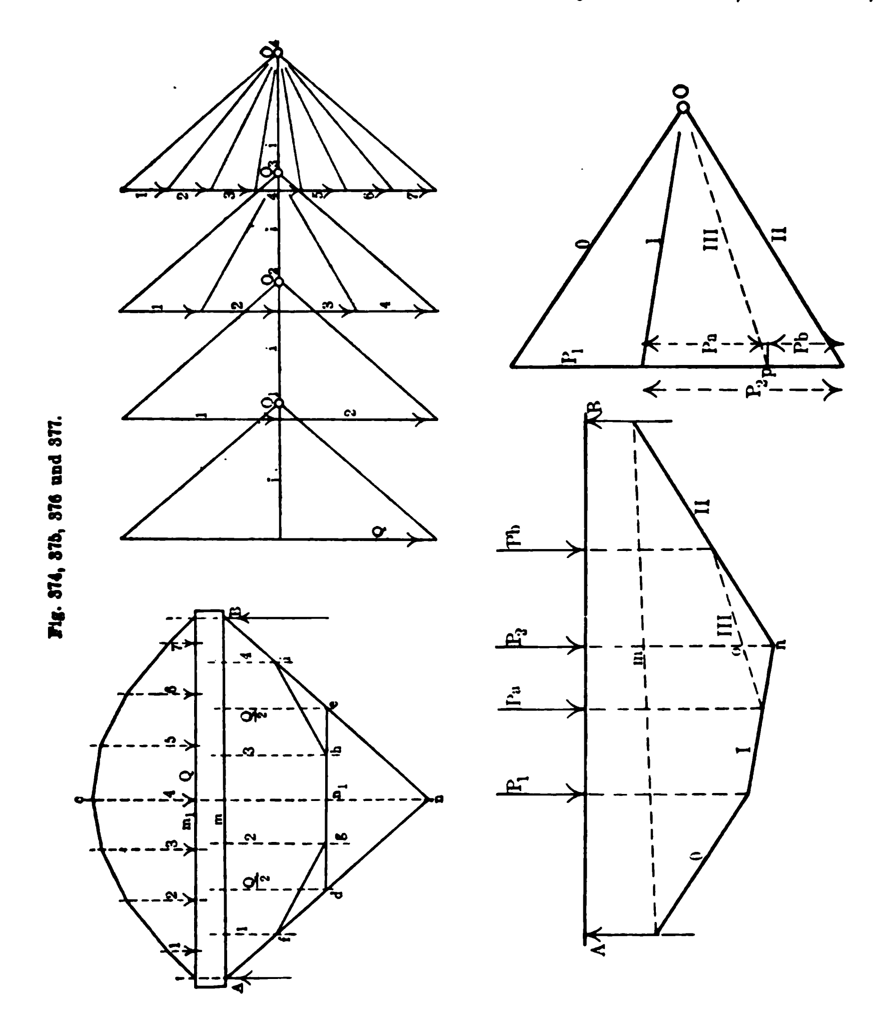


Fig. 374, 375, 376 und 377.

so liefert der Polpunkt O_2 die Momentenfläche AdeB und das Moment mn_1. In 4 Teile geteilt, 1, 2, 3, 4, ergiebt sich durch O_3 die Momentenfläche AfghiB, es finden wieder Teilschnitte durch die Dreiecke fdg und hie statt, indem sich $Q/_2$ in 1, 2 bezw. 3, 4 teilt. In 7 Teile geteilt, erhält man die Momentenfläche AcB; infolge der Symmetrie, weil

i in die Achse fällt, können wir das Seilpolygon, obgleich O_4 rechts der Kraftlinie liegt, oberhalb der Achse auftragen. Je mehr Teile wir annehmen, um so mehr nähern wir uns der Parabel, das grösste Moment in der Mitte wird dann $cm_1 = \frac{1}{2}$ mn, bezw. $\frac{1}{8}$ Ql; die Seilpolygonlinien bilden dann, wenn man sie bis zu den Linien An und nB verlängern würde, Tangenten an die parabolische Belastungslinie.

Anschliessend hieran können wir auch Kräfte einschalten oder Teilungen von Kräften durch Vermehrung der Seilpolygonseiten vornehmen, wie dies die umstehende Fig. 376 zeigt. Es soll hier das Seilpolygon und die Kräfteplanzeichnung für die beiden Kräfte P_1 und P_2 und für den Polpunkt O ausgeführt. Es soll P_2 durch die Kräfte P_a und P_b ersetzt werden, um beispielsweise die Durchbiegung im Angriffspunkt der Kraft P_b zu verringern, da dort das Moment mn zu gross wird. Ist die Lage der Kräfte P_a und P_b gegeben, so hat man nur nötig, die Seilkraft III einzuzeichnen, und diese Linie parallel durch O in Fig. 377 zu übertragen; aus der Kräftelinie ergiebt sich dann der Schnittpunkt p, und die Grössen der Kräfte P_a und P_b werden dann als Ersatz für P_2 aus der Zeichnung entnommen.

Das Moment mn wird infolge der Teilung der Kraft P_2 um on verringert. Je weiter man die Teilung fortsetzt, um so näher gelangt man wieder zu Streckenlasten.

3. Das statische Moment der Mittelkraft beliebiger Kräfte.

Wir haben in Fig. 378 mehrere zerstreut in der Ebene liegende Kräfte angenommen und durch den beliebigen Punkt O ein Seilpolygon konstruiert, durch dessen Vermittelung wir die Grösse der Resultierenden R und deren Lage durch S feststellten (s. Fig. 247 S. 215). Wir wollen uns nun die Aufgabe stellen, in Bezug auf den beliebigen Punkt m das Moment der Kräfte, bezw. das Moment der Resultierenden $M = R\,\rho$ festzustellen.

Nach paralleler Übertragung der Resultierenden R aus Fig. 379 durch S ziehen wir durch m eine Parallele zu R, diese schneidet die Linie o in e, verlängert man die Linie IV über S, so gelangt man zu dem Dreieck edS. Die Höhe desselben Sm_1 ist dem Hebelarm ρ gleich; errichten wir in a der Resultierenden R, Fig. 379, die Senkrechte aO, welche dem senkrechten Polabstand f nach unseren obigen Anschauungen gleich ist, so ist Dreieck edS dem von R, O, IV (Fig. 379) eingeschlossenen Dreieck ähnlich. Folglich verhält sich $R : f = ed : \rho$, woraus

$$R\rho = M = \overline{ed} \cdot f \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45).$$

Das Moment der Resultierenden der zerstreut wirkenden Kräfte lässt sich demnach auch proportional dem Polabstand graphisch finden.

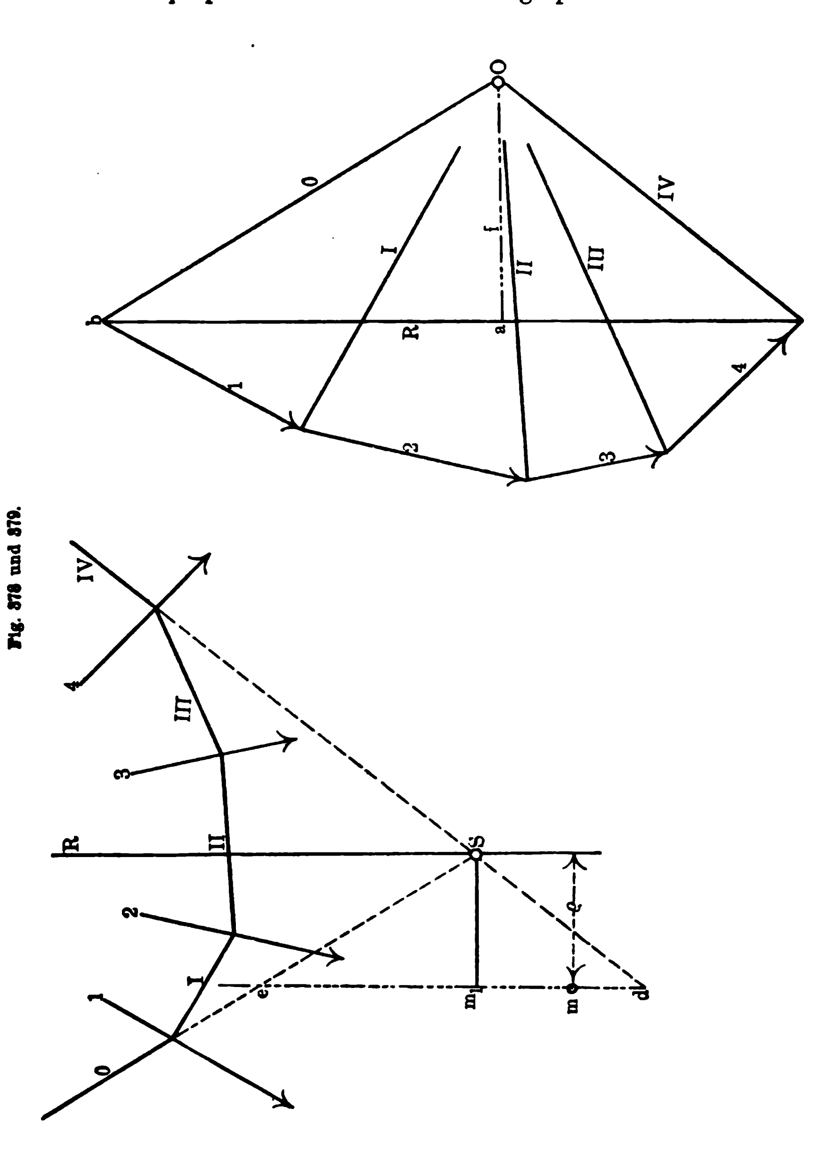


Fig. 378 und 379.

Wir haben in Fig. 380 ein **Beispiel** angeschlossen. Die Kräfte sind

$$P_1 = 50, \; P_2 = 65, \; P_3 = 40, \; P_4 = 43 \text{ kg},$$

der gegebene feste Punkt m liegt in der Geraden mn. Man findet

$$R = 177 \text{ kg}, \ \rho = 1{,}18 \text{ m},$$

für f = 1 ist dann

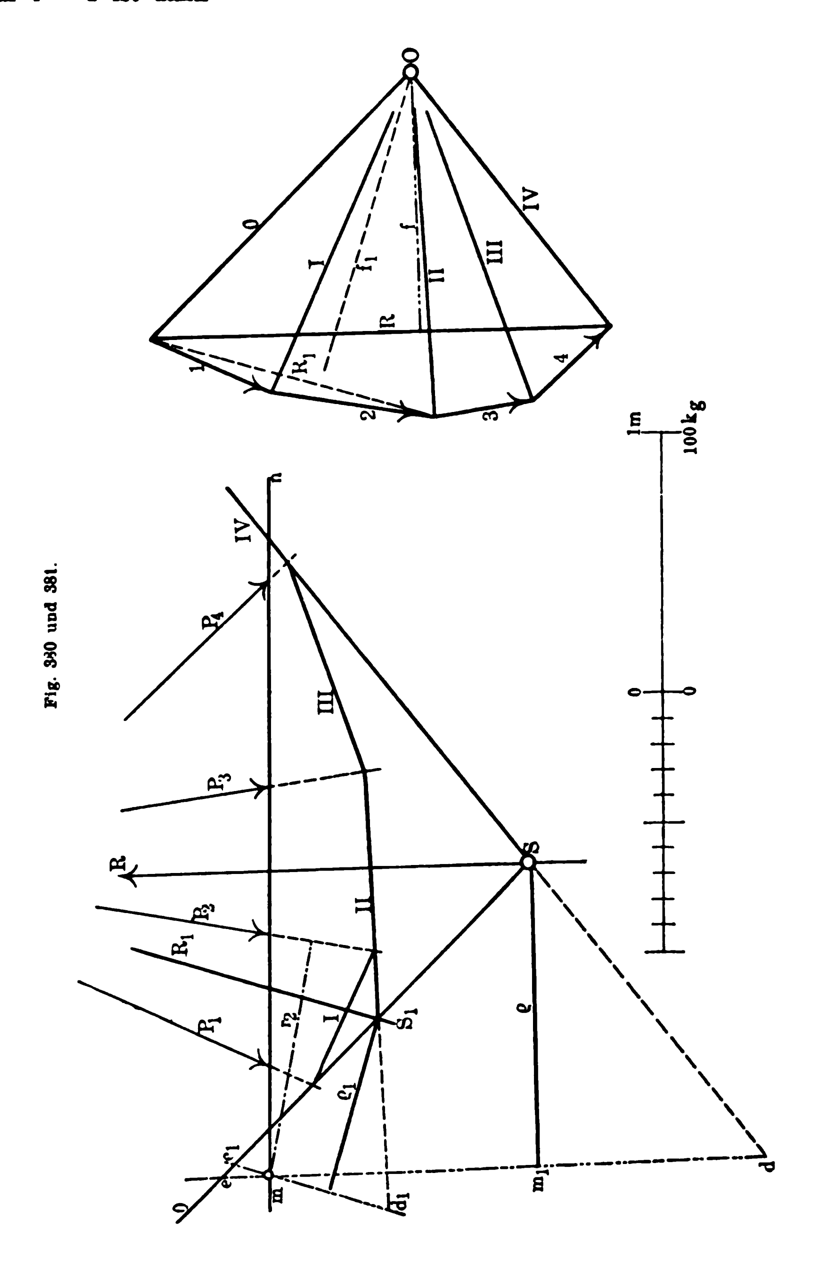


Fig. 380 und 381.

$M = 177 \cdot 1{,}18 = \overline{de} \cdot f = 208 \cdot 1$ oder $2{,}08 \cdot 100 = 208$ kg; richtiger ist es, $\overline{de}$ als Kraftgrösse, da die Seilpolygonlinien Kräfte repräsentieren, und f_1 den Abstand, als Längenmass aufzufassen.

Bestimmt man den Polabstand jeder einzelnen Kraft, oder die Resultierende mehrerer, und konstruiert die betreffenden Abschnitte de, so ergiebt sich, dass das resultierende Moment $M = R\rho$ sich aus der Summe der einzelnen darstellen lässt.

Bezeichnet man den senkrechten Abstand jeder Kraft vom Drehpunkt m mit r,

$$r_1 = 0{,}39,\ r_2 = 0{,}91,\ r_3 = 1{,}47,\ r_4 = 1{,}67,$$

so erhält man (analytisch)

$$M = R\rho = 177 \,.\, 1{,}18 = P_1 r_1 + P_2 r_2 + P_3 r_3 + P_4 r_4 \text{ oder}$$
$$177 \cdot 1{,}18 = 50 \cdot 0{,}39 + 65 \cdot 0{,}90 + 40 \cdot 1{,}47 + 43 \cdot 1{,}67.$$

Für die beiden ersten Kräfte ist

$$M_1 = 50 \cdot 0{,}39 + 65 \cdot 0{,}90 = R_1 \rho_1 = \overline{d_1 e_1} \cdot f_1,$$
$$\text{für } R_1 = 69,\ \rho_1 = 1{,}13,\ \overline{d_1 e_1} = 61,\ f_1 = 1{,}26$$

erhält man das Moment 80 kg.

In Fig. 380 sind nicht alle Hebelarme r eingezeichnet.

Dass das statische Moment der Mittelkraft der Summe der Momente der einzelnen Kräfte in Bezug auf einen festen Punkt ist, erhellt deutlicher, bezw. übersichtlicher, wenn man die Kräfte parallel unter sich anordnet, wie es Fig. 382 zeigt. Es sind 4 Kräfte gegeben, der feste Punkt m fällt mit dem Schnittpunkt e zusammen. Die Resultierenden fallen alle in die Kraftlinie, für alle gilt der Polabstand f. In die Parallele ed bezw. md zu R fallen alle Verlängerungen der Seilkräfte, welche die einzelnen Momente $m_1\ m_2\ m_3\ m_4$ bilden, es ist somit

$$M = R\rho = \overline{de} \cdot f = (m_1 + m_2 + m_3 + m_4)\, f; \text{ bezw. } M = \Sigma m \quad . \quad (46).$$

In Fig. 384 fällt die Resultierende R ausserhalb der allerdings parallel, aber teilweise im entgegengesetzten Sinne wirkenden Kräfte. Der gegebene feste Punkt ist m. Die Konstruktion dürfte wohl keine Schwierigkeiten bereiten.

Das in Betracht kommende Moment ist $M = \overline{de} \cdot f$.

Der Buchstabe e am Endpunkt der Linie III und der Linie md ist zu ergänzen.

I. Ein Träger von 2,5 m Länge, an den Enden unterstützt, Fig. 386, ist mit zusammen 1455 kg belastet, wie gross sind die Momente und welches Normalprofil für I Querschnitt kann nach dem Maximalmoment und für die zulässige Biegungsspannung $k_b = 700$ kg auf d. qcm verwendet werden?

Konstruiert man für den Polabstand f = 1, welcher gleichzeitig als Meter für das Längenmass und für 1000 kg als Kräftemassstab dient, die Momentenfläche, so kann man die Auflager A und B aus dem

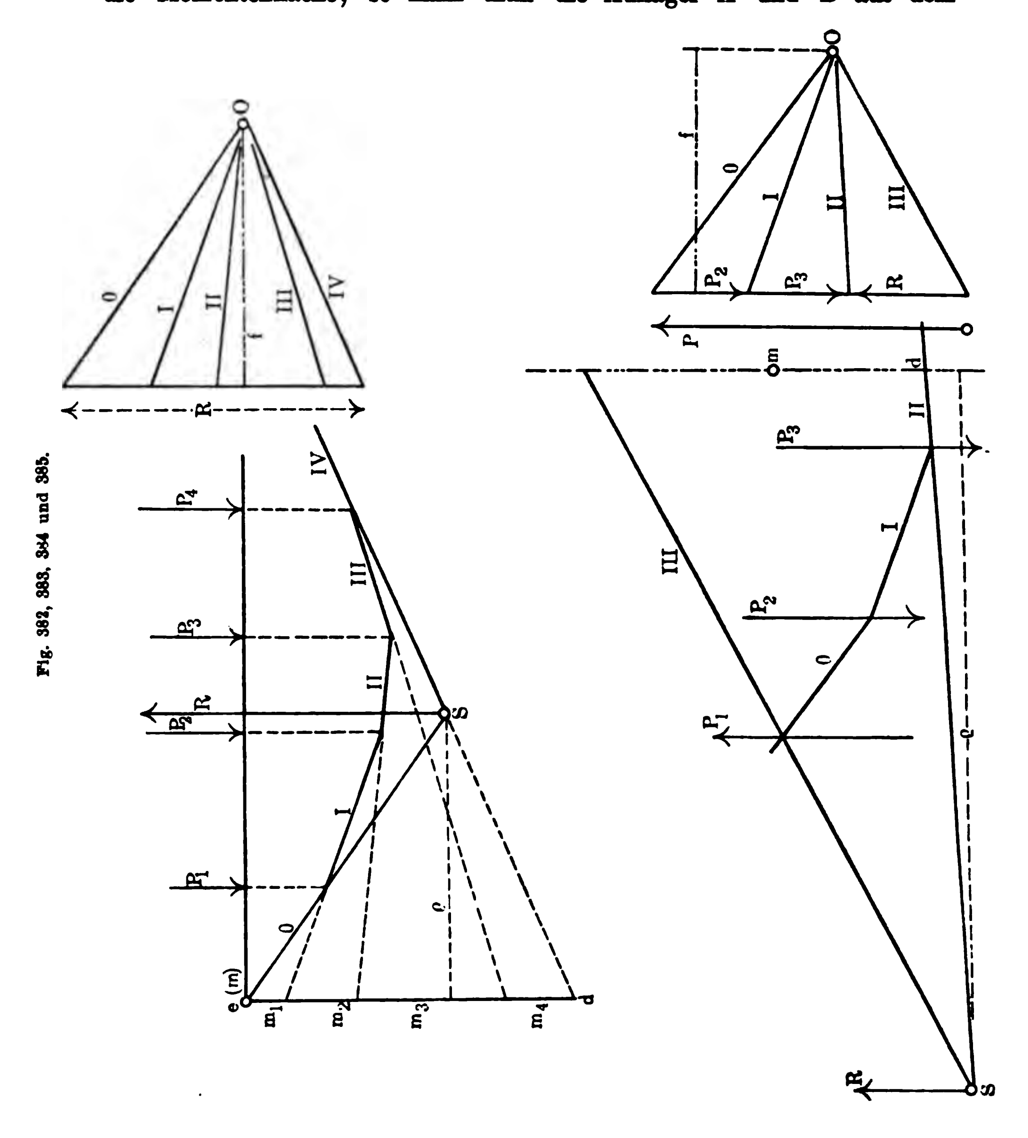


Fig. 382, 383, 384 und 385.

Kräfteplan in kg und die Momente aus dem Massstab der Poleinheit unmittelbar entnehmen; man erhält M = 433 kgm = 43 300 kgcm, ab = M_{max} = 61 000 kgcm und M = 52 000 kg.

Das zugehörige Normalprofil entnehmen wir aus den Tabellen im **Anhang.** Das Widerstandsmoment ist

$$W^{(cm)} = \frac{M}{k_b} = \frac{61\,000}{700} = 87,$$

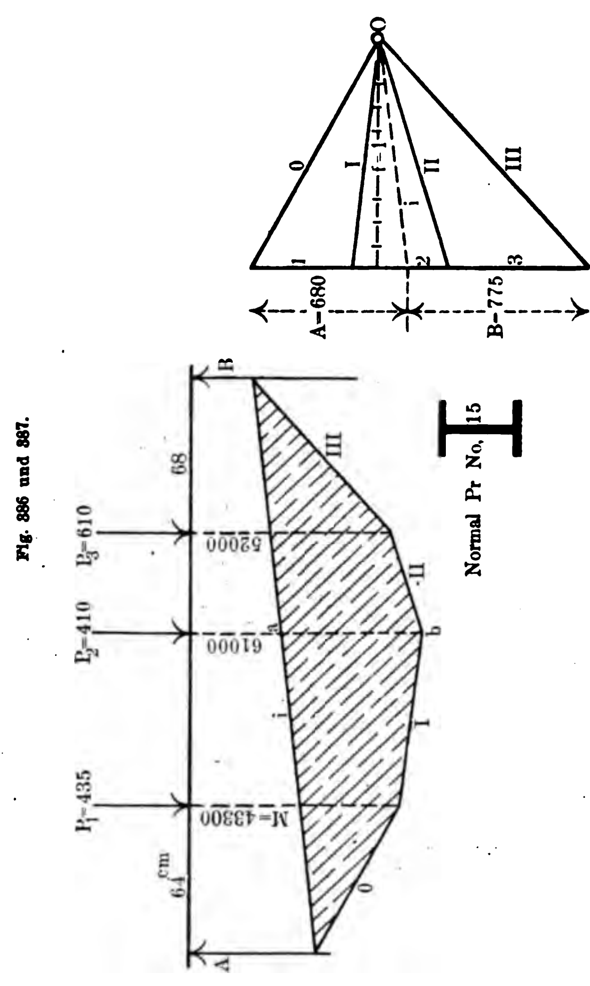


Fig. 386 und 387.

Tabelle A liefert Nr. 15, die Spannung wird allerdings bei diesem Profil geringer, nämlich

$$k_b = \frac{M}{W} = \frac{61\,000}{99} \sim 610 \text{ kg auf d. qcm.}$$

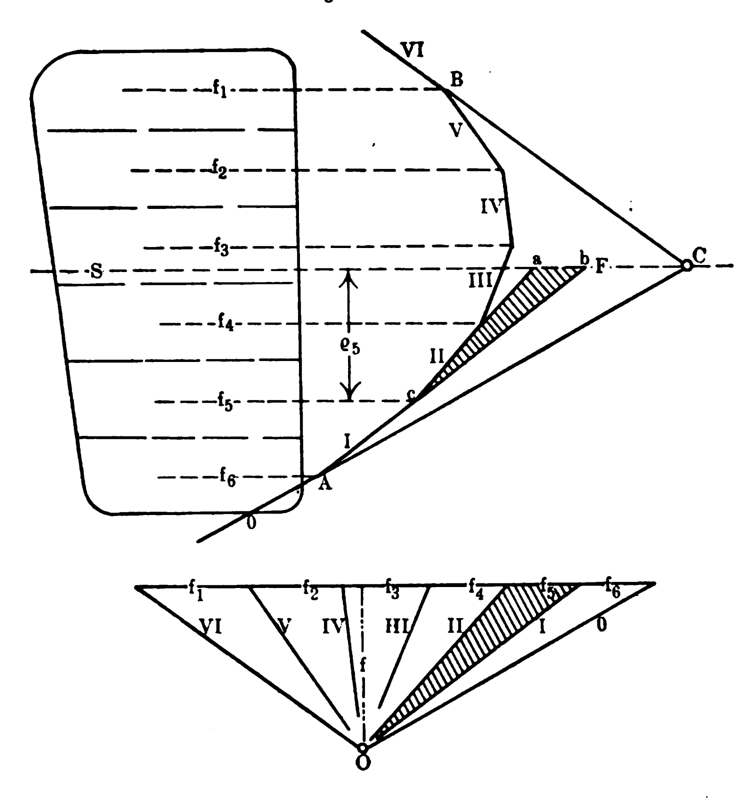
Um das Trägheitsmoment bezw. auch das Widerstandsmoment allgemein auch auf graphischem Wege ermitteln zu können, haben

wir in den folgenden Figuren einige Beispiele eingeschaltet; die in Fig. 33 S. 24 ausgeführte graphomathematische Berechnung bebezieht sich nur auf einen doppelt Tförmigen Querschnitt.

Wir begegnen dem Trägheitsmoment zum ersten Mal in Band I S. 304 u. f., bei Gelegenheit der Arbeitsleistung drehender Massen, wir fanden in Bezug auf die Massenelemente des Körpers den Ausdruck

$$J = \Sigma\, m\, \rho^2 = m_1 \rho_1{}^2 + m_2 \rho_2{}^2 + m_3 \rho_3{}^2 + \;.\;.\;.\;.\;.\quad (a).$$

Fig. 388 und 389.



In der Festigkeitslehre im II. Band gelangten wir, S. 63 und 81, auf einen Ausdruck mit demselben Bildungsgesetz

$$J = \Sigma\, f\, \rho^2 = f_1 \rho_1{}^2 + f_2 \rho_2{}^2 + f_3 \rho_3{}^2 + \;.\;.\;.\;.\;.\quad (b),$$

nur bezogen auf die Flächenelemente eines Querschnittes; man nennt ihn, wie uns bekannt, auch Trägheitsmoment, obgleich er mit der Trägheit drehender Massen nichts zu thun hat. Dem Sinne der Festigkeit entsprechend, verwandelt man ihn durch Division mit e, der Ent-

fernung der Schwerpunkts- von der äusserst gespanntesten Faser, in den Ausdruck $W = \frac{J}{e}$, welchen man der Festigkeitslehre eher entsprechend, Widerstandsmoment nennt.

Der Ausdruck Flächenträgheitsmoment, Gl. (b), ist aus einer Summation von Gliedern von der Form $f \rho^2$ gebildet; es handelt sich zunächst um die Konstruktion des letzteren Ausdrucks.

Die Fläche $\Sigma f = f_1 + f_2 + \ldots f_6$, Fig. 388, wurde in ihre Elemente zerlegt, diese als Kräfte in Fig. 389 zu einer Summe vereinigt, und durch Vermittelung des Polpunktes O die Schwerlinie SC gesucht, auf welche sich das Flächenträgheitsmoment beziehen soll. Wir haben das Element f_5 herausgegriffen, dessen Abstand von SC ist ρ_5. Verlängert man die diesem Element entsprechenden Seilpolstrahlen I und II in Fig. 388 bis ab, den Schnittpunkten in CS, so übersieht man leicht, dass das Dreieck abc dem Dreieck $O f_5$ in Fig. 389 ähnlich sein muss, weil die Seiten beider Dreiecke unter sich parallel sind. Da sich nun die Flächeninhalte der Dreiecke wie die Quadrate ihrer Höhen verhalten, so können wir nach den in den Figuren eingeführten Bezeichnungen die Proportion aufstellen

$$\triangle\, abc : \rho_5^2 = \triangle\, O f_5 : f^2,$$

aus diesen folgt

$$\overline{abc}\, f^2 = \overline{O f_5} \cdot \rho_5^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (c).$$

Da nun der Inhalt des Dreiecks $O f_5 = \frac{1}{2} f_5 \cdot f$, weil die Basislänge als Längenmass dem Flächeninhalte des Elementes f_5 gleich ist, und die Höhe f dem Polabstand, so ergiebt sich

$$\triangle\, \overline{abc}\, f^2 = \tfrac{1}{2} f_5 \cdot f \cdot \rho_5^2 \text{ oder}$$

$$\triangle\, \overline{abc} = \tfrac{1}{2} \frac{f_5 \rho_5^2}{f}, \text{ hieraus}$$

$$f_5 \rho_5^2 = 2 f \cdot \overline{abc} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (d).$$

Die oben erwähnte Gliederform $f \rho^2$ lässt sich somit als Produkt aus dem Flächeninhalt abc des obigen Seilpolygondreiecks mal dem doppelten Polabstand darstellen. Die geometrische Bedeutung der übrigen Trägheitsmomente der Elemente $f_1 \rho_1^2$, $f_2 \rho_2^2 \ldots$ führt, wie wohl zu übersehen, zu dem Ergebnis, dass sie sämtlich sich in Dreiecke innerhalb der Fläche ABC verwandeln lassen. Die Summe dieser Trägheitsmomente, das Trägheitsmoment der Fläche bezogen auf die Schwerlinie derselben ist sonach

$$J = ABC \cdot 2 f = F \cdot 2 f \quad \ldots \ldots \quad (47).$$

1) Das Normalprofil Nr. 15 haben wir in nachstehender Fig. 390 in 3 Elemente geteilt, $f_1 = f_3 = 6{,}5$, $f_2 = 8$ qcm. Als Polabstand wurde $f = 10$ cm gewählt.

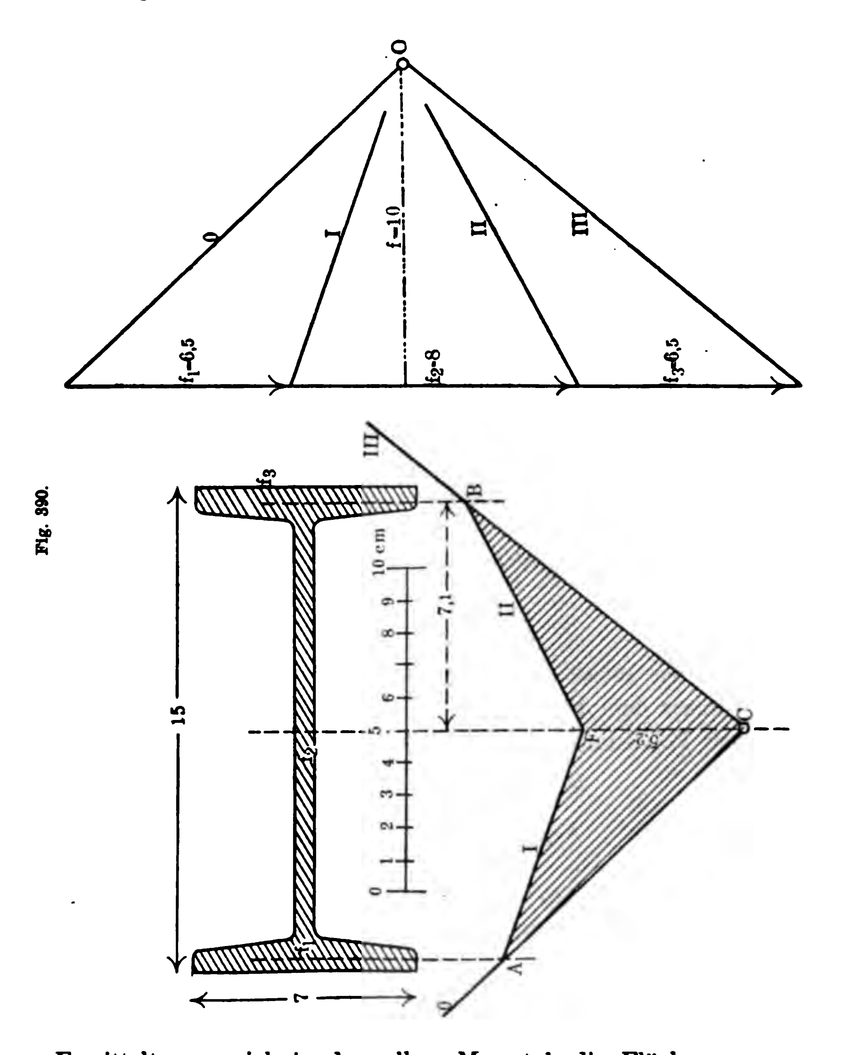


Fig. 390.

Ermittelt man sich in demselben Massstab die Fläche

$$AFBC = \tfrac{1}{2} \cdot (2 \cdot 5{,}2 \cdot 7{,}1) = 37 \text{ qcm},$$

so ergiebt sich $J^{(cm)} = 37 \cdot 2 \cdot 10 = 740$, nach Tabelle A im Anhang ist

$$J = 744, \quad f_1 + f_2 + f_3 = 20{,}5 \text{ qcm}.$$

2) Der nachstehende Querschnitt, Fig. 391, ist dem I. Band S. 332,

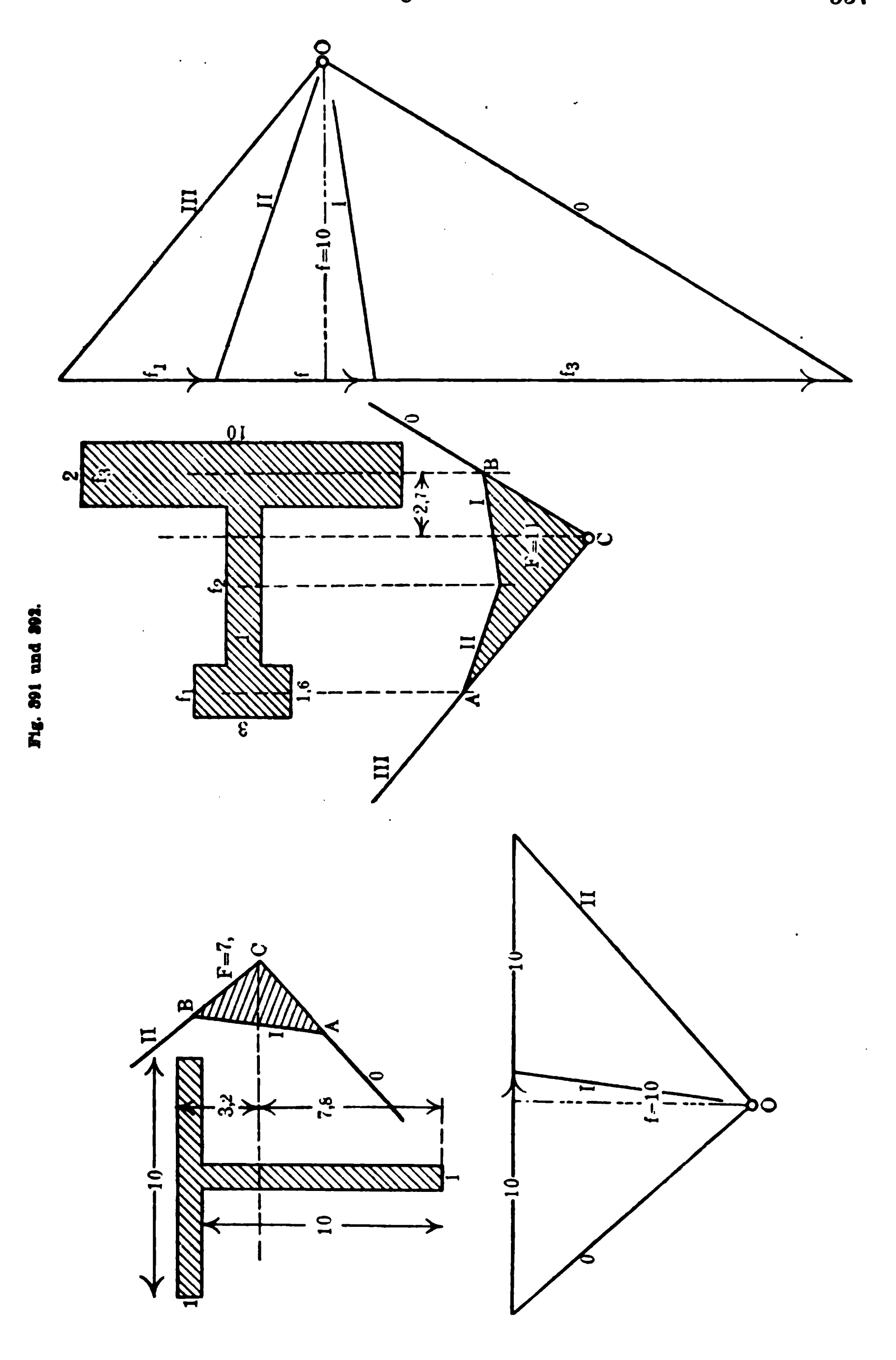


Fig. 391 und 392.

entnommen und auch im II. Band S. 88 verwendet. Die Seilpolygonfläche ist hier $F = 11$, der Polabstand wieder $f = 10$, man erhält sonach

$$J = 11 \cdot 2 \cdot 10 = 220.$$

Der Schwerpunktsabstand ist aus der Figur abgegriffen, $s = 2{,}7$.

3) In Fig. 391 haben wir mit Hilfe der gleichen Konstruktion das Trägheitsmoment eines Tförmigen Querschnittes ermittelt. Der leichteren Rechnung wegen haben wir auch hier den Polabstand $f = 10$ angenommen und auf diese Einheit die Masse bezogen. Man erhält $F = 7{,}1$, somit $J = 7{,}1 = 142$. F und s beziehen sich auf cm bezw. mm, wenn f in demselben Massstab aufgezeichnet ist. Die Widerstandsmomente sind

$$W_1 = \frac{142}{3{,}2} = 44; \quad W_2 = \frac{142}{7{,}8} = 18.$$

4) Wir hatten in Fig. 256 S. 224 den Schwerpunkt einer Eisenbahnschiene auf graphischem Wege bestimmt. Zu Grunde legten wir ein ungarisches Normalprofil von 12,2 cm Höhe. Die Flächenelemente als Längen wurden in cm aufgetragen, der Polabstand ist 12 cm; man erhält als Seilpolygonfläche $F = 37$ qcm, sonach das Trägheitsmoment

$$J^{(cm)} = 37 \cdot 12 \cdot 2 = 888.$$

Auf analytischem Wege fand sich $J^{(cm)} = 810$ und die Schwerpunktsentfernungen $e = 65$ und $e_1 = 57$, welche letztere mit den graphischen der Fig. 256 übereinstimmen, man erhält dann

$$W_1 = \frac{888}{65} = 13{,}7 \text{ und } W_2 = \frac{888}{57} = 15{,}6.$$

II. Der Träger, Fig. 393, ruht auf 2 Stützen und ist mit 570 und 800 kg innerhalb derselben und mit $P = 660$ kg excentrisch, ausserhalb der Stütze B belastet. Man konstruiert für den Polabstand $f = 1$ den Kräfteplan und findet zunächst die Auflager $A = 470$ und $B = 1560$ kg. Die Einheit stellt eine Länge von 1000 kg als Kraftmass dar, die Momentenordinaten ergeben daher unmittelbar $M = 282$ und $M = 500$ kg; das Moment zwischen B und der zweiten Belastung wird Null für $x = 1{,}6$ m. An dieser Stelle kann, wenn der Träger aus 2 Teilen zusammengesetzt werden müsste, die Verbindung ausgeführt werden, denn an dieser Stelle ist keine Biegung vorhanden. Die in Rücksicht zu ziehende Schub- oder Vertikalkraft ist (s. auch Fig. 97)

$$V = B - 660 = 1560 - 660 = 900 \text{ kg}.$$

III. Die gleichmässig verteilte Last, Fig. 395, 1280 kg, ist in 4 Teile zerlegt, $\frac{1}{4}$ 1280 = 320 kg, die Teile sind mit den noch auf den Träger wirkenden 950 kg Einzellast als Kräfte im Kräfteplan aufgetragen. Die Polpunkt-Entfernung ist $\frac{1}{2}$ der Einheit, daher müssen die

resultierenden Momente mit $\frac{1}{2}$ multipliziert oder zur Hälfte in Anrechnung gebracht werden.

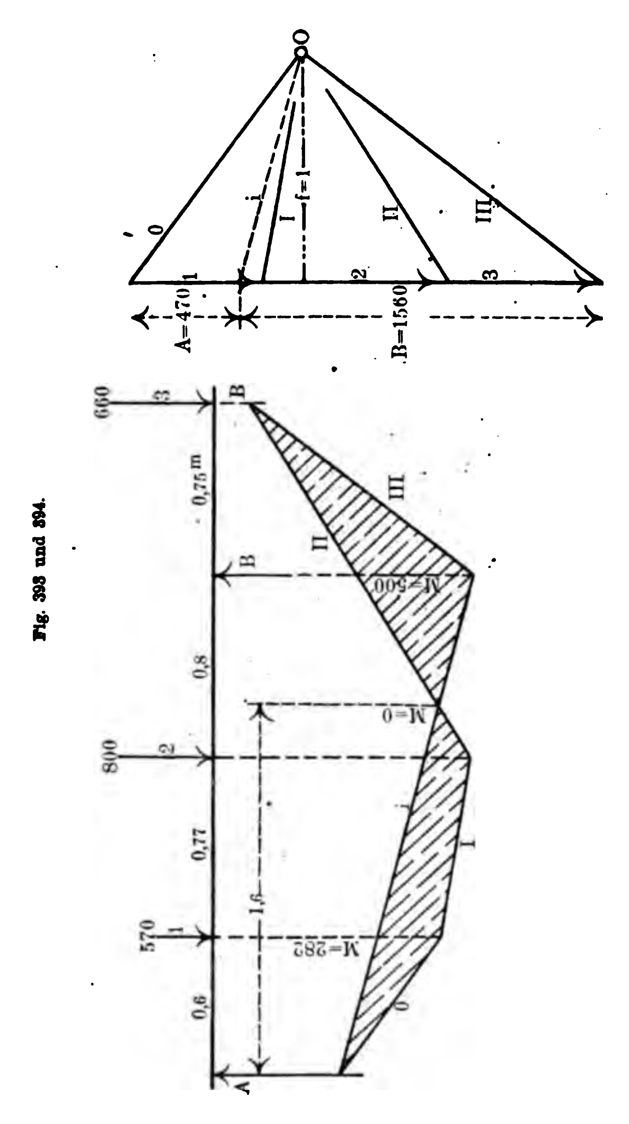


Fig. 393 und 394.

Denkt man sich die Länge f in 5 Teile geteilt, so stellt jeder Teil 100 kg dar, daher ergeben sich mit Rücksicht auf dieses Mass,

$$A = 1000 \text{ und } B = 1230 \text{ kg.}$$

Die Momentenordinate in m hat 19,2 obiger Teile, die in n 16 Ein-

heiten; das Moment in m ist sonach $19{,}2 \cdot 100 = 1920$ und wegen des Polabstandes

$$f = \tfrac{1}{2},\ M_m = \tfrac{1}{2}\, 1920 = 960 \text{ kgm};$$

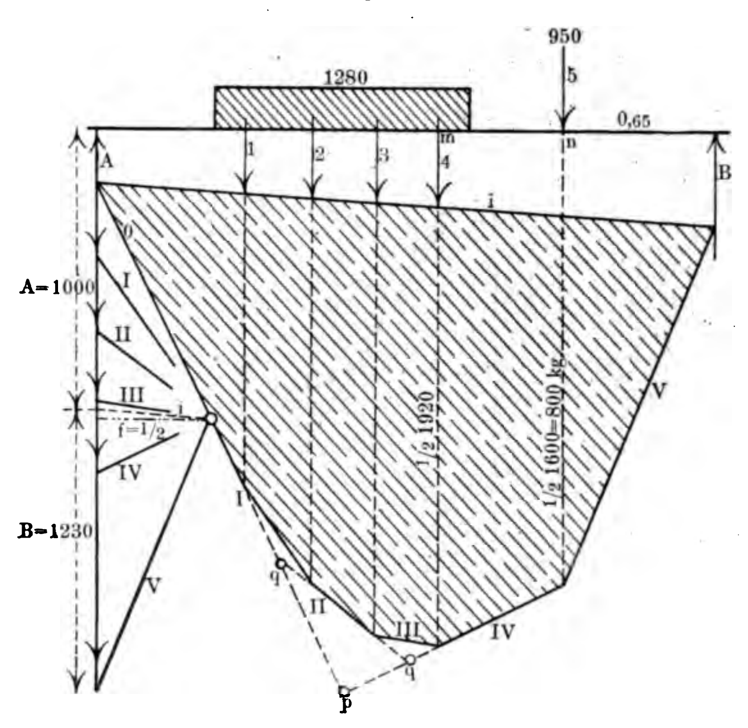
das Moment in n ist

$$M_n = \tfrac{1}{2}\, 1600 = 800 \text{ kgm};$$

die Rechnung für letzteres Moment liefert

$$M_n = B \cdot 0{,}65 = 1230 \cdot 0{,}65 = 799{,}5 \text{ kgm}.$$

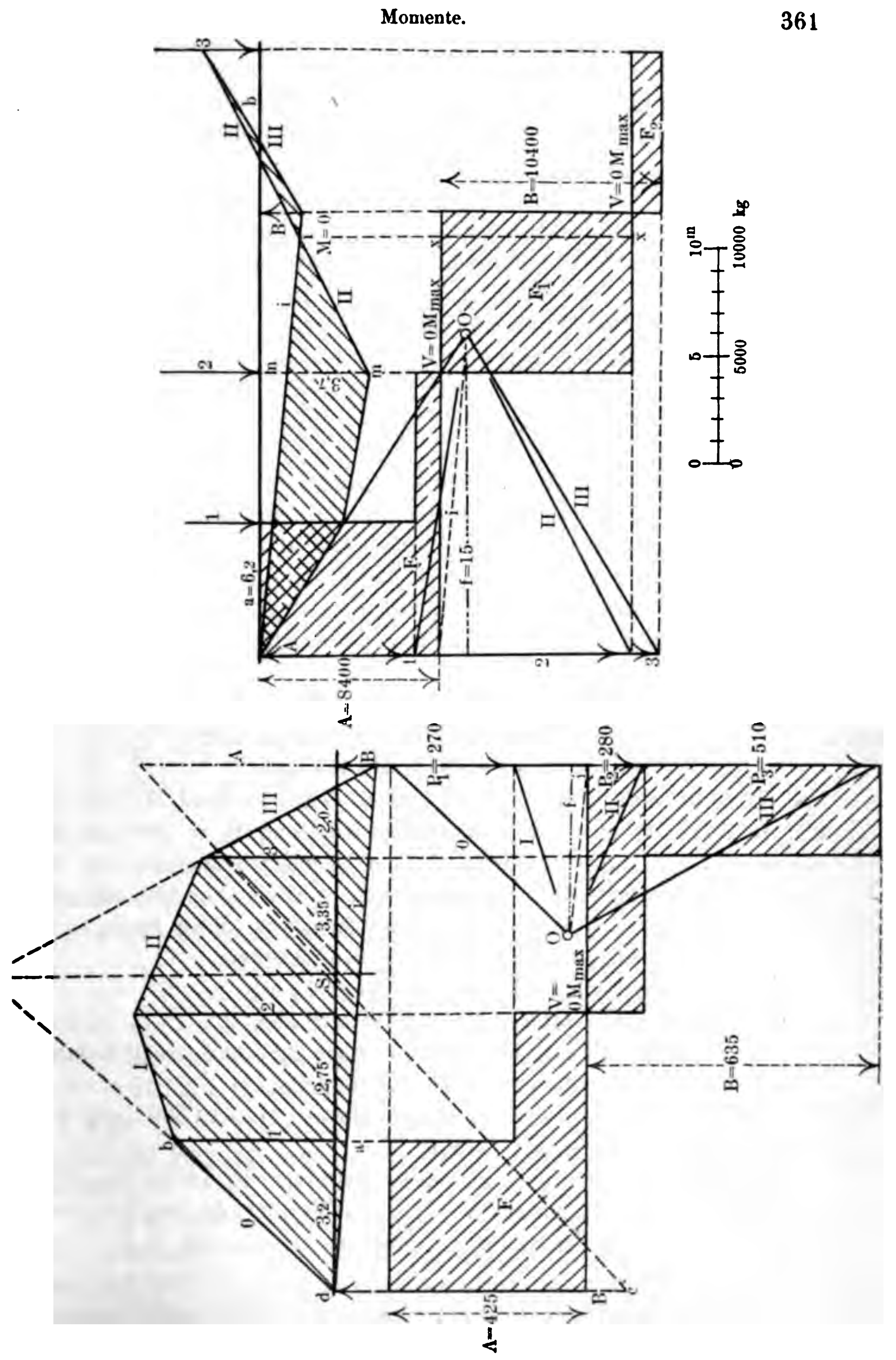
Fig. 395.



Wollte man die gleichmässig verteilte Last durch eine einzige Kraft im Schwerpunkt, $P = 1280$ kg, ersetzen, so käme die Momentenordinate durch p in Betracht; will man sie durch 2 gleiche Teile ersetzen, so finden sich durch die entsprechenden Verlängerungen der Seilpolygonseiten die Punkte q und q, deren Momentenordinaten natürlich auch wieder grösser werden müssen als obige.

Nach dem Maximalmoment $M = 80000$ kcm würde hierfür

$$k_b = 600 \text{ kg},\ W = \frac{80000}{600} = 133$$



A=8400
B=10400
V=0 M max
M=0
a=6,2
f=15
F_1
F_2
0
5
10m
5000
10000 kg
A=425
B=635
P_1=270
P_2=280
P_3=510
V=
0 M max
3,2
2,75
3,35
2,0

das Normalprofil Nr. 17 mit doppelt Tförmigem Querschnitt genügen. In Band I, S. 123, haben wir die analytische Berechnung eines ähnlich belasteten Trägers durchgeführt.

IV. In dem, Fig. 396, belasteten Träger, mit $P_1 = 270$, $P_2 = 280$ und $P_3 = 510$ Einzellast, welcher nach dem Beispiel S. 118 Band I zusammengestellt wurde, haben wir die Schub- oder Vertikalkräfte aus noch später zu erklärenden Gründen mit in Rücksicht gezogen und graphisch angedeutet. Das grösste Moment fällt nahezu in die Mitte des Trägers, hier ist $V = o$. Die Mittelkraft der parallelen Kräfte geht durch den Schwerpunkt S, dessen Lage wir gleichzeitig auch nach der in Band I S. 113 aufgestellten Theorie ermittelt haben, indem man im Auflager A, $dc = B$ und in B, A aufträgt, die Endpunkte dieser Linie schneiden im Schwerpunkt S.

Die einzelnen Längen zwischen den Kräften wurden in der Zeichnung ursprünglich in cm aufgetragen, 1 cm = 1 m; die Kräfte in demselben Massstab, 1 cm = 100 kg, der Polabstand f hat die Länge f = 3,65 cm. Die Momente ergeben sich durch die Momentenordinaten ab u. s. w. Das Moment ab in P_1 ist, weil $ab = 3{,}7$ cm,

$$M = (3{,}7 \cdot 100)\, f = 370 \cdot 3{,}65 = 1350 \text{ kgm.}$$

Das Produkt $A \cdot 3{,}2 = 425 \cdot 3{,}2$ ergiebt 1360 kgm.

Die andern Momente sind

$$M_2 = (4{,}9 \cdot 100)\, 3{,}65 = 1789 \text{ kgm und}$$

$$M_3 = 3{,}6 \cdot 100 \cdot 3{,}65 = 1314 \text{ kgm.}$$

V. Das Beispiel, Fig. 397, ist ähnlich denen in Band II, Fig. 104 und 156. Es ist hier eine excentrische Belastung $P_3 = 1500$ kg angenommen, der Polabstand ist nach dem beigefügten Massstab $f = 15$. Die grösste Momentenordinate findet sich in dem Angriffspunkt der Einzellast P_2, $mn = 3{,}7$, sonach ist das Moment an dieser Stelle

$$M_{max} = (3{,}7 \cdot 1000) \cdot 15 = 55\,500 \text{ kgm.}$$

Das Moment im Angriffspunkt der Kraft P_1 ist

$$M = 8400 \cdot 6{,}2 = 52\,000 \text{ kgm abg.}$$

Die Momentenordinate hat hier die Länge 3,5, man erhält daher

$$M = 3{,}5 \cdot 1000 \cdot 15 = 52\,000 \text{ abg.}$$

In B erhalten wir das relativ kleinste Moment $M = 11\,300$ kgm. Die Ordinate hat hier die Grösse 0,75 m.

Mit Rücksicht auf die excentrische Belastung P_3 ist im Angriffspunkt derselben die Schubkraft $V = P_3$, das Moment, da kein Hebelarm vorhanden, ist Null, im Auflager B wird es am grössten $M = P_3 \cdot b$, daher wird $V = o$.

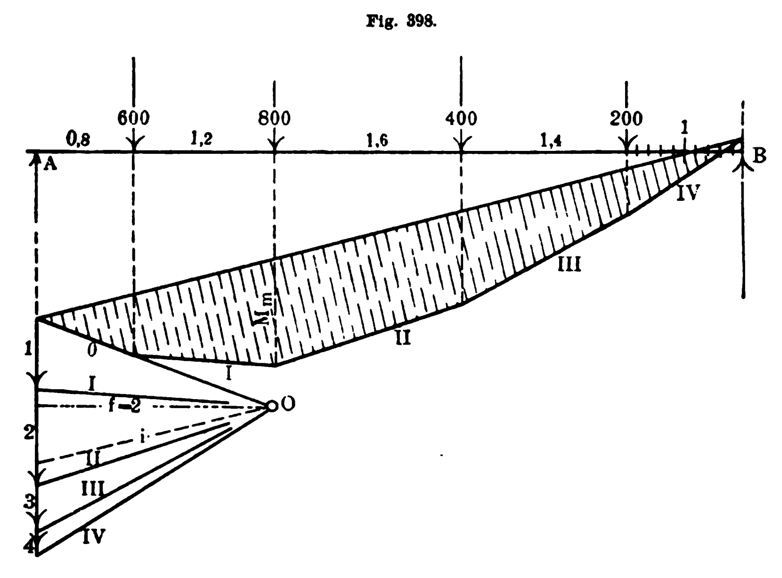
Die Auflagerreaktion ist hier B = 10400 kg.

Zwischen B und n wird das Moment wieder Null, es tritt keine Biegung ein, hingegen wirkt hier die Schubkraft

$$V = xx = B - P_3 = 10400 - 1500 = 8900 \text{ kg}.$$

VI. Wir haben in Fig. 398 die Momente des Trägers, welchen wir im II. Band, Fig. 102, berechnet haben, auf graphischem Wege nachgerechnet.

Fig. 398.



Der Polabstand f ist der doppelten Einheit gleich angenommen, die Momentenordinaten werden daher nur halb so gross als für f = 1. Das grösste Moment im Angriffspunkt der zweiten Kraft P_2 = 800 ist

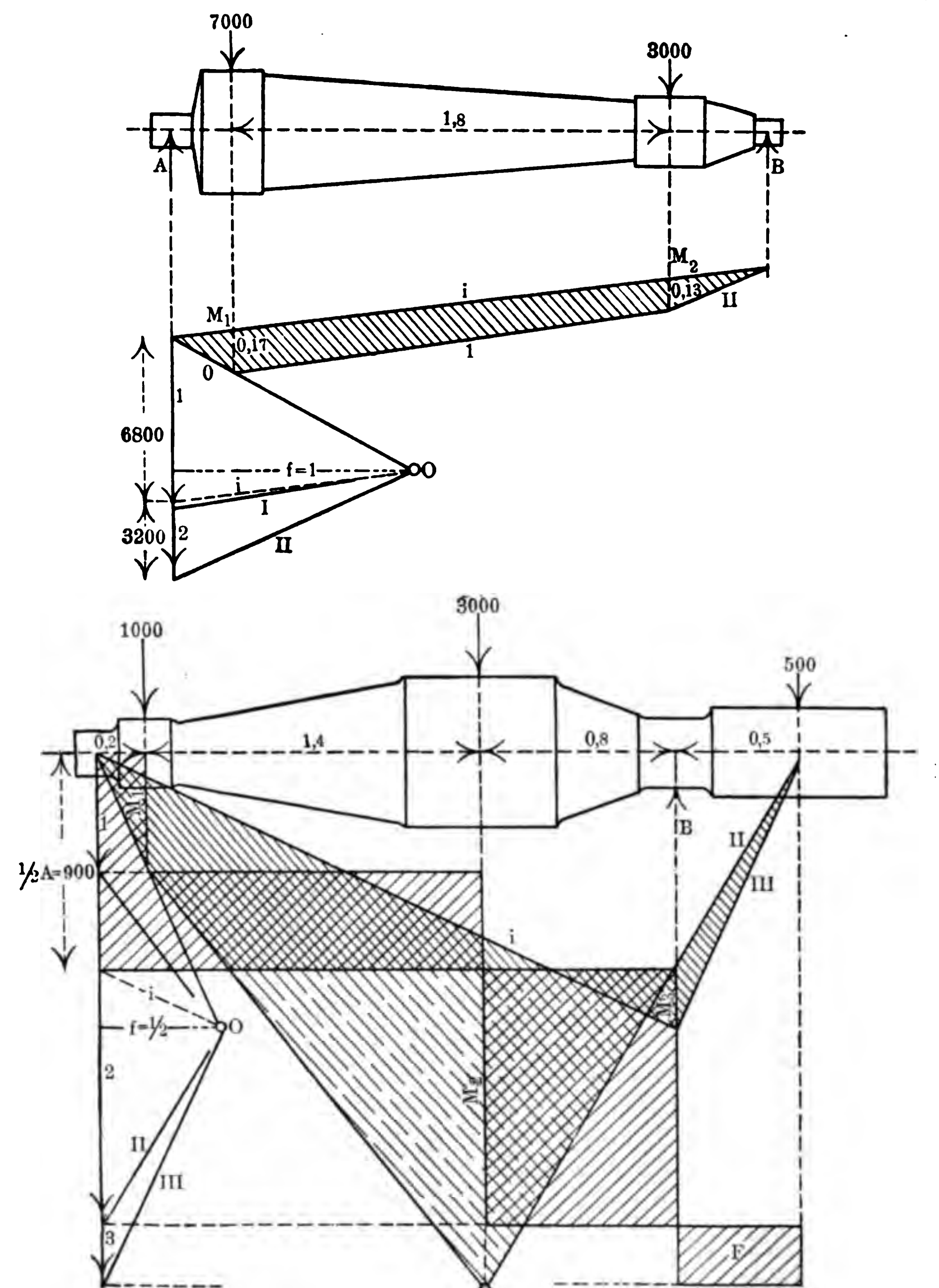
$$M_2 = 900 \cdot 2 = 1800 \text{ kgm, bezw.}$$

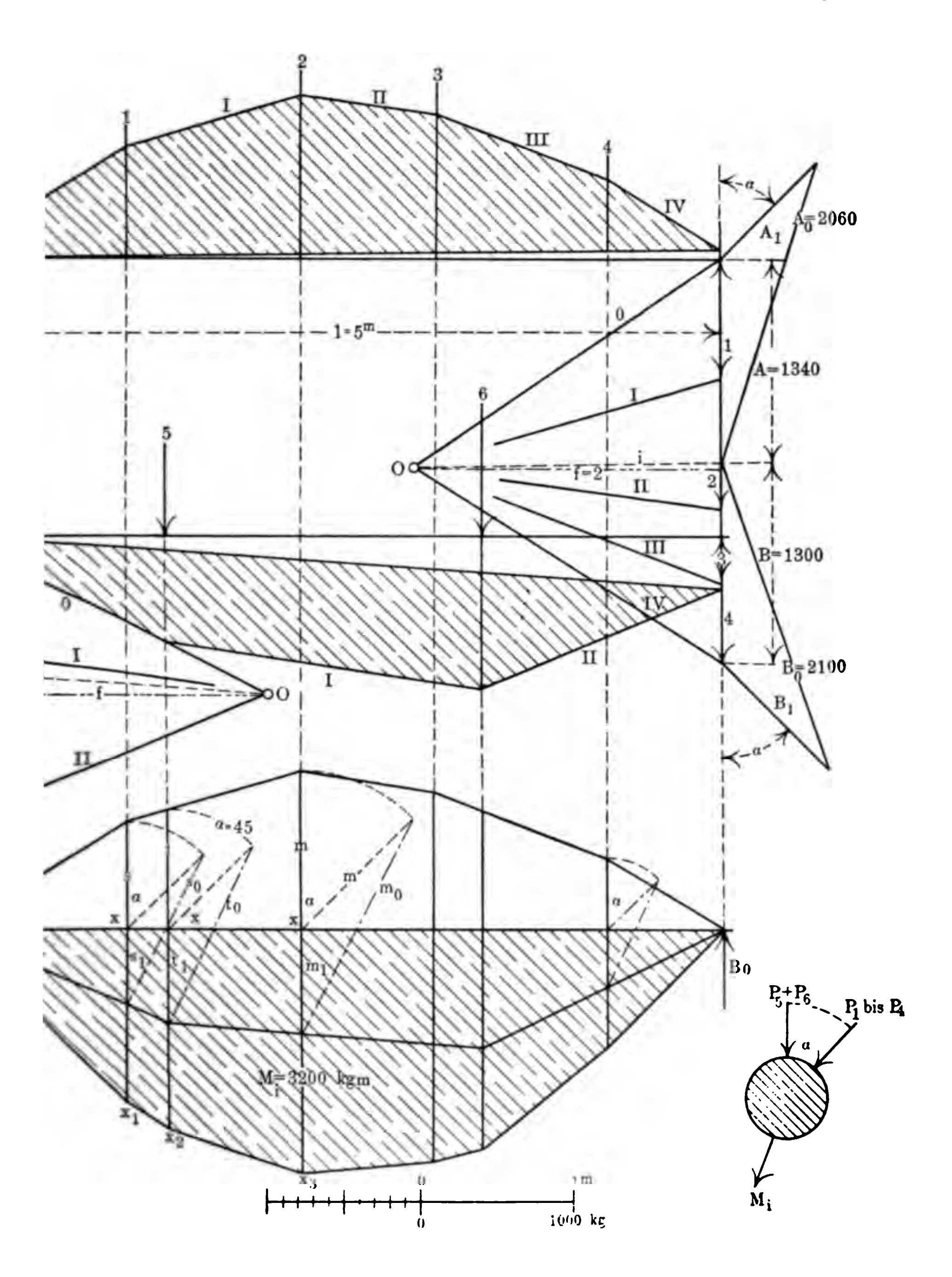
$$M_2 = (0{,}9 \cdot 1000) f = 0{,}9 \cdot 1000 . 2 = 1800 \text{ kgm},$$

weil die Einheit dem Kräftemass von 1000 kg entspricht. Auf analytischem Wege erhielten wir M_{max} = 1774 kg; bei k_b = 700 kg genügt für $W^{(cm)}$ = 253 das Normalprofil Nr. 22.

VII. In den folgenden Figuren haben wir die Momente der beiden Tragachsen, Fig. 155 und 156, Mech. II. Band, auf graphischem Wege berechnet.

In Fig. 399 ist der Polabstand der Einheit gleich angenommen, denkt man sich f in 10 Teile geteilt, so ist ein Teil 1 dec. als Längenmass und 1000 kg als Kräftemass, sonach ist f = 1 m bezw. 10000 kg.


7000
3000
1,8
A
B
M1
M2
0,17
0,13
i
1
II
0
6800
3200
f=1
O
I
2
1000
3000
500
0,2
1,4
0,8
0,5
½A=900
f=½
II
III
3
F


1
2
3
4
5
6
I
II
III
IV
$A_0 = 2060$
A_1
$l = 5^m$
$A = 1340$
O
$f = 2$
$B = 1300$
$B_0 = 2100$
B_1
$\alpha = 45$
$M_i = 3200$ kgm
x_1
x_2
x_3
B_0
$P_5 + P_6$
P_1 bis P_4
M_i
0
1 m
1000 kg

Als Momentenordinaten erhält man 0,17 bezw. 0,13. Die Momente sind hiernach

$$M_1 = 0{,}17 \cdot 10000 \cdot 1 = 1700 \text{ kgm und}$$
$$M_2 = 0{,}13 \cdot 10000 \cdot 1 = 1300 \text{ kgm.}$$

Die Auflager sind A = 6800, 6776 durch Rechnung und B = 3200, bezw. 3224 kg durch Rechnung.

VIII. Die Achse in Fig. 400 ist excentrisch belastet. Die Belastungen sind dieselben wie S. 176 Band II. Der Polabstand ist der halben Einheit gleich angenommen, somit entspricht f = 0,5 m als Längenmass und 500 kg als Lastmass.

Die gegebenen Belastungen $P_1 = 1000$, $P_2 = 3000$ und $P_3 = 500$ sind aber auch in halber Grösse in die Kräftelinien eingetragen, die gegebenen Längen 0,2 m, 1,4 m, 0,8 m und 0,5 m hingegen in wirklicher dem Längenmass f = 0,5 entsprechender Grösse. Hierdurch bleiben die Ordinatenwerte der Momentenfläche unverändert; um die Momente zu erhalten, ist keine Division mehr vorzunehmen.

Die Grössen der Momentenordinaten liefern somit die Momente unmittelbar, d. h. wieder in richtiger Grösse.

$$M_1 = 0{,}36 \cdot 1000 = 360 \text{ kgm}$$
$$M_2 = 1{,}50 \cdot 1000 = 1500 \text{ kgm}$$
$$M_3 = 0{,}25 \cdot 1000 = 250 \text{ kgm.}$$

Um die Auflager zu erhalten, müssen deren Längenmasse als Kräfte mit 2 multipliziert werden.

Für A erhält man 900, da nun P_1 P_2 P_3 im halben Massstab aufgetragen wurden, so ergiebt sich für A = 2 · 900 = 1800 kg, sonach ist

$$B = 4500 - 1800 = 2700 \text{ kg.}$$

Auch in dieser Figur sind die Vertikalkräfte mit angedeutet, das grösste Moment für V = o fällt in den Angriffspunkt der Kraft P_2 = 3000 kg.

IX. Die nachstehende Figur stellt die graphische Berechnung eines im Sinne des Podestträgers S. 130, Fig. 117, Band II, analytisch berechneten Trägers dar.

Auf dem 2,45 m langen Träger liegt gleichmässig verteilt das Eigengewicht 800 kg, welches in 8 Teile zerlegt ist, von denen 4 · 100 = 400 kg rechts unmittelbar zur Wirkung kommen.

Links ist noch eine gleichmässig verteilte Verkehrslast angenommen 1600 kg, welche auch in 4 Teile geteilt, mit dem Eigengewicht zusammen die Belastung 2000 kg bildet.

Als Auflagerreaktionen erhalten wir A = 1610 und B = 790 kg.

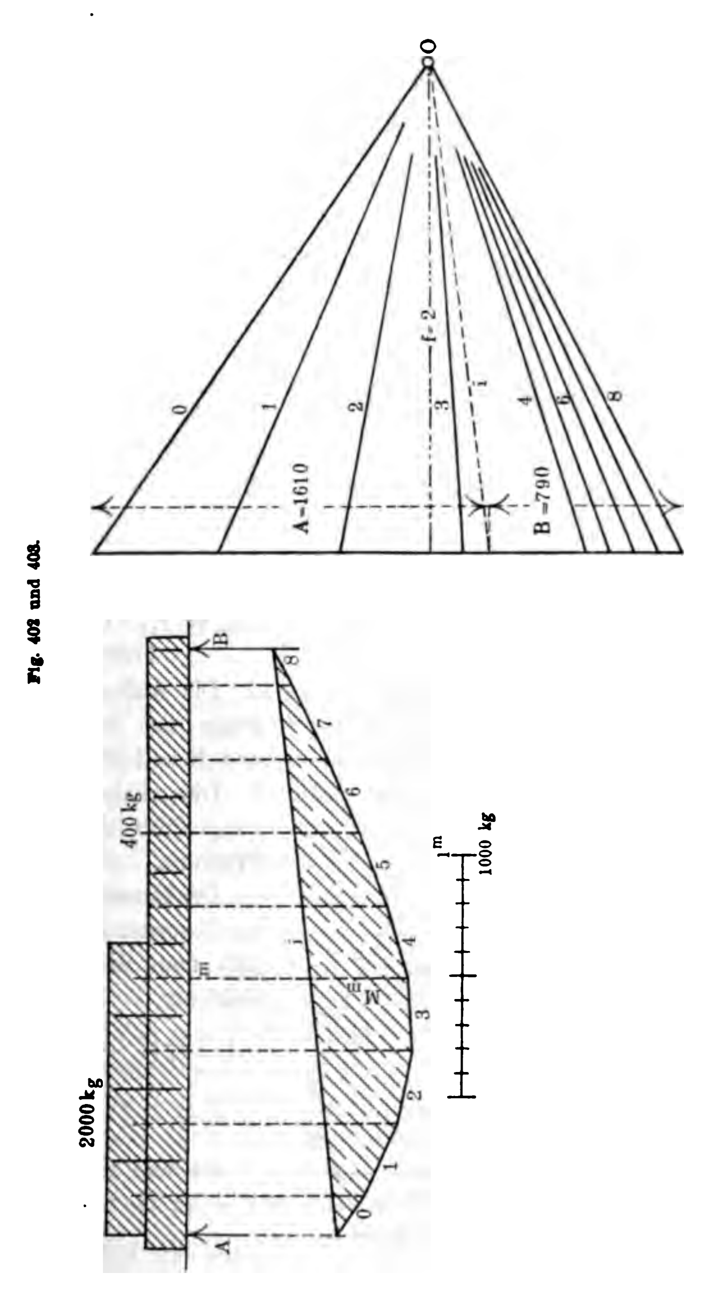


Fig. 402 und 403.

Die Kräfteeinheit ist 1000, der Polabstand $f = 2$, die Momentenordinate in m hat die Länge 0,4, somit ist das Maximalmoment

$$M_m = 0{,}4 \cdot 1000 \cdot 2 = 800 \text{ kgm}.$$

Für die zulässige Biegungsspannung $k_b = 700$ ergiebt sich

$$W^{(cm)} = \frac{800 \cdot 100}{700} = 114.$$

X. Der beistehende Träger von $l = 7$ m Länge ist auf die Entfernung $\lambda = 3{,}7$ mit $Q = 4800$ gleichmässig verteilt belastet. Wir haben diese Streckenlast in 6 Teile geteilt, das Seilpolygon mit dem beliebigen Polabstand $f = 2{,}8$ konstruiert, das Maximalmoment fällt in den Punkt m; die Ordinate in m hat die Länge 1,7, somit ist das Moment

$$M_m = 1{,}7 \cdot 1000 \cdot 2{,}8 = 4760 \text{ kgm}.$$

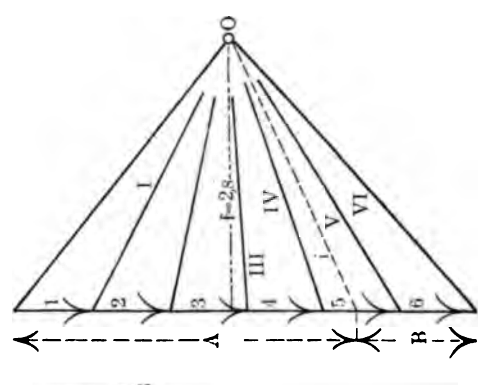


Fig. 404 und 405.

Die Auflagerdrücke ergeben sich zu $A = 3500$ und $B = 1300$ kg.

Die analytische Rechnung führt zu folgendem Ergebnis.

Denkt man eine Drehung um B vorgenommen, so erhält man die Momentengleichung

$$A l = Q\left(l - \frac{\lambda}{2}\right), \text{ woraus}$$

$$A = \frac{Q}{l}\left(l - \frac{\lambda}{2}\right).$$

Da nun allgemein $V = A - qx$ die Schubkraft ist, worin wir mit $q = \frac{Q}{\lambda}$ das laufende Gewicht für die Einheit der Länge λ bezeichnet haben, so ergiebt sich

$$V = A - \frac{Q}{\lambda} x \text{ und A eingesetzt}$$

$$V = \frac{Q}{l}\left(l - \frac{\lambda}{2}\right) - \frac{Q}{\lambda} x.$$

Das Moment wird am grössten für $V = o$, also für

$$\frac{Q}{l}\left(l - \frac{\lambda}{2}\right) = \frac{Q}{\lambda} x, \text{ das ist für } x = \lambda\left(1 - \frac{\lambda}{2l}\right).$$

Hiernach ist, diese Werte in die uns bekannte Momentengleichung $M = Ax - \frac{qx^2}{2}$ eingeführt,

$$M = \frac{Q}{l}\left(l - \frac{\lambda}{2}\right)\lambda\left(1 - \frac{\lambda}{2l}\right) - \frac{Q}{2\lambda}\lambda^2\left(1 - \frac{\lambda}{2l}\right)^2 \text{ oder}$$

$$M = Q\frac{\lambda}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{2l}\right)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 48.$$

Für $\lambda = l$ erhält man $M = \frac{Ql}{8}$, für $\lambda = \frac{l}{2}$, wenn also der Träger bis zur Hälfte belastet ist, $M = \frac{9}{64} Ql$, für $\lambda = 3{,}7$ und $l = 7$ folgt in unserem Falle:

$$M = 4800\frac{3{,}7}{2}\left(1 - \frac{3{,}7}{2 \cdot 7}\right)^2 = 4700 \text{ kgm abg.}$$

XI. Die graphische Darstellung in Fig. 401 S. 365 bezieht sich auf einen Träger oder auf eine Tragachse, welche in mehreren, hier in zweierlei Richtungen, die unter einem gegebenen Winkel α wirken, belastet sind. Die Kräfte $P_5 = 750$ und $P_6 = 1150$ wirken senkrecht, hingegen $P_1 = 800$, $P_2 = 840$, $P_3 = 490$ und $P_4 = 510$ wirken unter $\alpha = 45°$ zu der ersten Gruppe.

Wir konstruieren für jede Gruppe allein die Momentenfläche:

A I II III IV für P_1 bis P_4 und A_1 I II für P_5 und P_6.

Beide Kräftepläne und Seilpolygone ergeben je zwei Auflager $A = 1340$, $A_1 = 900$; $B = 1300$, $B_1 = 1000$ kg. Setzt man diese, wie in der Hilfsfigur rechts oben geschehen, nach dem Parallelogramm unter $\alpha = 45°$ zusammen, so ergeben sich die resultierenden Auflager $A_0 = 2060$ und $B_0 = 2100$ kg, nach welchen beispielsweise die Zapfen einer entsprechend belasteten Tragachse zu berechnen sind.

Man überträgt nun, um die Momente in derselben Weise nach dem Parallelogramm der Kräfte zusammenzusetzen, die Momentenfläche auf eine dritte natürlich gleichlange Achse $A_0 B_0$, und zwar derart, dass die Schlusslinien beider Momentenflächen in die Achse fallen, die eine Fläche

A I II ... oberhalb, die andere Momentenfläche A_1 I II .. unterhalb derselben. An jedem Winkelpunkt der beiden Flächen erfolgt jetzt eine Zusammensetzung; es genügt, an jedem derartigen Punkt die Hälfte des Parallelogramms aufzutragen, die Schlusslinie ist die jedesmalige Resultierende.

An jede Winkelpunktsordinate s, t, m trägt man $\alpha = 45°$ an, und überträgt die Länge derselben von x aus auf diesen Winkelschenkel; verbindet man dann die Endpunkte mit den Endpunkten der Momentenordinaten der andern Fläche s_1, t_1, m_1, so erhält man die Momentenresultierende s_0 t_0 m_0 ..., diese werden unterhalb oder oberhalb der Achse A_0 B_0 von x aus nach x_1 x_2 x_3 ... aufgetragen, so dass $s_0 = xx_1$, $t_0 = xx_2$, $m_0 = xx_3$ ... wird. Die Verbindungslinie A_0 x_1 x_2 x_3 .... B_0 bildet die Begrenzung der idealen oder resultierenden Momentenfläche. Man übersieht leicht, dass das aus den Linien, z. B. m m_0 m_1 gebildete Dreieck das umgekehrte halbe Parallelogramm der Momentenlinien m und m_1, bezw. t und t_1 u. s. w. unter $\alpha = 45°$ ist.

Wirkt noch eine Gruppe von Kräften etwa unter dem Winkel β auf dieselbe Achse ein, so konstruiert man zu diesen die Momentenfläche und vereinigt die Ordinaten in derselben Weise mit A_0 x_1 x_2 ... B_0 zu einer aus 3 Gruppen resultierenden idealen Momentenfläche.

In der Figur ist $xx_3 = 1{,}6$, das Kräfteeinheitsmass ist 1000 kg, sonach

$$M_i = 1{,}6 \cdot 1000 \cdot f = 1{,}6 \cdot 1000 \cdot 2 = 3200 \text{ kgm.}$$

XII. Wir haben an diese Beispiele noch einige Fachwerke angeschlossen, teilweise zur Ergänzung, teils als Nachtragsbeispiele.

In Fig. 406 bis 408 ist ein Pult- oder Vordach in den Knotenpunkten mit den Kräften P_1 bis P_7 belastet; in einem der freien Knotenpunkte, hier zwischen dem ersten und zweiten Felde, ist eine Säulenunterstützung angeordnet. Man konstruiert zunächst durch ein Seilpolygon, Fig. 407 und 408, die Auflagerreaktionen A und B. Von diesen ausgehend, reiht man die Kräfte um jeden Knotenpunkt aneinander. Man beginnt am besten mit P, 1 und 2, Fig. 406; im Falle man beim Auflager A beginnt, muss man in Rücksicht ziehen, dass, weil 22 senkrecht auf 23 ist, die Druckstrebe 23 den ganzen Auflagerdruck auf den Knotenpunkt bei P_7 übertragen muss, dieser würde dann das erste Kräftedreieck A (= 23) — P_7, 21 und 20 liefern, an welches man die Polygone der anderen Knotenpunkte anschliesst. Charakteristisch ist es bei diesem in B unterstützten Fachwerk, dass, wo das Moment in m zu Null wird, die Spannungen in den Diagonalstreben, hier in 5 und 9 wechseln, diese

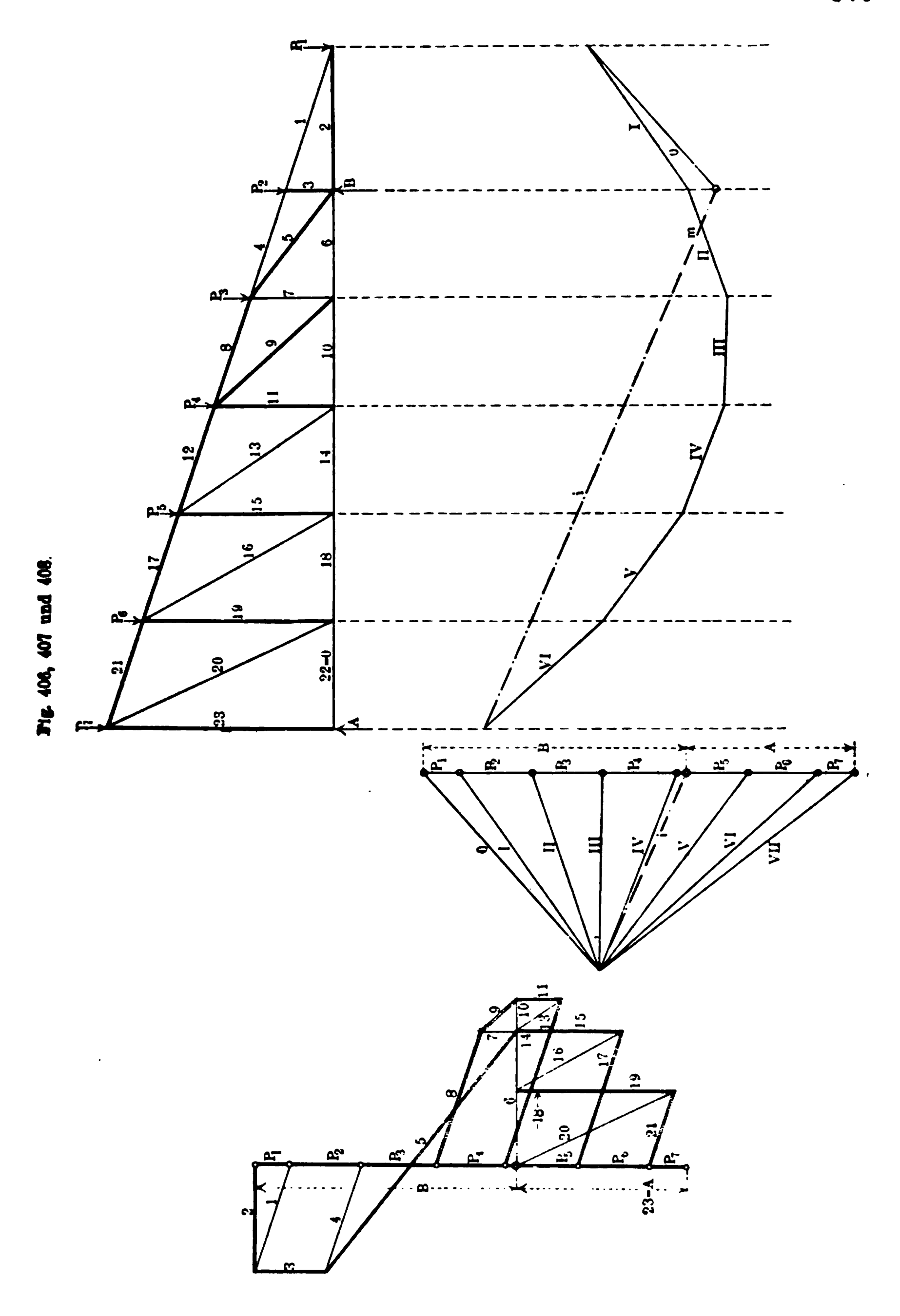
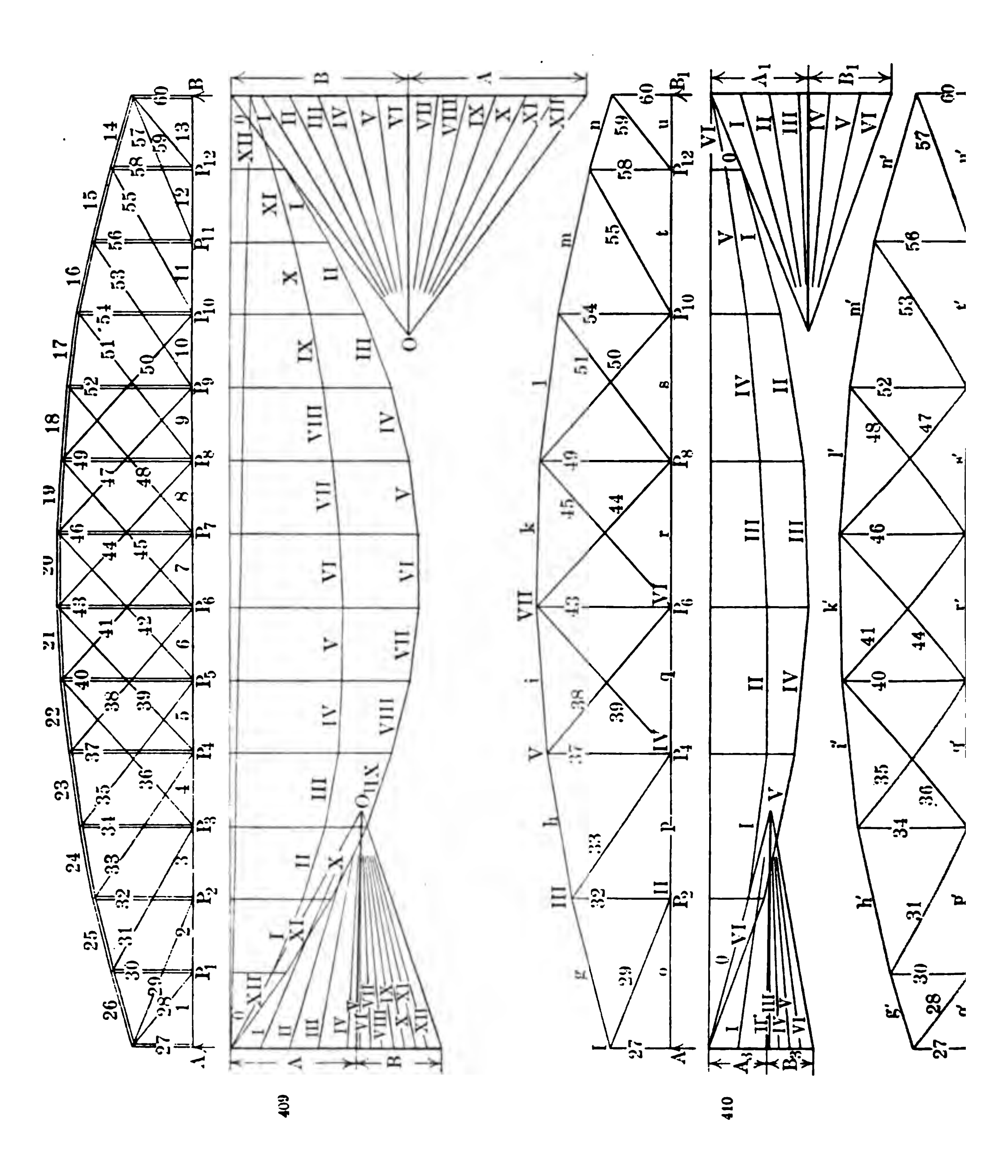


Fig. 406, 407 und 408.



409

410

413

412

sind auf Druck, während die Streben 13, 16 und 20 auf Zug beansprucht sind. Der Verlauf der Zusammenstellung der Polygone für die einzelnen Knoten dürfte wohl keine Schwierigkeiten bereiten, der Verfolg lässt sich leicht aus Fig. 406 entnehmen.

XIII. Die vorstehenden Figuren stellen die Konstruktion eines Brückenträgers mit doppelten Verstrebungen dar.

Die Belastung ergiebt sich zu 7500 kg auf d. lauf. m (vergl. die Belastungsangaben im Anhang); die Spannweite ist 40 m, sonach die Gesamtlast $40 \cdot 7500 = 300000$ kg = 300 tons. Diese verteilen sich auf 12 Knotenpunkte, auf jeden kommen sonach 25000 kg, davon 15000 kg auf die Nutzlast und 10000 kg auf das Eigengewicht.

Die erste Fig. 469 stellt den zusammengesetzten Träger dar, er zerlegt sich in die beiden Fig. 410 und Fig. 411, oder vielmehr, er ist durch Zusammenlegen dieser beiden gebildet.

1) Der Träger oder die Brücke sei voll belastet, jeder Knotenpunkt 409 mit 25000 kg, $P_1 = P_2 = P_3 \ldots\ldots = P_{12} = 25000$.

Teilt man nun den Träger Fig. 409 in die beiden Fig. 410 und 411, und belastet jeden der Knotenpunkte mit 25000 kg, so werden infolge der verschieden grossen Felderlängen die Auflagerreaktionen ungleich gross; in dem Gesamtträger der ersten Figur ist die Belastung eine symmetrische, also resultieren gleiche Auflagerreaktionen, bei den Teilträgern aber liefert die Belastung, wie erwähnt, ungleiche Auflagergrössen. Man findet sie aus den Kräfteplänen Fig. 410 und 411 rechts.

Dem Seilpolygon Fig. 410 rechts entsprechen die Auflager $A_1 = 69\,230$ kg und $B_1 = 80\,770$ kg. Die Spannungen in den Streben des Teilträgers Fig. 410 findet man durch Konstruktion der Kräftepolygone. Die Belastungen sind $P_2 = P_4 = P_6 = P_8 = P_{10} = P_{12} = 25000$, die diesen entsprechenden Auflager A_1 B_1 sind in Fig. 413 in der Zeichnung 4 mal so gross aufgetragen und vom ersten Knoten I ($A_1 = 27, .29$, g) anfangend, die Kräftepolygone konstruiert. Beim Knotenpunkt VII angelangt, erhält man für Strebe 44 eine Druckkraft; da aber die Diagonalen als Zugstangen schlaff ausgeführt werden, muss in diesem Feld eine Gegendiagonale angebracht werden. Man lässt nun 44 in der graphischen Bestimmung ganz unberücksichtigt und bestimmt in VII nur die Spannung der Streben i, k und 43. Dann geht man zum Knotenpunkt VI über, und erhält dann die Spannung für die eingelegte Diagonale 45.

Für die Auflager A_2 und B_2, Fig. 411 rechts, erhält man eine symmetrische Darstellung der Polygone, der Fig. 413 ähnliche, sie ist hier hinweggelassen.

2) Der Brückenträger sei mit $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 25000$ kg und P_5 bis P_{12} mit 10000 kg (Eigengewicht) belastet. Die Teilung der Hauptfigur 409 in Fig. 410 und 411 ist natürlich dieselbe. Man konstruiert wieder aus den Seilpolygonen die Auflagerreaktionen $A_3 B_3$, $A_4 B_4$; diesen entsprechen die Kräftepolygone der Figuren 412, auch in 4facher Grösse ausgeführt. Für b_1 muss man schon die Gegendiagonale 39 im dritten Feld anbringen, ebenfalls für c_1 die Diagonale 36, wie es sich aus der graphischen Darstellung ergiebt. —

Man kann nun in derselben Weise noch mehr Belastungsfälle durchführen und würde dann leicht erkennen, wieviel Gegendiagonalen eingesetzt werden müssen. Nach den Enden zu werden aber die Druckspannungen in den Diagonalen immer geringer und können schliesslich die schlaffen (Zug-) Diagonalen, die ohnehin schon nach den Enden zu stärker sind, den geringen Druck aufnehmen.

Nun kombiniert man, insofern, als man aus Fig. 410 und 411 symmetrische Belastungen herstellt; bedenkt man nämlich, dass, wenn die Belastung von der andern Seite auf die Brücke einwirkt, man die Anordnung der Streben in den Feldern umkehren muss: d. h. es wird z. B. Strebe 31 aus c_1 nach 55 in b kommen, oder 27 in c_1 wird der Strebe 60 in b gleich kommen u. s. w. Schliesslich deckt man die Fig. 410 und 411 aufeinander und erhält Fig. 409.

In dieser Figur sind durch diese Deckung der beiden Figuren die Auflagerreaktionen für die volle Belastung $A = A_1 + A_2$, $B = B_1 + B_2$, diesen entspricht das Seilpolygon, Polpunkt O; für die teilweise Belastung sind die Auflager in Fig. 409, $A = A_3 + A_4$, $B = B_3 + B_4$, welchen das Seilpolygon links, Polpunkt O_1 entspricht.

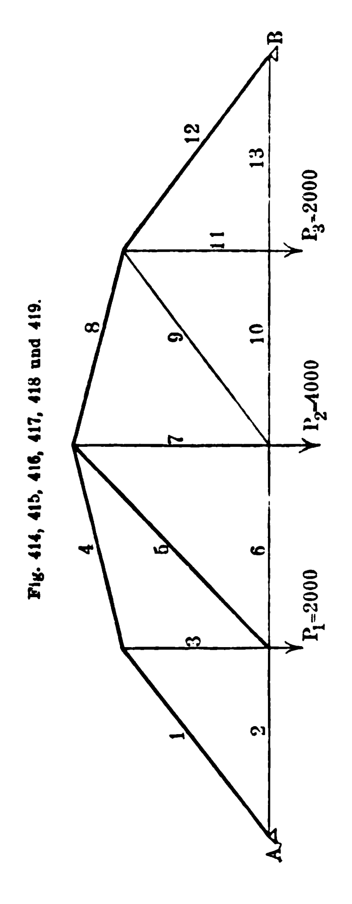
Ebenso addieren sich die Spannungen derjenigen Streben aus Fig. 410 und 411, die in 409 zusammenfallen; dies sind 27 und 60 und die obere und untere Gurtung. In der oberen Gurtung setzt sich für die volle Belastung, weil diese die grössten Spannungen liefert, die der Strebe 26 zusammen aus $g + g^1$, Fig. 410 und 411, die Strebe 25 aus $g + h^1$, Strebe 24 aus $h + h^1$ u. s. w.

In der unteren Gurtung ergiebt sich Strebe 1 zu $o + o^1$, beide = Null; Strebe 2 aus $o + p^1$, Strebe 3 aus $p + p^1$ u. s. w.

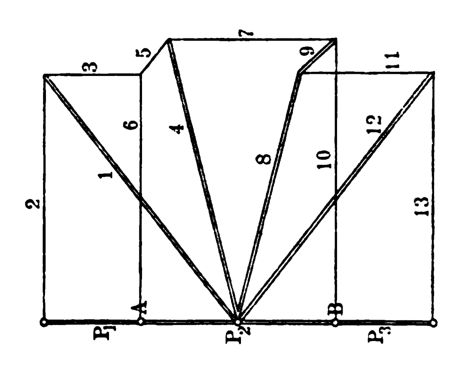
XIV. Einfacher ist die Berechnung des Trägers Fig. 418. Man kann sich diesen aus den beiden Trägern Fig. 414 und 417 zusammengesetzt denken, wenn auf jeden die Hälften der Belastungen des Trägers 418 wirken. Die letzteren sind

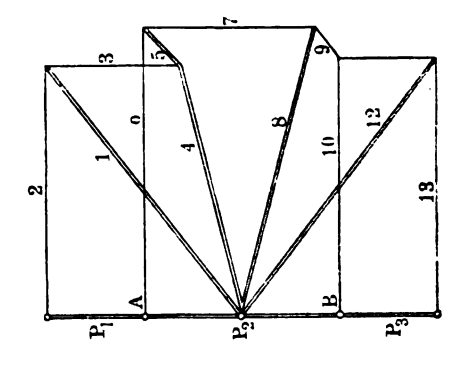
$$P_1 = 4000,\ P_2 = 8000,\ P_3 = 4000 \text{ kg}.$$

Fig. 414, 415, 416, 417, 418 und 419.



416



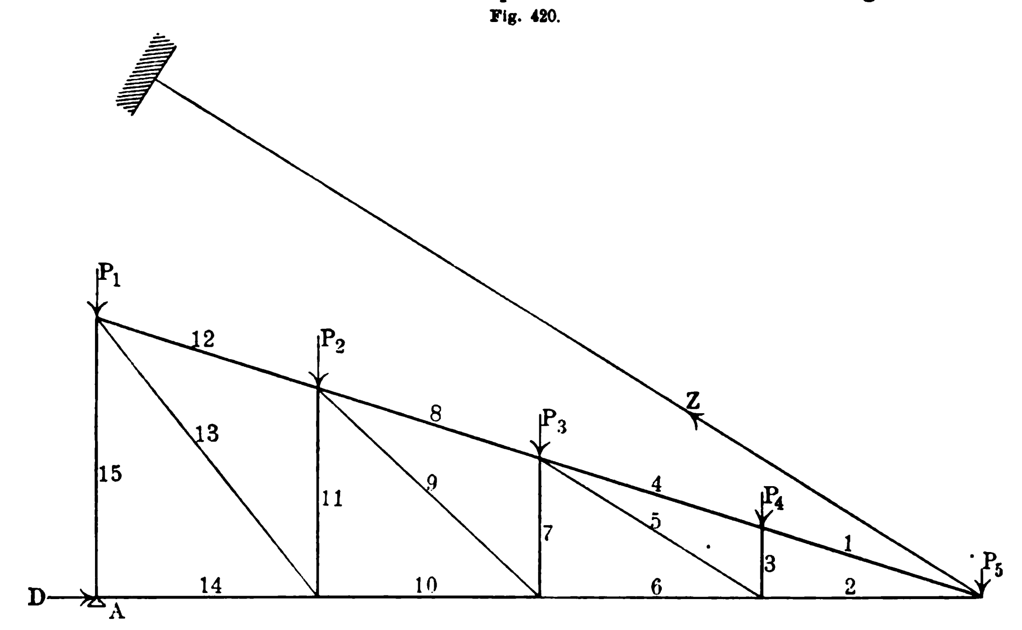


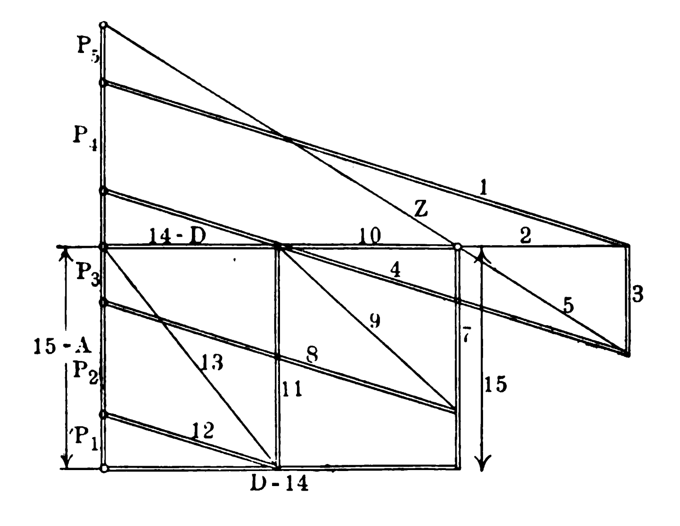
415

419

Man konstruiert nun für die beiden Teilträger mit ihren Belastungen die Kräftepolygone Fig. 115 für Fig. 414 und Fig. 416 für Fig. 417, mit den Polygonen in den Auflagern beginnend und von Knotenpunkt zu Knotenpunkt. Die Fig. 419 stellt die Kombination der Kräftepläne dar; der Verlauf der Kräfte in den Knotenpunkten lässt sich leicht verfolgen.

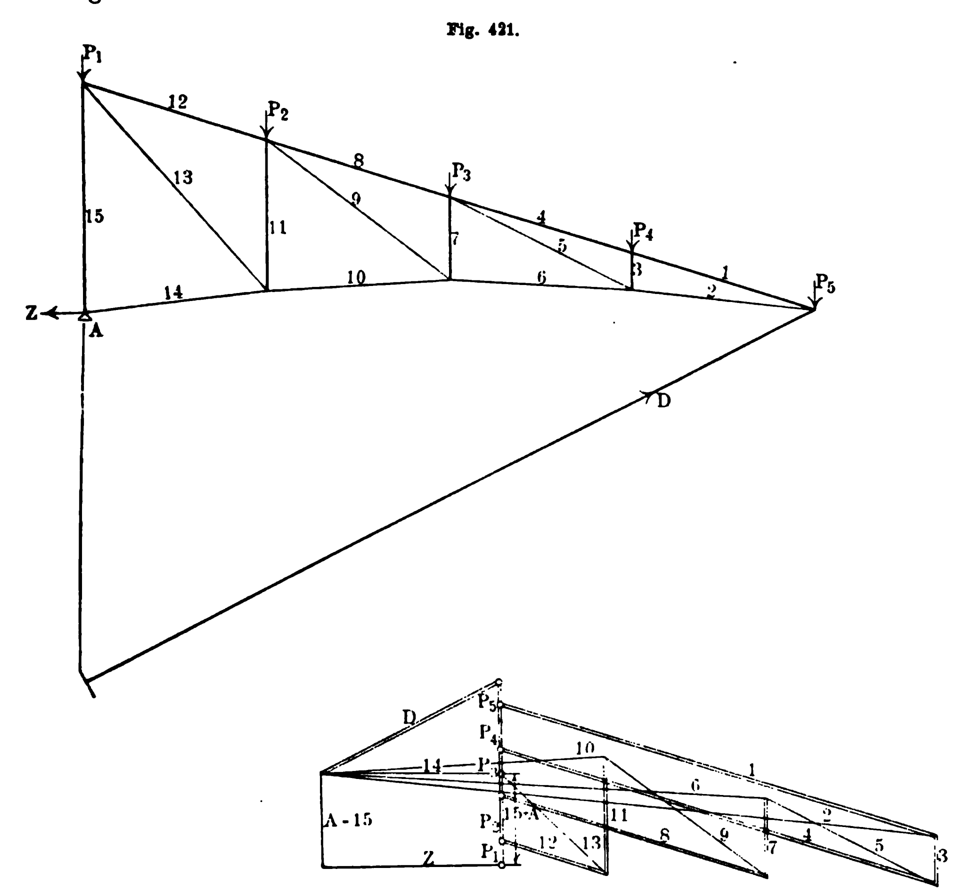
Fig. 420.





XV. Die Fig. 420 stellt noch ein Vordach mit Zugstange dar, die Belastungen der einzelnen Knotenpunkte sind P_1 bis P_5. Die Konstruktion der Kräftepläne, welche aus der Nebenfigur ersichtlich ist, bietet keine besonderen Schwierigkeiten. Man übersieht wohl leicht, dass die Neigung der Zugstange von Einfluss ist, je grösser der Winkel ist, unter dem sie sich an den Hauptfreiträger anschliesst, um so günstiger ist dies, um so geringer ist die Spannung in der Stange, um so mehr wird der Freiträger entlastet.

Fig. 421.



XVI. Der umgekehrte Fall, die Kombination eines Freiträgers, eines Vordaches mit einer Druckstange, ist in Fig. 421 durchgeführt. Um sich vom Gleichgewicht zu überzeugen, hat man nur nötig, den Kräfteverlauf in den einzelnen Knoten zu verfolgen. Die Ausführung der Polygone schliesst sich den früheren an.

4. Die Bogenkonstruktionen, Gewölbe und Pfeiler.

Wir haben bereits unter dem Namen Sichelträger, Fig. 239 u. f. S. 209 gekrümmt gestaltete Träger betrachtet, durch senkrecht wirkende Kräfte erhalten wir senkrecht wirkende Auflagerreaktionen; die durch das Netzwerk wirkenden Spannungen beanspruchen die untere Gurtung auf Zug, die obere auf Druck.

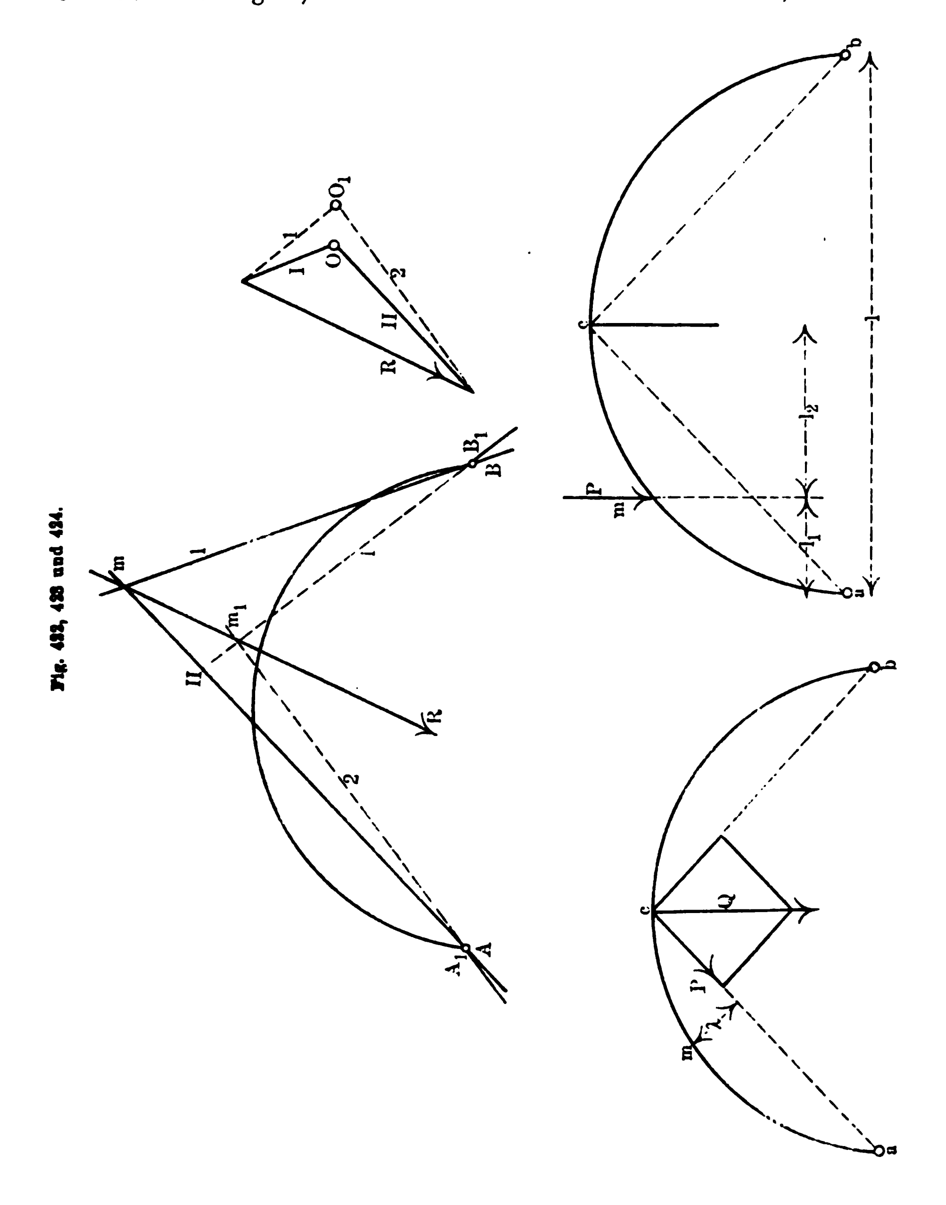
Das Urbild eines solchen Trägers in der einfachsten Form ohne Krümmung liefert uns übrigens Fig. 130 S. 118.

Denken wir uns nun einen gekrümmten Balken oder einen gekrümmten Träger, Fig. 422, frei aufliegend, ohne eine Zugverbindung der freien Auflagerenden in irgend einer Richtung mit einer oder mehreren Kräften, deren Resultierende R sei, belastet, so weichen hier die Richtungen der Auflagerreaktionen von der Senkrechten ab. Trägt man R auf, wählt einen Polpunkt O, so liefern die Polstrahlen I und II die Richtungen A und B, ein anderer Polpunkt O_1 liefert die Auflagerrichtungen A_1 und B_1, deren Grössen, da R bekannt ist, aus der Nebenfigur zu entnehmen sind. Hiernach können wir uns eine Reihe von Polpunkten wählen und erhalten natürlich auch eine Reihe von Auflagerwirkungen; es heisst dies nun soviel, als die Endpunkte des Bogenträgers A und B wirken nicht nur senkrecht, sondern auch nach aussen, seitwärts auf die anschliessenden Unterlagen und beherrschen hierbei einen Bogen, mindestens einen Viertelkreis. Wir sind daher genötigt, diesen unendlich vielen Auflagerreaktionen durch entsprechende Konstruktionen entgegenzukommen. Belasten wir den Bogen durch senkrechte Kräfte, so lehrt uns schon der oben erwähnte Fall, Fig. 130, bei welchem der gerade Stab auf Knickung beansprucht ist, dass der Bogen jedenfalls auch auf eine Druckkraft zu berechnen sein wird. Wir haben eine solche in Fig. 423 durch P angedeutet, sie bewirkt auf einen Bogenpunkt m eine kombinierte Festigkeit, und zwar aus dem Druck P und dem Moment $M = P\lambda$; wir haben nur nötig, den Bogen in m festgehalten zu denken oder zur Bildung eines Kräftepaares in m zwei entgegengesetzt wirkende Kräfte parallel P anzubringen. Es resultieren dann ähnliche Beziehungen, wie in Gl. 34 S. 311:

$$k = \frac{P}{f} \pm \frac{M}{W}; \quad \ldots \ldots \quad (49).$$

offenbar muss dann der Bogen stärker ausgeführt werden, als der gerade Stab in Fig. 130.

Die Belastung Q erzeugt jedenfalls eine Durchbiegung, eine Deformation des Bogens, welche um so auffallender werden wird, wenn die



Belastung unsymmetrisch auf den Bogen einwirkt, andererseits kann eine Belastung P, Fig. 424, einer Durchbiegung im Bogen auch entgegenwirken.

Bezeichnet man die Auflagerreaktionen für P in a und c mit A_a und A_c, so ergeben sich für die Drehpunkte c um a die Momentengleichungen

$$A_a \frac{l}{2} = P l_2 \text{ und } A_c \frac{l}{2} = P l_1, \text{ woraus}$$

$$A_a = \frac{2 l_2}{l} P \text{ und } A_c = \frac{2 l_1}{l} P.$$

Das Moment in m, welches dem obigen entgegenwirkt, ist dann

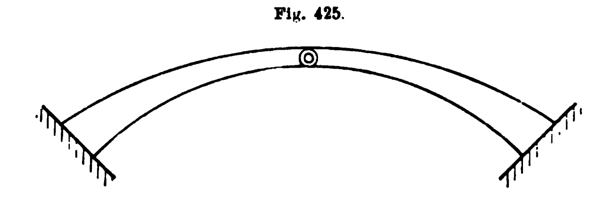
$$M = A_a l_1 = A_c l_2.$$

Spannen wir den Bogen nun fest ein und sehen auch von etwaigen Veränderungen durch die Temperatur ab, so tritt in den Auflagern eine vollständige Unbeweglichkeit ein, die Veränderungen im Bogen selbst durch die Belastungen, namentlich wenn diese einseitig ist oder fortschreitet, sind beschränkter. In den Betrachtungen der Balkenbelastungen Band II S. 146, 150 u. f. haben wir auch diesen Fall betrachtet, und zwar für einen einseitig oder doppeltseitig eingespannten Balken. Die elastischen Veränderungen durch die Durchbiegung werden jedenfalls geringer, freilich auf Kosten der Auflagereinspannung, die für solche Fälle in der Praxis wohl kaum immer den Einspannkräften entsprechend erreicht werden kann. Man sieht deshalb bei Bogenkonstruktionen von einer solchen festen Einspannung ganz ab. Die Temperaturdifferenz (vgl. S. 172) und die unvermeidlichen Elastizitätsverhältnisse zwingen hierzu. Eine Ausnahme machen allerdings die steinernen Bogenkonstruktionen, die Gewölbe, und in gewissen Beziehungen oder bis zu einem gewissen Grade die gusseisernen Bogenkonstruktionen, bei den letzteren ist immerhin noch eine Deformation vorhanden. Die Gewölbekonstruktionen sind als steife Konstruktionen zu betrachten und sollen nur Druckkräften unterworfen werden, welche sich durch die Gewölbesteine auf die Widerlager fortpflanzen. Bei solchen Bogenkonstruktionen, welche wir nicht als absolut steif betrachten können, welche also eine Deformation zulassen, das ist bei Holz- und Eisenkonstruktionen der Fall, sieht man, wie schon erwähnt, von einer festen Einspannung ab; um ihrer unvermeidlichen Beweglichkeit entgegen zu kommen, lagert man dieselben scharnier- oder gelenkartig, oder so auf, dass sie sich frei bewegen können, diese Bewegung, Drehung, ist ohnedies eine sehr geringe. In den praktischen Anwendungen pflegt man auch bei den Balkenbelastungen vielfach von einer Einspannung abzusehen, insofern als man einen eingespannten Balken als frei aufliegend betrachtet. (Vgl. die Momente und Durchbiegungen S. 107 und 152, Bd. II.)

Die Berechnungen der Deformationen, Durchbiegungen bei Bogenkonstruktionen sind mit noch viel grösseren Schwierigkeiten verbunden als bei einfachen Balken; es war uns bei Betrachtung des betreffenden Kapitels im II. Band schon nicht möglich auf elementarem Wege zum Ziele zu gelangen, hier wird es, wie gesagt, noch schwieriger, da die Temperatur auch mit in Rücksicht gezogen werden müsste*). Man sucht nun der Durchbiegung entgegen zu kommen und gleichzeitig einen sicheren Anhaltepunkt für die Auflager zu gewinnen, dadurch, dass man ein drittes Gelenk im Scheitel des Bogens anbringt. Dieses wirkt als Scharnier, es kann keinesfalls an der elastischen Formveränderung des Bogens, an der Durchbiegung teilnehmen; da es nur auf Druck beansprucht wird, so ist es nicht einmal nötig es scharnierartig mit Bolzen auszuführen, es genügt eine entsprechende nachgiebige Vernietung oder eine gekrümmte Berührung der Teile. Durch diese Annahme kann man auch von einer analytischen Betrachtung der Durchbiegung absehen, die Berechnung gestaltet sich viel einfacher ohne wesentliche Differenz in Bezug auf den Materialaufwand, bezüglich auf den Querschnitt der Konstruktion.

Durch ein solches Bogenscheitelgelenk, Fig. 425, erhalten die Auflager bestimmte Werte, es entstehen gleichsam zwei Träger, welche auf

Fig. 425.



veränderliche Momente beansprucht sind, der gesamte Bogenträger kann dann mit veränderlichen Querschnitten ausgeführt werden.

Die Bogenkonstruktionen, welche bei vollem gleichbleibenden Querschnitt kein Gelenk haben, berechnet man, um die schwierigen Elastizitätstheorien zu umgehen in der Weise, dass man stillschweigend, sagen wir theoretisch, ein Scheitelgelenk annimmt, nach dem grössten Moment den Querschnitt berechnet, diesen in gleicher Stärke durchführt und das Gelenk in der Ausführung hinweglässt. Die entstehenden Differenzen infolge der Durchbiegungen und der Temperaturdifferenzen sind von keinem grossen

*) Die Bogenbrücke über den Rhein bei Coblenz wurde s. Z. durch Baurat Sternberg nach der analyt. Theorie berechnet.

Einfluss auf den Querschnitt. Derartige Bogenkonstruktionen aus Stein und Holz führt man mit rechteckigen Querschnitten, die aus Eisen meist mit kastenförmigen oder doppelt Tförmigen Querschnitten aus.

Da nun das Gelenk C, Fig. 426, an der Durchbiegung nicht teil-

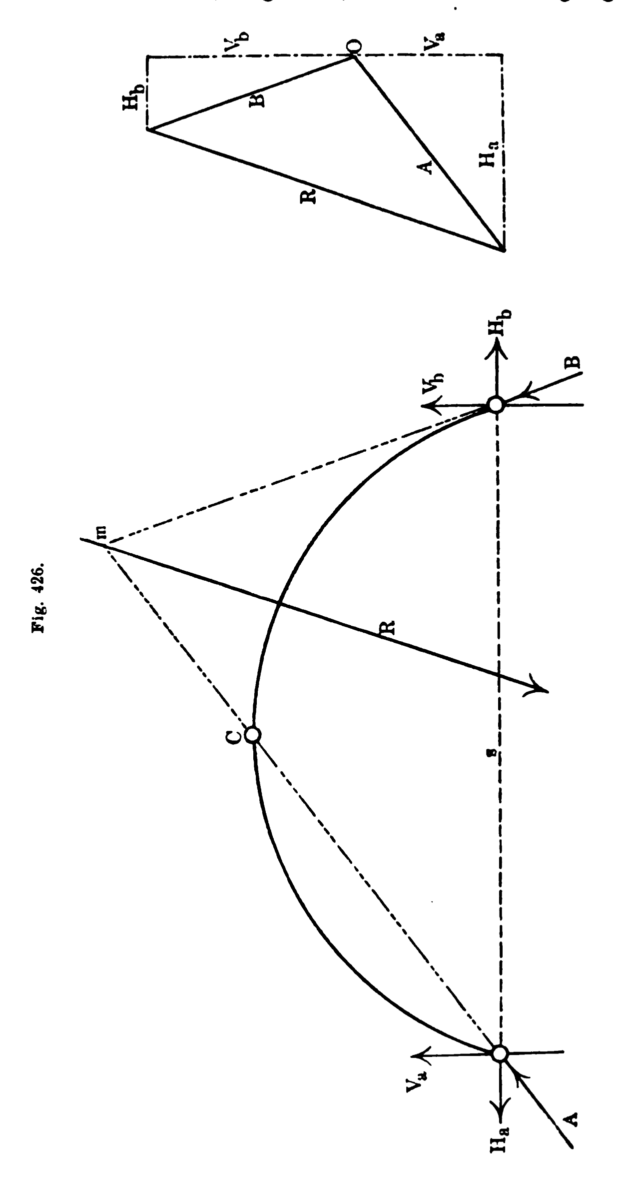


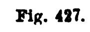
Fig. 426.

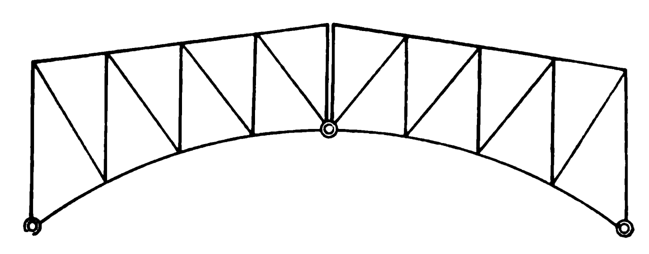
nehmen kann und die Kraft R nur einen Druck in Richtung der Linie m C A bewirkt, so ist, wie schon angedeutet, die Lage der Kraftrichtungen für die Auflager gegeben. Die eine Kraftrichtung muss durch das Gelenk C gehen; man findet sie, indem man AC bis m, dem Durchschnitt mit der gegebenen Lastrichtung R verlängert, und m mit B verbindet. Das zugehörige Kräftepolygon liefert dann, weil R bekannt, die wirklichen Grössen von A und B. Zerlegt man die letzteren in horizontale und vertikale Teilkräfte H und V, so ergeben sich auch diese aus dem Kräftepolygon in bekannter Weise.

Wenn keine horizontale Stange s vorhanden ist oder verwendet werden kann, so müssen die Stützbauten, die Pfeiler, die Kräfte H und V übernehmen. Aus dem I. Band d. Mech. S. 197 u. f. ist uns bereits bekannt, dass, je niedriger der Bogen oder je kleiner die sog. Pfeilhöhe ist, um so grösser werden die Kräfte H, und einem um so viel grösseren Seitendruck haben die Pfeiler zu widerstehen.

Bei grösseren Spannweiten und grösseren Belastungen sind die Gelenke fast unvermeidlich. Bei solchen Bauwerken würden die vollen Querschnitte, selbst wenn sie veränderlich ausgeführt werden, zu gross ausfallen, das Bauwerk würde zu schwer werden, die Spannungen, welche eintreten, lassen sich kaum übersehen, man geht dann zu Bogenfachwerken über.

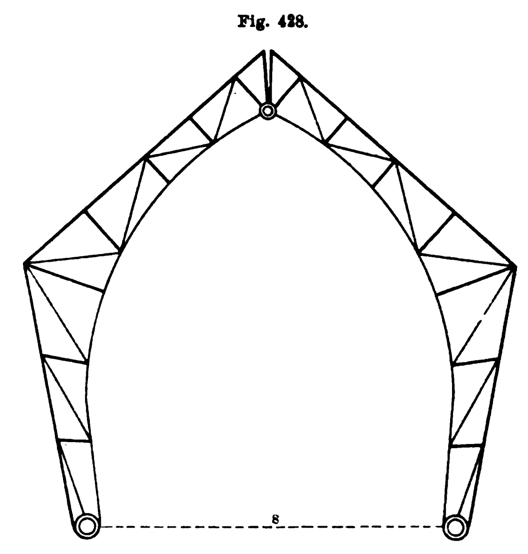
Das Fachwerk selbst, das Netzwerk, setzt man wieder aus Gelenken, bezw. Knotenpunktsdreiecken zusammen. Die äussere Form ist hierbei


Fig. 427.



an kein bestimmtes Gesetz gebunden; wesentlich ist, dass die Belastungspunkte nicht in die Bogenlinien fallen, sondern durch Verstrebungen auf dieselbe übertragen werden. Wir haben in den Fig. 427, 428 zwei Formen angedeutet, wie sie bei grösseren, niederen oder höheren Überdachungen, Hallen u. a. angewendet werden. Etwaige horizontale Kräfte, wenn sie nicht genügend seitlichen Widerstand durch Pfeilerbauten oder

Fig. 428.



Mauerwerk finden, müssen dann durch besondere offene oder verdeckte Schlauderstangen, Fundamentanker, s. Fig. 428 (bei grossen Bahnhofhallen liegen sie unterhalb der Geleise) aufgenommen werden.

In Fig. 429 haben wir noch eine Form angedeutet, die wir ähnlich bereits S. 194 im I. Band erwähnten. Wir haben hier verschiedene Kräfte, bezw. deren Resultierende R und R_1 auf die Trägerhälften angenommen. Die Verlängerungen der Auflagerrichtungen durch das Bogengelenk C ergeben die Schnittpunkte m und m_1. Aus den rechts und links gezeichneten Kräftepolygonen ergeben sich ferner die Auflagerwerte A, B, A_1 und B_1 selbst. Überträgt man A_1 parallel und gleich gross in das linke Kräftepolygon, so erhält man die resultierende Auflagerreaktion R_a, das ist die wirkliche den Belastungen R und R_1 entsprechende Auflagergrösse und deren Richtung. Überträgt man ebenso B in das rechte Kräftepolygon, so liefert das Kräftedreieck B_1 B, R_b das resultierende Auflager R_b für die rechte Seite.

Ist auf der einen Seite noch ein Winddruck W zu beachten, W mag wieder die Resultierende der einzelnen Windknotenkräfte sein, so bildet man den Schnittpunkt m_0, indem man die Richtung BC über C hinaus bis zum Schnitt mit W verlängert. Die Richtung m_0 A_w ist dann die Auflagerrichtung auf der linken Seite für den Winddruck. Um die Grössen A_w und B_w selbst zu erhalten, tragen wir im mittleren Kräftepolygon an die gegebene Kraft W beide Richtungen an, A_w B_w W ist dann das Windkraftdreieck zur Feststellung der Windauflagerdrücke.

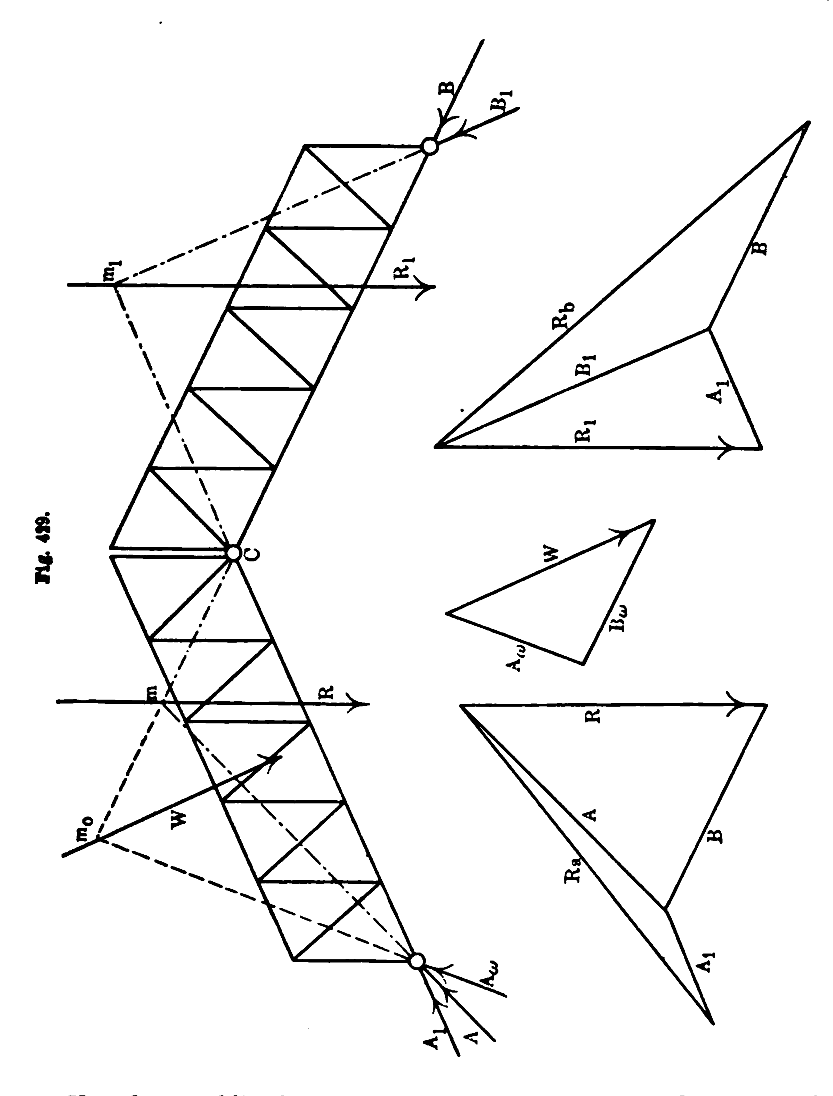


Fig. 429.

Um dann schliesslich die endgültigen Auflagerdrücke zu erhalten, welche aus den gegebenen Kräften R und W resultieren, vereinigt man durch Kräftedreiecke paarweise die Kräfte R_a mit A_w und R_b mit B_w. In einer besonderen Zeichnung haben wir diese Vereinigung nicht vorgenommen.

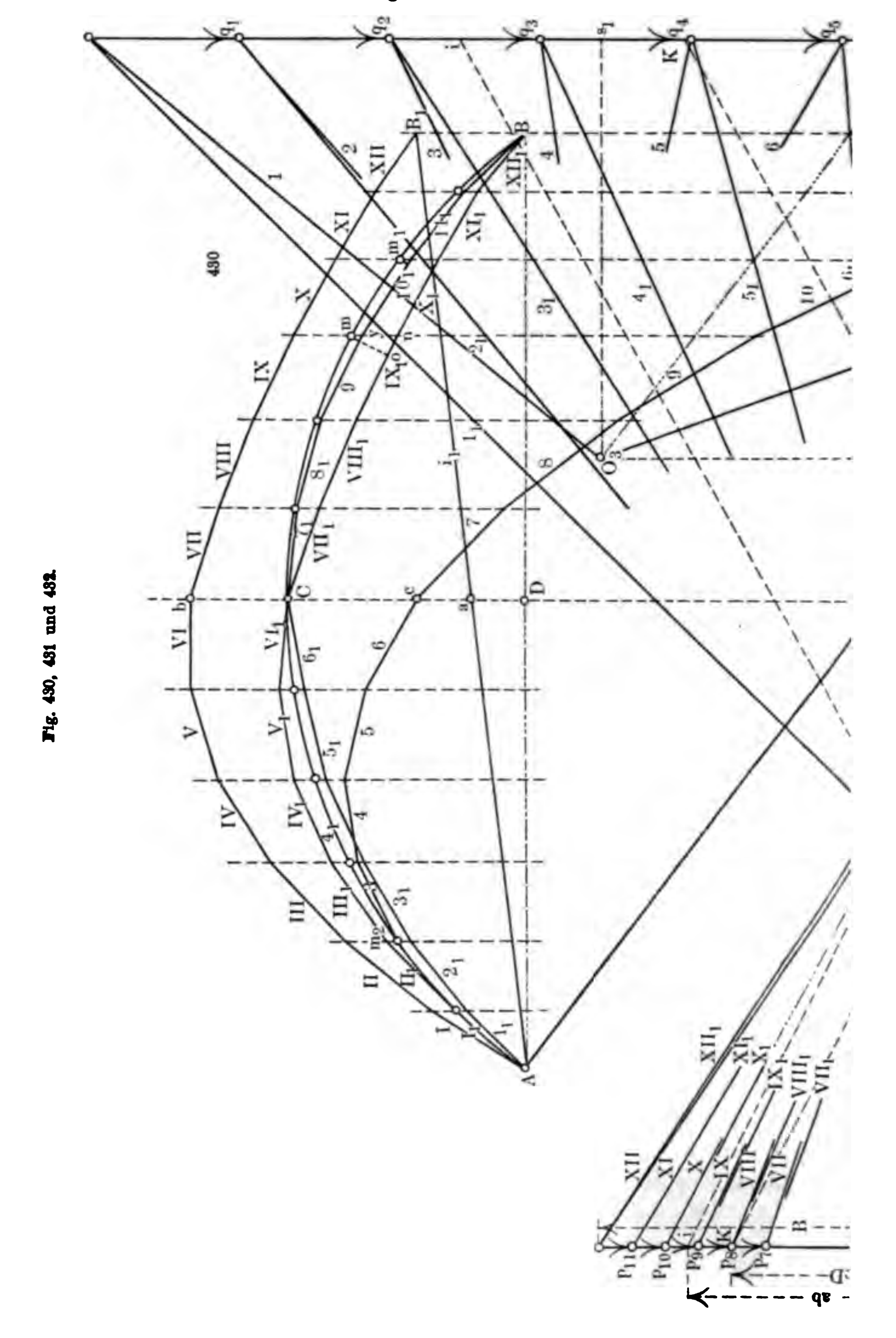
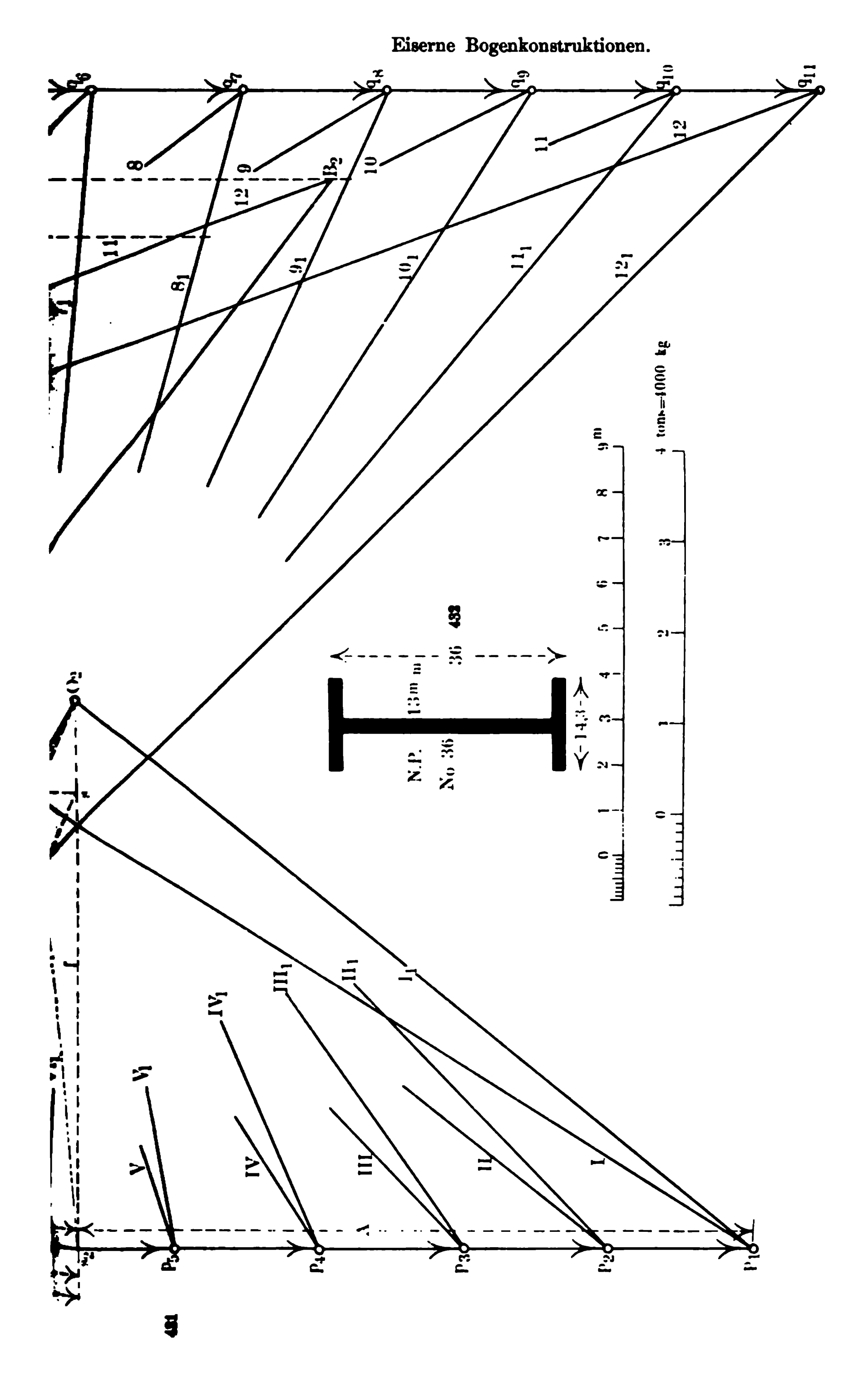


Fig. 430, 431 und 432.


431
432
N.P. No 36
13 mm
36
14,3
9m
4 tons = 4000 kg
B2
I
II
III
IV
V
I1
II1
III1
IV1
V1
8
9
10
11
12
81
91
101
111
121

Nach diesen allgemein gehaltenen Andeutungen betrachten wir zunächst eine in den Kämpfern lose aufliegende Bogenkonstruktion aus Holz oder Eisen mit vollem Querschnitt; auf steinernen Bogenbrücken, bezw. auf Gewölbe werden wir später auch noch zurückkommen. Wir setzen hier ein drittes Gelenk im Scheitel voraus, es wird dies ausgeführt, wenn die Querschnitte durch die berechneten Momente grosse Veränderlichkeit zeigen. Dasselbe kann in Wegfall kommen, wenn die resultierenden Spannungen nicht viel differieren, man wählt dann nach den Maximalwerten einen vollen Querschnitt, welcher durch die ganze Bogenlänge beibehalten wird.

I. Beispiel. Der in den Fig. 430 bis 432 gezeichnete Bogen hat eine Spannweite von 20 m, die Pfeilhöhe ist 5 m, also $\frac{1}{4}$ der Spannweite. Die Bogenbinder liegen in 4 m Entfernung und sollen möglichst einen doppelt T förmigen Querschnitt, aus Schmiedeeisen hergestellt, erhalten.

Die Belastungen nehmen wir zu 40 kg für d. qm Eigengewicht, 125 kg für d. qm Winddruck senkrecht auf den Bogen und 75 kg Schneelast für d. qm Grundfläche an. Die Länge des Bogens ist 24 m, mithin ist das Eigengewicht $24 \cdot 4 \cdot 40 = 3840$ kg, die Schneelast ist $20 \cdot 4 \cdot 75 = 6000$ kg, der Winddruck senkrecht auf den Bogen ist $125 \cdot 20 \cdot 4 = 10000$ kg. Den Winddruck in vertikaler Richtung wollen wir noch zu 100 kg auf d. qm annehmen, er beträgt dann $100 \cdot 4 \cdot 20 = 8000$ kg für einen Bogenbinder. Rechnen wir nun 11 Knotenpunkte, so sind die Belastungen eines Knotenpunktes in den verschiedenen Fällen:

Eigengewicht $p_e = \frac{3840}{11} = 350$ kg, Schneelast $p_s = \frac{6000}{11} = 550$,

Winddruck senkrecht auf den Bogen $\frac{10000}{11} = 900$ kg und Winddruck in vertikaler Richtung $\frac{8000}{11} = 700$ kg abger.

Diese Belastungen sind in der folgenden Weise kombiniert und für die Berechnung des Bogens verwertet.

1) Der Bogen ist auf der linken Hälfte mit dem Eigengewicht, Schnee und in vertikaler Richtung mit Winddruck belastet

$$350 + 550 + 700 = 1600 \text{ kg}$$

auf d. Knoten, rechts wirkt nur das Eigengewicht 350 kg auf d. Knoten. Dieser Belastungsart entspricht der Kräfteplan links, Fig. 431;

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 \ldots = p_7 = 1600, \quad p_8 = \ldots p_{11} = 350.$$

2) Die zweite Belastungsart, Eigengewicht, Schnee und vertikaler Winddruck, ist symmetrisch, für jeden Knotenpunkt dieselbe.

$$350 + 550 + 700 = 1600 \text{ kg}.$$

Dieser entspricht der rechts gezeichnete Kräfteplan für

$$q_1 = q_2 = \ldots q_{11} = 1600 \text{ kg}.$$

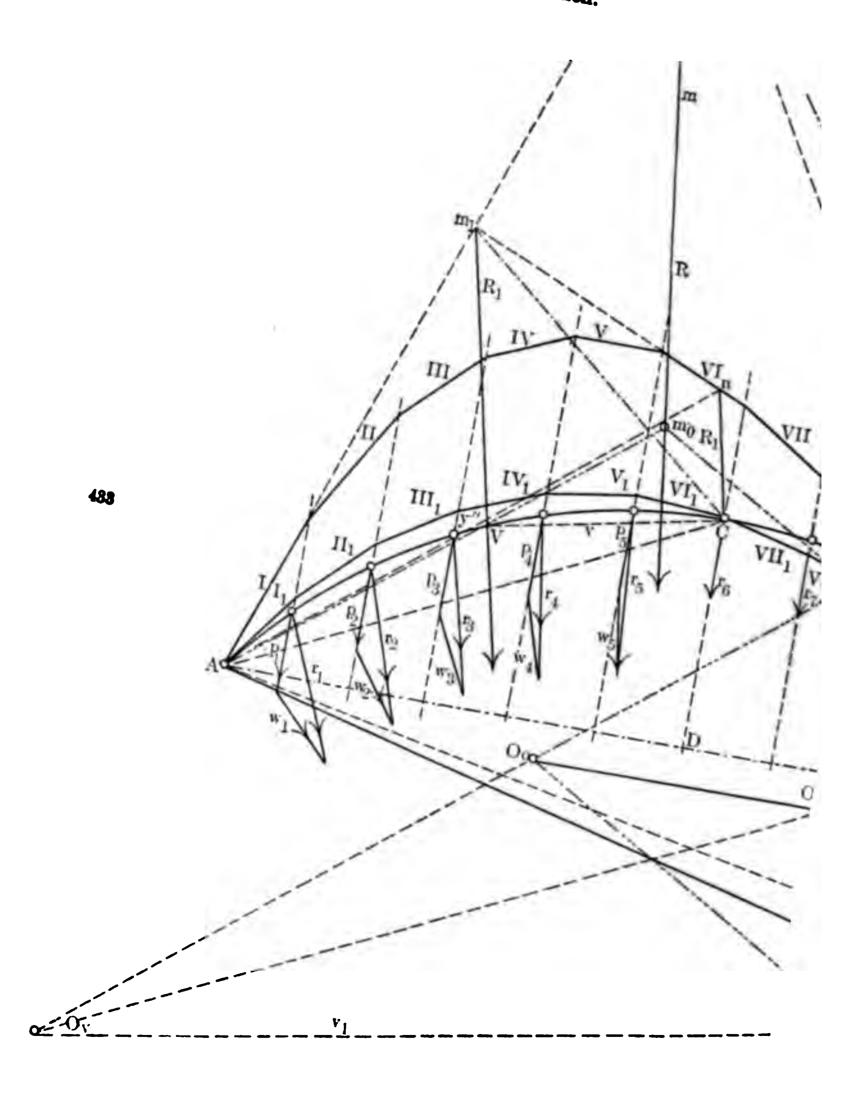
3) In Fig. 433 und 434 ist die Konstruktion für die 3. Belastungsart durchgeführt, sie bezieht sich auf das Eigengewicht und die Schneelast $350 + 550 = 900$ kg, senkrecht wirkend, und auf die Windlast, senkrecht auf den Bogen mit 900 kg; die ersteren sind mit $p_1 = p_2 = \ldots p_5 = 900$, die Windlast mit $w_1 = w_2 = \ldots w_5 = 900$ kg auf d. Knoten bezeichnet, Fig. 433, aus beiden resultieren die Kräfte $r_1 = r_2 = \ldots r_5$. Rechts ist der Bogen durch Eigengewicht und Schneelast beansprucht mit $350 + 550 = 900$ kg auf den Knotenpunkt. Im Kräfteplan, Fig. 434, sind alle Kräfte der Reihe nach mit $r_1 = r_2 = \ldots r_{11}$ bezeichnet.

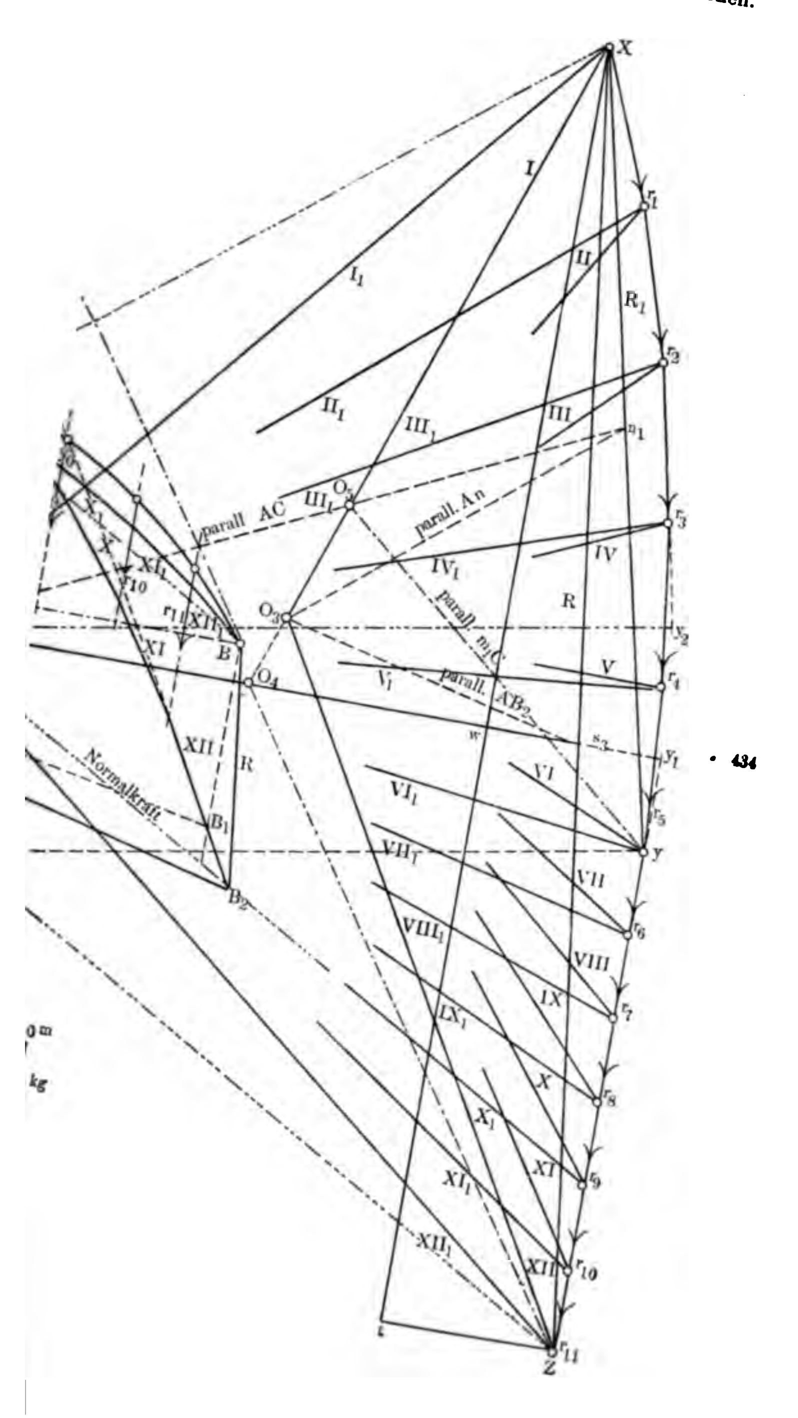
Die symmetrische volle Belastung, im 2. Fall deformiert den Bogen am wenigsten; die anderen unsymmetrischen Belastungen üben einen grösseren Einfluss aus.

Im Prinzip verfahren wir nun nach der im Sinne der Fig. 423 aufgestellten Gl. 49, S. 380. Wir suchen durch ein Seilpolygon (vgl. S. 212) mit Rücksicht auf den Polabstand die Werte P aus M festzustellen, und unter Annahme eines bestimmten Bogenquerschnittes die grösste zulässige Spannung zu ermitteln.

Wir teilen also zunächst den Bogen, Fig. 430, ABC in 12 Teile, und ziehen zur Konstruktion der Seilpolygone senkrechte Linien durch jeden Knotenpunkt. Dann tragen wir Fig. 431 die im Belastungsfall 1 angegebenen Kräfte p_1 bis p_{11} auf die Kräftelinie, nehmen einen beliebigen Polpunkt O_1 an und konstruieren ein Seilpolygon I II III ... XII, deren Schlusslinie $i_1 = AB_1$ wir in die Fig. 430 übertragen, durch den Schnittpunkt s_2, Fig. 431, erhalten wir die Grösse der Auflager A und B dieser Belastungsart entsprechend. Das Seilpolygon geht nun zunächst durch das erste Auflager A, damit es auch gleichzeitig mit B abschliesst, muss die Schlusslinie horizontal oder vielmehr parallel AB liegen. Wir führen dies nach einer der uns bekannten Konstruktionen aus (s. S. 340), indem wir in s_2 eine Senkrechte errichten, $s_2 O_2$, auf dieser als Schlusslinie muss der Polpunkt liegen, dessen Seilpolygon durch AB geht, weil jede Schlusslinie durch s_2 gehen muss. Um nun gleichzeitig den neuen Polpunkt O_2 so annehmen zu können, dass das Seilpolygon ausser durch A und B, auch durch C geht, berücksichtigen wir, dass die Polabstände $O_1 s_1$ und $O_2 s_2$ in gleichen Verhältnissen zu den Ordinaten stehen müssen. Wir erhalten demnach aus der Proportion

438


m
m1
R1
R
IV
V
III
VIn
II
m0 R1
VII
I
IV1
V1
VI1
III1
II1
C
VII1
A
D
O0
O
Ov
v1
0
1
2
3
4
5
0
1


X
I
I1
II
II1
R1
r1
r2
III
III1
n1
r3
O5
parall AC
parall. An
IV
IV1
R
O3
parall m1C
y2
r4
V
V1
parall. AB2
O4
B
XI
XII
r11
r10
X1
R
Normalkraft
B1
B2
w
s3
y1
VI
VI1
r5
y
VII1
VII
r6
VIII1
VIII
IX1
IX
r7
X
r8
X1
XI1
r9
XII1
XII
r10
r11
Z
0 m
kg

434

$$s_2 O_2 : s_1 O_1 = ab : CD, \quad s_2 O_2 = f = \frac{ab}{CD} \cdot s_1 O_1.$$

Nach dem beigefügten Kräfte- und Längenmassstab ergiebt sich

$$\overline{s_2 O_2} = 10{,}1 \cdot \tfrac{6}{5} = 12{,}1.$$

Mit Zuhilfenahme des graphomathematischen Verfahrens (s. S. 5 u. f.) übertragen wir ab aus Fig. 430 nach $s_2 i$, Fig. 431, und CD nach $s_2 k$, projizieren O_1 nach s, verbinden s mit k und ziehen durch i eine Parallele zu ks, diese schneidet die horizontale Schlusslinie f in O_2. Von diesem Punkt aus konstruiert man das Seilpolygon $I_1 \, II_1 \, III_1 \ldots . XII_1$, dieses beginnt in A, geht durch C und schliesst in B.

Die grösste Abweichung dieses Seilpolygons findet man aus der Figur, sie liegt im 9. und 10. Feld, hier ist der Bogen am meisten gefährdet.

Das Moment in irgend einem Bogenpunkt lässt sich nun darstellen durch das Produkt des Polabstandes $f = s_2 O_2$ und dem Abstand y des Seilpolygones von der Bogenachse

$$M = fy \quad \ldots \ldots \ldots \quad (50)$$

$$\text{in unserer Figur } M = \overline{O_2 s_2} \cdot \overline{mn} \ldots \quad (50a)$$

Das $\triangle$ mno im 9. Feld, Fig. 430, ist dem $\triangle$ $s_2 O_2 p_9$, Fig. 431, ähnlich, weil je 2 Seiten unter sich parallel und die Dreiecke rechtwinkelig sind. Es verhält sich

$$s_2 O_2 : \overline{mo} = O_2 p_9 : \overline{mn} \text{ oder } f : \overline{mo} = O_2 p_9 : y, \text{ woraus}$$

$$M = fy = O_2 p_9 \cdot \overline{mo} \quad \ldots \ldots \quad (50b).$$

om ist der senkrechte Abstand, wir haben ihn in Gl. 49 mit λ bezeichnet. Die Länge $O_2 p_9$, Fig. 431, ist die Grösse der Mittelkraft, welche im Bogenpunkt m wirkt, $O_2 s_2$ ist die Horizontalkraft in AB; die Seilpolygonseiten geben die Lagen und Richtungen der Kräfte an. Anstatt des Momentes $\overline{O_2 p_9} \cdot \overline{mo}$ verwenden wir also den Polabstand f und den Seilpolygonabstand y, um das Moment in m festzustellen. Im Grunde genommen sind die obigen Gleichungen (50) dieselben wie die, welche wir S. 346 entwickelt haben, Gl. 44. Wir haben nur nötig, in den dortigen Fig. 370 u. f. die Schlusslinie i in die Achse AB zu verlegen; dann stellt t in Gl. 44 den Abstand der Achse des gegebenen Balkens vom Seilpolygon in demselben Sinne dar, wie y in den obigen Figuren die Momentenordinaten, welche auch mit f multipliziert das Moment liefern.

Die Länge des Abstandes y ist nach dem beigefügten Massstab y = 1 m; der Polabstand $f = O_2 s_2 = 6060$ kg, sonach folgt

$$M = 6060 \text{ kg} = 606000 \text{ kgcm}.$$

Die absolute Druckkraft ist $P = O_2 p_9 = 6780$ kg, wenn wir die Bezeich-

nung der Gl. 49 nehmen. Dem Moment dürfte bereits für $k_b = 600$ kg das Normalprofil Nr. 36 genügen; lassen wir dieses gelten, dann erhält man als ideale Spannung

$$K = \frac{P}{f} + \frac{M}{W} = \frac{6780}{97,5} + \frac{606\,000}{1098} = 70 + 551 = 621 \text{ kg auf d. qcm.}$$

Den Querschnitt $f = 97,5$ qcm und W entnehmen wir aus der Tabelle A im Anhang, Normalprofile für doppelt TEisen. 621 kg auf d. qcm kann noch gut als zulässige Spannung gelten.

Gehen wir nun zu dem zweiten symmetrischen Belastungsfall über. Wir tragen wieder die diesem Falle entsprechenden Belastungen $q_1 q_2 q_3 \cdots q_{12}$ in einer Kräftelinie aneinander an, und konstruieren unter Annahme eines beliebigen Polpunktes O_3 das Seilpolygon 1, 2, 3, 4 . . . 12. Dieses liefert in Fig. 430 die Schlusslinie AB_2, welche parallel nach $O_3\,s_2$ übertragen wird. Projiziert man nun wieder $O_3\,s_2$ nach $s\,s_2$, und macht $s_2 K = CD$, $s_2 i = cd$ und zieht durch i eine Parallele zu sK, so erhält man, da $O_4\,s_2$ parallel zu AB ist, in O_4 den neuen Polpunkt, dessen Seilpolygon $1_1\ 2_1\ 3_1\ 4_1 \ldots 12_1$ durch die 3 Punkte A, C und B geht. Die grössten Abweichungen von der Bogenlinie liegen, wie vorauszusehen, symmetrisch, sie ergeben sich in den Punkten m_1 und m_2 zu $y = 0,3$ m. Der Polabstand ist hier $O_4\,s_2 = 8650$ kg. Die grösste Druckkraft $P = O_4\,q_2 = O_4\,q_9$ ist 10300 kg; wir erhalten sonach

$$k = \frac{10\,300}{97,5} + \frac{8650 \cdot 30}{1098} = 343 \text{ kg auf d. qcm}$$

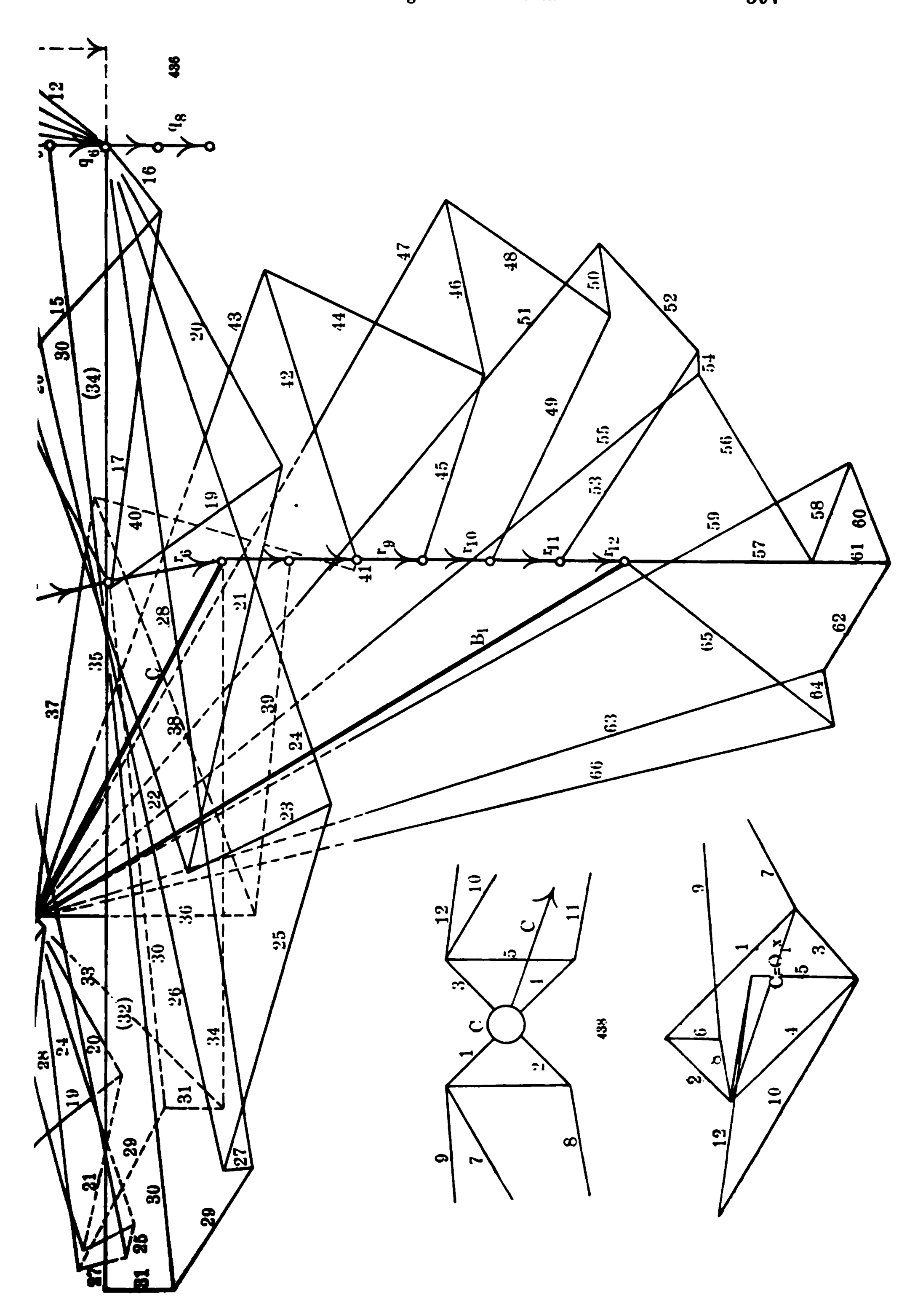
grösste Spannung in der äussersten Faser des Querschnitts, welche durch die symmetrische Belastung entsteht.

Der Polabstand $O_4\,s_2$ ist gleichzeitig die Zugkraft zwischen A und B.

Die Fig. 333 und 334 auf S. 392 u. 393 stellen die graphische Untersuchung in Bezug auf den 3. Belastungsfall dar. Hier beansprucht der Wind, senkrecht auf den Bogen wirkend angenommen, denselben auf der linken Seite mit $w_1 = w_2 = \ldots w_5 = 900$ kg, gleichzeitig wirken, senkrecht angenommen, Eigengewicht und Schneelast $p_1 = p_2 = \ldots p_5$ mit je 900 kg, aus beiden ergeben sich die Resultierenden $r_1\ r_2 \ldots r_5$. Wir übertragen diese Kräfte in Richtung und Grösse nach Fig. 434 und schliessen an diese die auf der rechten Bogenseite wirkenden Kräfte, Eigengewicht und Schneelast, mit je 900 kg an.

O_3 ist wieder der zunächst angenommene beliebige Polpunkt, dessen Seilpolygon I II III . . . XII auf der Windseite in die Verlängerungen der Kräfte $r_1\ r_2 \ldots$ übertragen werden muss, dasselbe ergiebt die Schlusslinie AB_1. Die Kräfte Σr bilden die Resultierende $R = \mathfrak{X}Z$, der Angriffspunkt derselben m, welcher ausserhalb unserer Zeichnung liegt, ergiebt

Fig. 435, 436, 437 und 438.



sich durch Verlängerung der letzten Seillinien I und XII. Würde XII durch B gehen, in B enden, so wäre die Schlusslinie AB_1 horizontal. bezw. parallel AB und wir hätten nur noch nötig, den Polpunkt für das Seilpolygon durch C, A und B zu suchen. Verbinden wir nun m mit B, so bilden die Linien Am und Bm den Abschluss für einen Polpunkt. der in der Linie $\mathfrak{X}O_3$ liegen muss, und dessen Seilpolygon durch A und B geht. Wir haben nur nötig, eine Parallele zu mB durch Z zu ziehen. der Schnittpunkt O_4, hier in der Verlängerung von $\mathfrak{X}O_3$ ist dieser Polpunkt. Die beiden Linien $\mathfrak{X}O_4$ parallel mA und ZO_4 sind parallel den letzten Seilpolygonlinien, welches Seilpolygon allerdings selbst nicht ausgeführt ist, da es noch nicht durch C geht. Nimmt man auf R einen andern Punkt m_0 an und zieht die Linien m_0A und m_0B, so liefern Parallele durch $\mathfrak{X}$ und Z zu diesen Linien wieder einen Polpunkt O_0. dessen Schlusslinie auch durch A und B gehen muss, es ist auch für diesen Polpunkt nicht erforderlich das Seilpolygon selbst auszuführen. Da nun für O_4 und O_0 die Schlusslinie durch AB geht, so muss derjenige Polpunkt, dessen Seilpolygon durch A, C und B geht, in der Linie O_0O_4 liegen, wir ziehen also zunächst O_0O_4 eine horizontale, bezw. parallele Linie zu AB, richtiger gesagt, die Verbindungslinie O_0O_4 muss bei richtig gelungener Zeichnung parallel AB sein.

Zieht man durch B eine Parallele zu R, so trifft diese die Seillinie XII oder deren Verlängerung in B_2. Eine Parallele zu AB_2 durch O_3 muss mit dem Schnittpunkt s_3 der Linie O_0O_4 (parallel AB) zusammenfallen. Im Punkt s_3 halten sich R, die Kraft in AB und die in AB_2 gedachte das Gleichgewicht; s_3 teilt sonach R in zwei in die Richtung R fallende Auflagerkräfte A und B entsprechend.

Nun benötigen wir noch das Seilpolygon durch C. Innerhalb AC, das heisst innerhalb der Seilzüge I und VI liegt die Resultierende $R_1 = \mathfrak{X}y$. Um die Lage von R_1 in Fig. 433 zu finden, verlängert man VI bis m_1 (m_1 muss in die Linie von Am fallen), und zieht durch m_1 eine Parallele zu R_1. Jetzt verbindet man m_1 mit C und zieht die Parallele yO_5 durch y. Der Polpunkt O_5 entspricht dann wohl dem Seilpolygon durch A und C, aber noch nicht einem durch A, B und C. Übertragen wir nun weiter die Resultierende R_1 parallel durch C, so trifft diese den Seilzug VI in n. Man verbindet nun A mit n und zieht durch O_3 die Parallele O_3n_1 zu An. Durch n_1 erhalten wir sonach den analogen Teilungspunkt für R_1, wie wir s_3 für R fanden. Die Teile Zn_1 und n_1y würden etwaigen Auflagerkräften in A und C entsprechen, den Belastungen $r_1 + r_2 + \ldots + r_5$ bezw. R_1 zukommend. Eine Parallele durch n_1 zu

AC geht durch O_5 und trifft $O_0 O_4$ in O_6. Der letztere ist der gesuchte Pol. Eine Zeichnungskontrolle findet sich dadurch, dass man den Schnittpunkt V der Resultierenden R_1 mit Am_0 sucht, er fällt hier in den Bogen, und V mit C verbindet, zu VC eine Parallele yO_v durch y zieht. O_v in $\mathfrak{X}O_0$ muss in die Linie O_5O_6 fallen.

Zu dem Polpunkt O_6 konstruiert man dann das Seilpolygon I_1 II_1 III_1 ...., welches die 3 Gelenke A, C und B schneidet. Zwischen dem 9. und 10. Feld ergiebt sich die grösste Abweichung vom Bogen, wir haben sie mit y_0 bezeichnet.

Das grösste Moment ist demnach

$$M_{max} = \overline{O_6\, y_1} \cdot y_0;$$

weil $O_6 y_1$ der Normalabstand des Polpunktes von der Kraftrichtung der Knotenpunkte rechts ist.

Das Moment bei r_8 würde sich ergeben aus dem Produkt

$$M = O_6 y_2 \cdot y^{11}.$$

Die Normalkraft für y_0 ist die Kraftlinie $O_6 r_9$.

Man erhält, $y_0 = 0{,}65$ aus der Zeichnung entnommen,

$$M_{max} = 8100 \cdot 0{,}65 = 5265 \text{ kgm}.$$

$$P = \overline{O_6 r_9} = 9{,}3 \text{ tons} = 9300 \text{ kg, somit}$$

$$K = \frac{9300}{97{,}5} + \frac{5265 \cdot 100}{1098} = 580 \text{ kg auf d. qcm.}$$

Das gewählte Normalprofil Nr. 36 ist also noch hinreichend auch für diese Belastungsart.

Es ist natürlich, dass der Wind ein grösseres Moment auf den Dachstuhl ausübt, wenn der letztere höher ist. — Zieht man in Fig. 434 die Senkrechte $\mathfrak{X}t$, welche die Horizontale $\overline{O_0 y_1}$ in w schneidet, so ist $O_6 w$ der Bogenschub, $\overline{wy_1} = \overline{tZ} = 1900$ kg der einseitige horizontale Windschub. Wenn zwischen A und B Zugstangen vorhanden sind, so muss das eine Lager beweglich konstruiert werden, die Zugstange hat der Kraft $O_6 y_1 =$ 8100 kg Widerstand zu leisten; diese ist etwas geringer als die Horizontalkraft $O_4 s_2 = 8650$ kg in Fig. 430.

II. Wir haben in den vorstehenden Fig. 435 bis 438 einen Bogenfachwerksträger ausgeführt; um die Zeichnung im Rahmen des vorhandenen Raumes ausführen zu können, haben wir keinen allgemeinen Massstab zu Grunde legen können; die Spannweite war ursprünglich zu 18 m angenommen und die Belastungen denen der vorigen Figuren nahezu gleich. Aus den eingeschriebenen Zahlen und Buchstaben dürfte man die Konstruktion für jeden andern Fall unschwer entnehmen können.

Das Bogenfachwerk hat 3 Gelenke A, B, C, in den Punkten D und

E lehnt es sich an eine Wand an, das Gelenk C kann als volles oder als Strebengelenk, Fig. 438, ausgeführt werden; die Druck- und Zugstreben sind durch verschieden starke Striche, nicht durch Pfeile markiert. (Die Druckstrebe 2 bei A ist irrtümlich als Zugstange gezeichnet.) Der Verfolg der Pfeilrichtungen in jedem Knoten liefert, wie früher, Zug und Druck. Man teilt zunächst das Bogenfachwerk ein und verzeichnet das Netzwerk 1 bis 65.

1. Der Bogen ist in den Knotenpunkten gleichmässig mit je q kg belastet; hierzu wurde der rechte Kräfteplan Fig. 436 konstruiert, in diesen ist $q_1 = q_2 = q_3 \ldots . = q_{12}$. A und B werden hier gleich gross, es genügt eventuell die Konstruktion der Kräftepolygone für das halbe Fachwerk. Man beginnt mit A, 1, 2, schliesst den Knoten 1, 3, 4, dann 2, 3, 5, 6 u. s. w. an. Ist genügend Raum vorhanden, so ist es immerhin übersichtlicher, die Polygone sämtlicher Knotenpunkte auszuführen. Die Bestimmung von Druck und Zug, sowie die Aufstellung der Kräftetabelle nach dem zu Grunde liegenden Massstab geschieht wie früher.

2. Das Fachwerk ist linksseitig durch Seitenkräfte belastet; zu diesen benötigen wir das unterhalb Fig. 435 gezeichnete Seilpolygon. Die auf der linken Seite wirkenden Seitenkräfte, welche als Resultierende von Windkräften und senkrechten Belastungen gelten können und die rechts wirkenden senkrechten Kräfte r_7 bis r_{12}, etwa Eigengewicht und Nutzlast, werden in einen Kräftezug r_1 bis r_{12} aufgetragen, sie liefern die Resultierende R. Man nimmt nun einen beliebigen Polpunkt O an und konstruiert das Seilpolygon 1, 2, 3 . . . . . . 13, dieses wird von A anfangend in die Knotenkraftrichtungen übertragen, die letzte Pollinie 13 geht vom Schnitt der Kraft r_{12} in Fig. 435 in die Kraftlinie R = By, welche durch B parallel zur Resultanten R gezogen wurde, dadurch erhält man den Schnittpunkt y. Die Schlusslinie Ay = i überträgt man parallel i_1 durch den gewählten Polpunkt O und findet den Teilpunkt s in der Resultanten ZW.

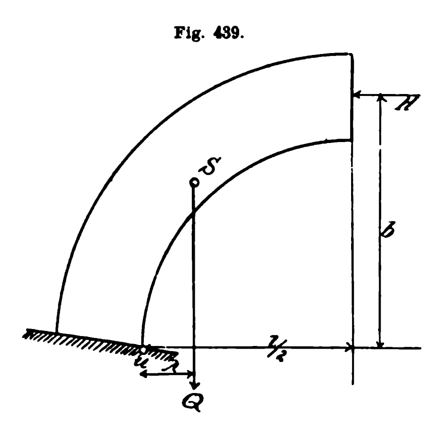
Der nun zu suchende Polpunkt O_1, dessen Seilpolygon durch A, B und C geht, liegt der Schlusslinie AB = n entsprechend in der Horizontalen O_1 s, bezw. in der zu AB Parallelen n_1. Damit das Seilpolygon auch durch C führt, suchen wir die Resultante R_1 = xZ der Kräfte von A bis C, und übertragen diese parallel durch C, diese schneidet die dem Gelenk C entsprechende Seillinie, hier die Linie 7, bezw. deren Verlängerung in m; man verbindet nun A mit m und überträgt diese Linie p parallel durch O nach Ot. Zieht man dann durch den soeben ge-

fundenen Schnittpunkt t eine Parallele $tO_1 = v_1$ zu $v = AC$, so ergiebt sich durch den Schnitt mit der Horizontalen n_1 der gesuchte Polpunkt O_1. Die Schlusslinien O_1Z und O_1W sind dann die der 2. Belastungsart entsprechenden Auflager A_1 und B_1. Das aus O_1 konstruierte Seilpolygon I, II... XII, XIII geht durch A, C und B; die letzte Kraft schneidet bei genauer Zeichnung in B ein. Die Seilkraft O_1x entspricht der Scheitelgelenkkraft in C. Man beginnt nun bei A, C oder B mit Rücksicht auf die soeben gefundenen Kräfte A_1, C und B_1 am besten in einer besonderen Zeichnung, Fig. 437, und konstruiert Knotenpunkt für Knotenpunkt die Kräftepolygone. Um in unserer Zeichnung eine grössere Übersicht zu gewinnen, haben wir die Kraftlinien A_1C, B_1 und $r_1\, r_2 \ldots r_{12}$ verhältnismässig vergrössert. Bei richtiger Zeichnung muss Polygonschluss stattfinden. Im Prinzip entstehen 2 Trägerhälften, die in C getrennt sind. AC bildet mit seinen Kräften die linken, BC den rechten Auslader. Die Ausführung der Kräftepolygone in Fig. 436 und 437 und die Bestimmung von Zug und Druck im Netzwerk geschieht nach den uns bekannten Grundsätzen.

Die Kräfteverteilung in Gewölben.

Wir hatten in den vorstehenden Betrachtungen bereits auf den Zusammenhang der Gewölbebogen mit den eben besprochenen Bogenkonstruktionen hingewiesen, und wollen nun näher auf jene eingehen. Auch im I. Band d. Mech. bei Gelegenheit der Stabilitätsbetrachtungen, S. 201 u. f. haben wir in dem gleichen Sinn wie bei Stützmauern versucht mit Hilfe der statischen Momente auf analytischem Wege eine Gleichung aufzustellen, nach welcher wir die Kraft in der Gewölbefuge im Scheitel entwickelten, um aus dieser auf die Dimensionen zu schliessen.

Fig. 439.



Aus der Momentengleichung für die Sturzkante u, nach vorstehender Figur ist

$$H = Q\frac{\lambda}{b}.$$

Bezeichnen wir nach Gl. 83, Mech. I. Band, mit P das Eigengewicht für ein 1 m breites Gewölbe, mit K die Verkehrslast; auch auf 1 m Breite reduziert, so erhält man für das halbe Gewölbe

$$H = \frac{P + K}{2}\frac{\lambda}{b} \quad \text{. . . . .} \quad (51)$$

Ist ferner e die Mauerschichtstärke im Scheitel, k_d die zulässige Druckspannung auf d. qm, dann ist für ein B^m breites Gewölbe

$$H = eBk_d \quad \text{. . . . .} \quad (51\,a)$$

Für $B = 1$ folgt durch Gleichsetzung mit (51)

$$e = \frac{P + K}{2}\frac{\lambda}{b\,k_d} \quad \text{. . . . .} \quad (52)$$

Die hieraus abgeleitete empirische Formel ist

$$e = c + \frac{P + K}{2}\frac{\lambda}{b\,k_d} \quad \text{. . . . . .} \quad (52\,a),$$

wenn c eine Konstante bedeutet; man kann für die letztere annehmen $c = 0{,}2$ bis $0{,}25$ m für Brücken, $c = 0{,}1$ bis $0{,}15$ m für Gewölbe im Hochbaufach.

Für Kreis- oder Tonnengewölbe kann man im Durchschnitt die Entfernung des Schwerpunktes von der Kante u zu $\lambda = \frac{1}{4}\,l$ annehmen. Genauere Resultate liefern die auf S. 203, im I. Band d. Mech. aufgestellten Formeln.

Mit $\lambda = \frac{1}{4}\,l$ im Durchschnitt erhält man

$$e = c + \frac{P + K}{8\,K_d}\frac{l}{b} \quad \text{. . . . . . .} \quad (53),$$

für elliptische Gewölbe ist $\lambda = \frac{1}{5}\,l$ im Durchschnitt, danach

$$e = c + \frac{P + K}{10\,K_d}\frac{l}{b} \quad \text{. . . . .} \quad (53\,a).$$

Das Eigengewicht P für 1 m Breite kann man nach der Formel (s. S. 205, Band I)

$$P = 500\,l\,\sigma\,(b + 0{,}6)\ \text{kg} \quad \text{. . . . . .} \quad (54)$$

annehmen, wenn σ das spec. Gewicht des Materials, b^m, wie oben, die Stichhöhe, l^m die Spannweite ist.

Man berechnet nun die Stärke der Scheitelfuge e nach einer der vorstehenden Formeln und trägt das Gewölbe vorläufig in derselben Fugenstärke auf; die Kämpferfuge muss theoretisch stärker werden, da sie ausser dem Scheitelfugendruck H noch das weitere Mauergewicht auszuhalten hat.

Die Aufgabe, welche wir uns nun in der folgenden Untersuchung stellen wollen, besteht darin, den Verlauf des Druckes vom Scheitel zum Kämpfer zu untersuchen, ob einesteils die berechneten Dimensionen genügen, ob keine unzulässigen Spannungen auftreten, andernteils, ob auch die gewählte und gezeichnete Form der Gewölblinie selbst genügt. Auf die Einwirkung des Kämpferdruckes auf die Widerlager kommen wir dann später zurück.

Den Verlauf des Druckes, abhängig von den äusseren Belastungen und vom Eigengewicht — Hintermauerung —, erkennen wir aus der Drucklinie — Mittellinie des Druckes, deren analytische Berechnung wir bereits im I. Band S. 196 u. f. durchgeführt haben. Der Verlauf der Drucklinie muss so sein, dass der Druck auf die Gewölbesteine immer innerhalb der Gewölbfugen liegt, möglichst im Kern derselben, so dass kein Klappen der Fugen, also keine excentrischen Spannungen eintreten; wenn dies der Fall, so muss das Gewölbe entsprechend verstärkt werden. Die graphische Darstellung der Drucklinie ist, wie bei den Kaminen und Futtermauern, ein zu konstruierendes Seilpolygon, welches, wie bei den eben besprochenen Bogenkonstruktionen, durch den Scheitel verläuft und in den Auflagern, den Kämpferfugen, endet, aber, wie schon erwähnt, möglichst innerhalb der Kernbegrenzung bleiben soll.

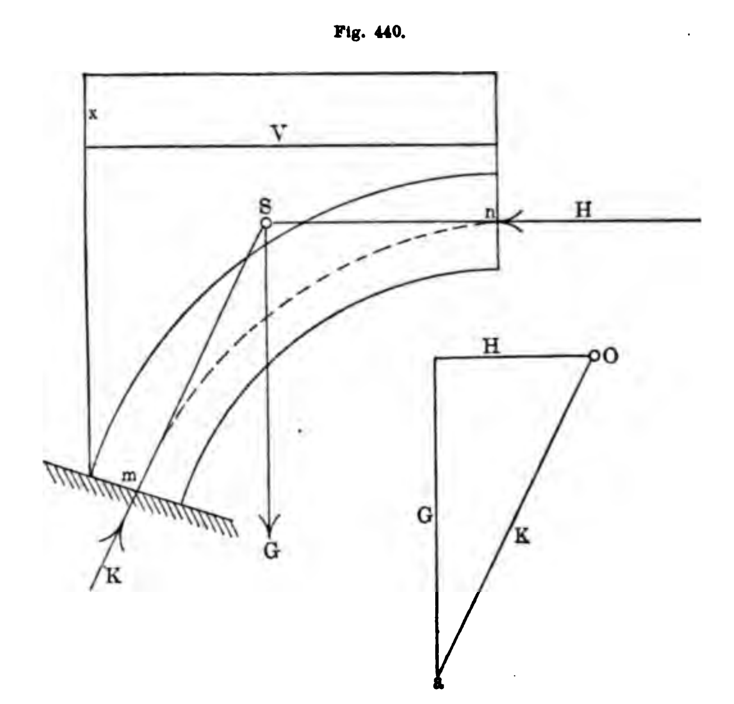
In Bezug auf die veränderlichen, bezw. beweglichen Belastungen der Gewölbe schlagen wir denselben Weg ein, wie bei den Futtermauern, wir verwandeln die Verkehrslast, welche aus verschiedenen Materialien besteht, in eine Last von einer zu berechnenden Höhe, welche dem spec. Gewicht des Gewölbematerials entspricht (s. S. 307 Beisp. III).

Das zu konstruierende Seilpolygon, die Mittellinien des Druckes, lassen wir aber nicht, wie in den vorstehenden Bogenkonstruktionen in den Auflagern beginnen, sondern im Scheitel des Bogens durch eine horizontale Kraft H, welche durch den Schwerpunkt, bezw. hier Mittelpunkt des Scheitelfugenquerschnittes geht und den Scheitelquerschnitt auf absoluten Druck beansprucht, nach welchem wir oben bereits den Wert e berechnet haben; der Auslauf dieses Seilpolygons in den Auflagern, in den Kämpferfugen muss gesucht werden, er ergiebt sich aus der Konstruktion und soll bei richtiger Form des Gewölbbogens wenigstens im Kern verlaufen, andernfalls muss, wie schon erwähnt, die Form des Gewölbbogens danach gerichtet werden; wie weit dies in den einzelnen Fällen möglich ist, werden die folgenden Untersuchungen lehren. Zugspannungen sind, wie auch schon angedeutet, möglichst auszuschliessen. In den obigen Bogenkonstruktionen gingen wir umgekehrt von einem

Seilpolygon durch das Auflager A aus und leiteten es durch das andere Auflager B und schliesslich durch den Scheitel C.

Da wir zunächst von der Annahme einer symmetrischen Belastung des Gewölbes ausgehen, genügt uns ein halbes Gewölbe mit Hintermauerung; der Verkehrslast V entspricht die Höhe x, Fig. 440, in der Mitte der Scheitelfuge wirkt die auf diese senkrechte Kraft H. Die im

Fig. 440.



Schwerpunkt S der Gesamtlast G (Eigengewicht, bezw. Hintermauerung und Verkehrslast V) angreifenden Kräfte müssen sich das Gleichgewicht halten. Die Grössen dieser Kräfte lassen sich aus dem gezeichneten Kräftedreieck entnehmen. Man trägt die gegebene senkrecht wirkende Belastung G auf, an G die Horizontalkraft H, die man aus der obigen Gleichung (51) berechnen kann. Verbindet man dann O mit a, so ist die Richtung der Kämpferkraft K gegeben; diese wird, da der Schnittpunkt S von G mit H bekannt ist, durch S parallel übertragen, die Drucklinie mn muss innerhalb des Gewölbes liegen. Ist H nicht bekannt, so zieht man vom Schnittpunkt S aus nach m, nimmt also die Richtung der Kraft K an; denn H wirkt senkrecht auf die Scheitelfuge, und überträgt

diese Richtung parallel von a aus. Die sich ergebenden Kräfte K und H bestimmen dann die Hauptdimensionen und die zwischen m und n zu konstruierende Drucklinie muss dann wieder möglichst innerhalb des Gewölbekernes fallen. Die Kämpferkraft K ist uns besonders massgebend für die Dimensionen des Widerlagers.

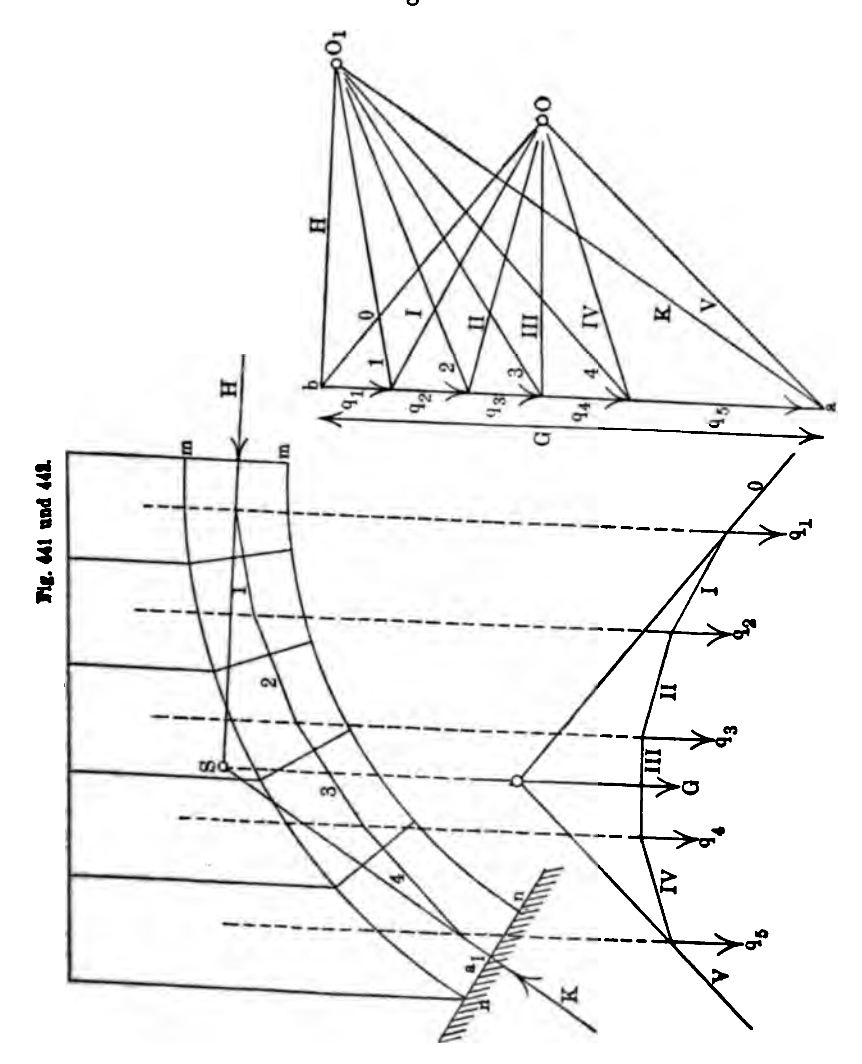


Fig. 441 und 442.

Das Gewicht desselben, im Schwerpunkt angreifend, muss der Kraft K genügend Widerstand leisten, damit die nötige Stabilität vorhanden ist; die aus dem Gewicht des Widerlagers und dem Kämpferdruck sich

ergebende resultierende Vertikalkraft, oben mit S bezeichnet, darf ferner die im Fundament zulässige Druckspannung nicht übersteigen und keine excentrischen Spannungen erzeugen; die sich ergebende Seitenkraft, oben mit T bezeichnet, ist Schub- bezw. Reibungskraft.

Um die Mittellinie des Druckes und deren Verlauf innerhalb der Fugen zu finden, teilen wir das halbe Gewicht G, wie Fig. 441 geschehen, in mehrere, hier 5 Teile, $q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 = G$. Nehmen einen beliebigen Polpunkt O an und suchen durch Vermittelung des Seilpolygons I II III ... die Schwerlinie. Da wir die Richtung der Scheitelkraft H horizontal annehmen, so haben wir nur nötig, in b der Kräftelinie ab eine Senkrechte bO_1 zu errichten, nebenbei bemerkt, entspricht der Punkt b in der Kräftelinie dem mit s_2 bezeichneten Punkte in den obigen Bogenkonstruktionen (vergl. Fig. 431). Hat man nun H berechnet, oder hat man die Richtung KS durch die Mitte der Kämpferfuge angenommen, so erhält man durch die Linie $aO_1 = K$, Fig. 241, einen neuen Polpunkt O_1, dessen Seilpolygon 1, 2, 3, 4 .. die Lage der Mittellinie des Druckes darstellt. $O_1 a$ liefert uns die Grösse der Kraft im Massstabe der Gewichte Σq gemessen. Sa_1 liefert die Richtung der Kämpferkraft; wenn diese bei einer bestimmten Annahme von H ausserhalb des Kernes bei nn fällt, so ist die Kämpferfuge entsprechend zu vergrössern.

Da nun jede Seilpolygonlinie eine Kraft darstellt, so können wir für jede Fuge wie bei den Futtermauern (vergl. S. 318 u. a.) die zulässige Spannung kontrollieren, bezw. finden.

Für die Scheitelfuge $\overline{mm}$ ist nach Gl. 35 S. 311

$$k = \frac{H}{100 \cdot \overline{mm}}, \text{ wenn } \overline{mm} \text{ in cm}, \quad . \; . \; . \quad (55)$$

für die Kämpferfuge in unserem Falle

$$k = \frac{K}{100 \cdot \overline{nn}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (55a).$$

Sobald die Kraft K eine excentrische Lage erhält, so kommt die Gl. 36 in Betracht

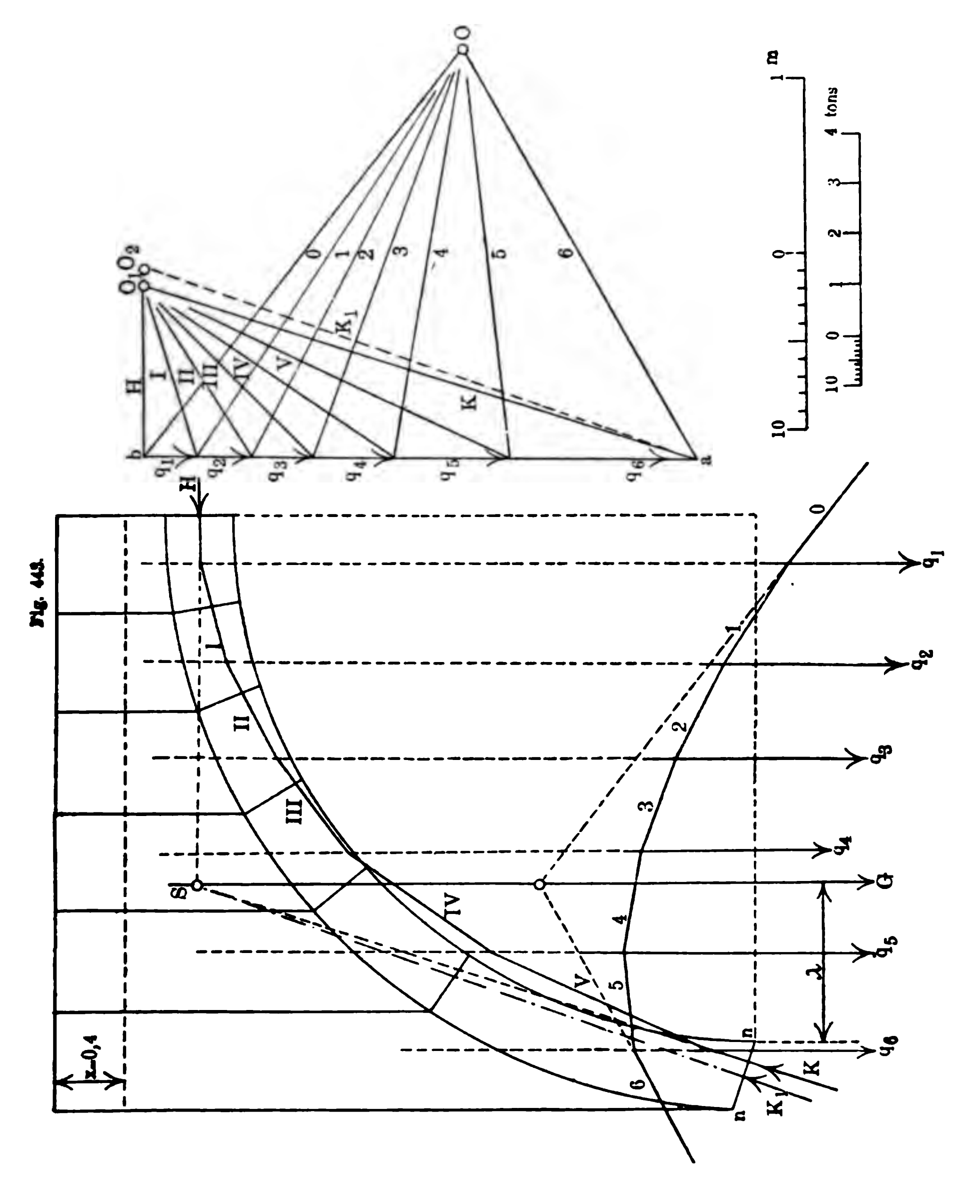
$$k = \frac{K}{100\, e_1}\left(1 \pm \frac{6\,s}{e_1}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (56)$$

wenn e_1 die Breite der Kämpferfuge und s cm die Entfernung aus der Mitte ist. —

Beispiele. I. Es soll ein Brückengewölbe von 6 m Spannweite und 3 m Pfeilhöhe ausgeführt werden. Breite der Brücke **6 m**, und

zwar 5 m für 2 Wagenreihen zu 6 tons Achsenlast (s. Anhang) und der übrige Raum von 1 m für Menschenverkehr, 400 kg für d. qm.

Fig. 443.



Auf der Brücke können, nach den im Anhang mitgeteilten Belastungsverhältnissen, 2 Wagen nebeneinander stehen mit $4 \cdot 6 = 24$ tons

Last; ausserdem ist noch für $6 \cdot 1 \cdot 400 = 2400$ kg Menschenbelastung Raum; in Summa 26400 kg. Auf 1 m Breite reduziert, ist die in Rechnung zu stellende Verkehrslast

$$K = \frac{26400}{6} = 4400 \text{ kg}.$$

Das Eigengewicht bei $\sigma = 1{,}8$ spec. Gew. Mauerwerk ist nach Gl. 54

$$P = 500 \cdot 6 \cdot 1{,}8\,(3 + 0{,}6) \sim 19000 \text{ kg auf 1 m Breite.}$$

Legen wir nun vorläufig eine Druckspannung von 5 kg auf d. qcm, also 50000 kg auf d. qm zu Grunde (vergl. S. 22, Band II), so folgt für $c = 0{,}25$ nach Gl. 53

$$e = 0{,}25 + \frac{4400 + 19000}{8}\,\frac{6}{3 \cdot 50000} = 0{,}25 + 0{,}12 = 0{,}37 \text{ m}$$

Scheitelstärke.

Wir tragen, Fig. 443, die halbe Brücke auf. Die Verkehrslast derselben für 1 m Breite $\frac{4400}{2} = 2200$ kg reduzieren wir auf die dem spec. Gewicht des Mauerwerkes entsprechende Höhe x:

$$x \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1800 = 2200, \text{ woraus } x = 0{,}4.$$

Nun teilen wir die Belastung $G = \Sigma q$ in 6 Teile, das sind

$$\frac{19000 + 4400}{2} = 11700 \text{ kg}.$$

Die Querschnitte dieser Teile setzen sich aus Rechtecken und Trapezen zusammen, die Gewichte greifen in den Schwerpunkten an. Die Teilung ergiebt:

$$q_1 = 0{,}55 \cdot 1800 = 990, \qquad q_3 = 0{,}70 \cdot 1800 = 1260$$
$$q_2 = 0{,}65 \cdot 1800 = 1170, \qquad q_4 = 0{,}93 \cdot 1800 = 1674$$
$$q_5 = 1{,}31 \cdot 1800 = 2358 \text{ und } q_6 = 2{,}09 \cdot 1800 = 3762 \text{ kg}$$
$$\Sigma q = G \sim 11700 \text{ kg}.$$

Man nimmt nun einen Polpunkt O an, konstruiert das Seilpolygon 1, 2, 3 .... zur Bestimmung der Lage der Schwerlinie.

Zur Berechnung von H nach Gl. 51, benötigt man den Schwerpunktsabstand λ, diesen kann man genauer*) als die oben erwähnte

*) Nach S. 205, I. Band der Mech., findet man für einen Halbkreisbogen, da $b = \frac{l}{2}$,

$$\lambda = \frac{l}{2}\left[1 - 1{,}27\,\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{l}{e}\right) + 1}{\frac{l}{e} + 1}\right], \text{ hier ist } \frac{l}{2} = \frac{6}{2} = 3, \frac{l}{e} = \frac{6}{0{,}36} = \frac{50}{3},$$

es ergiebt sich sonach durch genauere Rechnung

$$\lambda = 3\left[1 - 1{,}27\,\frac{0{,}5 \cdot \frac{50}{3} + 1}{\frac{50}{3} + 1}\right] = 0{,}95 \text{ m}.$$

Durchschnittsannahme $\lambda = \frac{1}{4}$ aus der Figur abgreifen. Man erhält $\lambda =$ 0,92, danach

$$H = \frac{P + K}{2} \frac{\lambda}{6} = \frac{23400}{2} \cdot \frac{0,92}{3} = 3588 \text{ kg}.$$

Trägt man diesen Wert in b rechtwinkelig zu ab auf, so erhält man den Polpunkt O_1. Konstruiert man das Seilpolygon H, I, II, III, IV, V, K, so zeigt sich bereits beim Seilstrahl II, dass excentrische Spannungen im Bogen vorhanden sind, der Seilzug III tritt aus der Bogenlinie, der Kämpferdruck K liegt zwar wieder innerhalb der Fuge, aber ausserhalb des Kernes; die Form des Gewölbes ist also keinesfalls zu verwerten. Selbst, wenn man von dem berechneten H absieht, und K durch die Mitte der Kämpferfuge nn mit S verbindet, wodurch man den Polpunkt O_2 erhält, tritt keine grosse Änderung im Seilpolygon ein. Die Kämpferkraft K_1 wird etwas grösser als K. Das veränderte, auf O_2 zu beziehende Seilpolygon ist in der Figur nicht ausgeführt.

Wir haben nun in Fig. 444 ein anderes Projekt entworfen für denselben Belastungsfall und für dieselbe Spannweite. Die Form des Gewölbes ist gleich von vornherein eine andere, dadurch wird die Lage der Drucklinie auch eine andere.

Die ursprüngliche Form in diesem Entwurfe ist mm nn; gleichzeitig haben wir die Brückenbahn geneigt ausgeführt hh, das über derselben liegende Rechteck entspricht der Verkehrslast. In der Scheitelfuge ist der Buchstabe e zu ergänzen.

Die Einteilung ergiebt die Gewichte

$q_1 = 1080$, $q_2 = 1110$, $q_3 = 1320$, $q_4 = 1610$, $q_5 = 3200$ und $q_6 = 3600$ kg, in Summa nahe 11 700 kg.

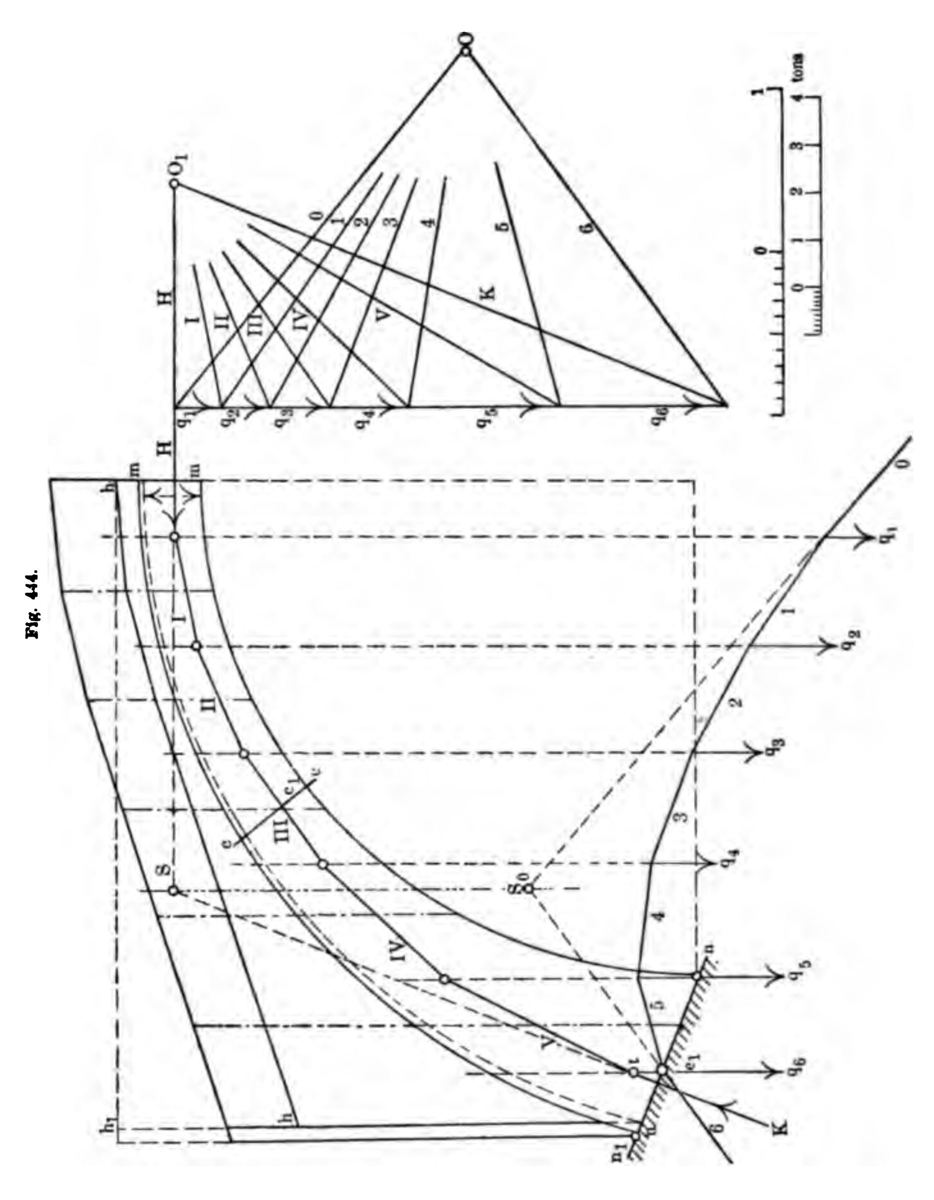
Mit dem beliebigen Polpunkt O haben wir zunächst wieder die Schwerlinie S_0 S gesucht, durch die Mitte der Scheitelfuge e eine Horizontale H bis S gezeichnet, und S mit dem Schnittpunkt t des letzten Elementes q_6 mit der Seillinie V verbunden, dadurch erhalten wir die Richtung des Kämpferdruckes K, die Grösse ergiebt sich durch parallele Übertragung, durch welche man den neuen Polpunkt O_1 erhält; man kann nun sowohl H als K der Grösse nach abgreifen,

$$H = 4830, \quad K = 12750 \text{ kg}.$$

Das durch O_1 konstruierte und in die Hauptfigur übertragene Seilpolygon liefert die Mittellinie des Druckes. Damit nun K noch in den Kern, hier in die Kerngrenze fällt, haben wir das Gewölbe um nn_1 erbreitert; die Scheitelfuge hat jetzt die Stärke mm = e = 0,4 m. Die

Pressung, bezw. Druckspannung in der Scheitelfuge ist nach Gl. 51a, bezw. Gl. 55

Fig. 444.



$$k_d = \frac{H}{eB} = \frac{4830}{40 \cdot 100} = 1{,}2 \text{ kg auf d. qcm.}$$

Die Druckspannung in der Kämpferfuge nach Gl. 38 S. 314 oder nach Gl. 56 für $s = \frac{e_1}{6} = \frac{n n_1}{6}$, Kerngrenze, ist

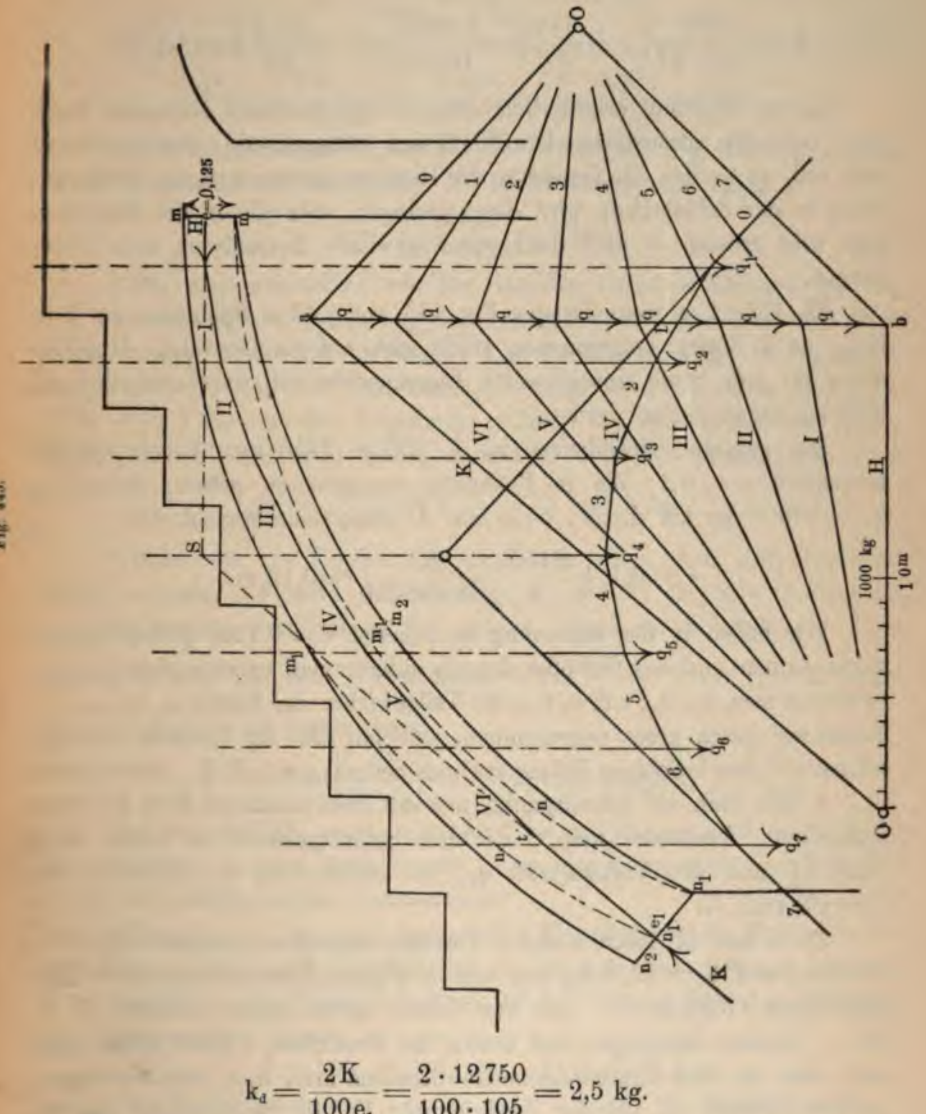


Fig. 445.

$$k_d = \frac{2K}{100 e_1} = \frac{2 \cdot 12750}{100 \cdot 105} = 2{,}5 \text{ kg}.$$

Die Spannung in einer beliebigen Fuge cc ergiebt sich durch Messung des Abstandes s dem Schnittpunkt der Seilkraft III von der Fugen-

mitte, man erhält $s = 0{,}07$ m $= 7$ cm. Den Druck an dieser Stelle liefert der Leitstrahl III $(\overline{O_1 q_8})$ 5800 kg; die Stärke der Fuge ist $cc = 0{,}5$ m $= 50$ cm, danach liefert die Gl. 56, die Richtung der Kraft III liegt im Bogen noch innerhalb des Kernes,

$$k = \frac{5800}{100 \cdot \overline{cc}}\left(1 + \frac{6 \cdot s}{\overline{cc}}\right) = \frac{5800}{100 \cdot 50}\left(1 + \frac{6 \cdot 7}{50}\right) = 2{,}1 \text{ kg.}$$

Ist es unbedingt erforderlich, dass die Brückenbahn horizontal liegt, hh_1, oder den atmosphärischen Einflüssen entsprechend, wenig geneigt sein soll, so werden die Gewichte der Hintermauerung grösser, die Spannung in der Scheitelfuge wird dann geringer, aber die in der Kämpferfuge wird grösser; k darf dann einen gewissen Normalwert nicht übersteigen.

II. Eine 1 m breite Treppe, Fig. 445, von 1,43 m Spannung auf 1 m Höhe zu 7 Stufen angenommen stützt sich auf ein Gewölbe. Das Gewicht für jede Stufe einschliesslich Eigengewicht soll durchschnittlich zu 350 kg angenommen werden.

Die gesamte Gewölbelast ist $7 \cdot 350 = 2450$ kg. Ferner sei die Konstante $c = 0{,}1$; die in Rechnung zu ziehende grösste Spannung $k_d = 50000$ kg auf d. qm, 5 kg auf d. qcm; dann ergiebt sich

$$e = 0{,}1 + \frac{2450}{8} \frac{3}{1{,}43 \cdot 50000} \sim 0{,}12 \text{ m.}$$

Wir haben in der Zeichnung im Scheitel $e = 0{,}125$, $\frac{1}{2}$ Stein Stärke angenommen und das Gewölbe danach aufgetragen, es entspricht der Begrenzung mm, $m_1 m_1$, nn, $n_1 n_1$; die Teilgewichte der Stufen $q_1, q_2, q_3 \ldots$ haben wir gleich gross angenommen, jede mit 350 kg Gewicht, und zunächst mit dem beliebigen Polpunkt O das Seilpolygon 1, 2, 3... konstruiert.

S fällt hier, als Schnittpunkt, mit der Horizontalkraft H in die Symmetrielinie. Verbindet man S mit dem Schnittpunkt t der letzten Seilkraft VI und der Vertikalkraft q_7, so erhält man die Richtung der Kämpferkraft K.

Zu K und H durch a und b Parallele gezeichnet, ergiebt sich $H = 2100$ kg und $K = 3230$ kg aus dem Kräfteplan, gleichzeitig erhält man den neuen Polpunkt O_1. Die von diesem ausgehenden Seilkräfte I, II, III... werden übertragen und liefern die Drucklinie. Nach dieser lässt sich aber die oben angenommene Gewölbeform mm, $n_1 n_1$ nicht verwerten, in den Punkten m_1 bei der Kraftrichtung IV des Seilpolygons und im Punkt n_1 finden Abweichungen statt.

Die Form des Gewölbes wurde darum verändert und die Gewölbe-

bogenlinien $m m_1$ $n_2 n_1$ $m_2 m$ angenommen. Der Kerndruck ist jetzt in allen Querschnitten gewahrt.

Es ergiebt sich die Pressung in der Scheitelfuge zu

$$k = \frac{H}{100 e} = \frac{2100}{1250} = 1,7 \text{ kg}.$$

In der Kämpferfuge fällt K in die Kerngrenze, daher ist nach Gl. 38

$$k = \frac{2K}{100 \cdot n_1 n_2} = \frac{2K}{100 \cdot e_1} = \frac{2 \cdot 3230}{100 \cdot 35} = 2 \text{ kg}.$$

Für den Querschnitt $m_1 m_2$ ist die Druckkraft IV, 2530 kg, man erhält demnach, weil der Seilzug IV in die Kerngrenze fällt,

$$k = \frac{2 \cdot 2530}{100 \cdot 17,5} = 3 \text{ kg}.$$

Hätte man abgesehen von der inneren Bogenverstärkung bei m_2 die punktierte Bogenbegrenzung m_1 beibehalten, so wäre der Bogen einer Zugspannung ausgesetzt gewesen. Die Breite der Fuge ist $m_1 m_1 = 0,125$ m $\sim$ 13 cm, die Druckkraft, Seilzug IV würde dann um $s = 0,05$ m $= 5$ cm aus der Fugenmitte fallen, wie man sich durch Nachmessen leicht überzeugen kann; nach Gl. 36 S. 314 ergiebt sich dann

$$k_z = \frac{2530}{100 \cdot 13}\left(1 - \frac{6 \cdot 5}{13}\right) \sim 2,5 \text{ kg}.$$

Würde man von Zugspannungen ganz absehen, d. h. sind überhaupt keine zulässig, so hätte der zwischen m_1 und IV liegende Querschnitt auf der inneren Gewölbeseite den ganzen Druck zu übernehmen, dann ist der in Fig. 342 mit x bezeichnete Wert $\frac{13}{2} - 5 = 1,5$ cm massgebend, die Gl. 39 liefert dann

$$k = \frac{2 \cdot 2530}{300 \cdot 1,5} \sim 12 \text{ kg auf d. qcm}.$$

Die ursprünglich angenommenen 5 kg auf d. qcm sind dann $2\frac{1}{2}$mal überschritten; in allen Beziehungen ist es also rationeller, eine Erbreiterung des Gewölbebogens vorzunehmen.

III. Das in Fig. 446 dargestellte Gewölbe ist ein Kellergewölbe für 500 kg auf d. qm Tragfähigkeit; es ist 4 m weit gespannt und hat 1 m Pfeilhöhe. Die Verkehrslast ist für 1 m Breite $500 \cdot 4 = 2000$ kg, das Eigengewicht nehmen wir an zu

$$P = 500 \cdot 4 \cdot 1,8 \, (1 + 0,6) = 5760 \text{ kg}$$

auf 1 m Breite, wenn $\sigma = 1,8$ das spec. Gewicht des Materiales ist.

Bei 5 kg auf d. qcm Druckspannung erhält man nach Gl. 53a für $c = 0,15$ m, $l = 4$ m, $b = 1$ m,

$$e = 0{,}15 + \frac{(5760 + 2000)\,4}{10 \cdot 50000 \cdot 1} = 0{,}22 \text{ cm} \sim 1 \text{ Stein stark.}$$

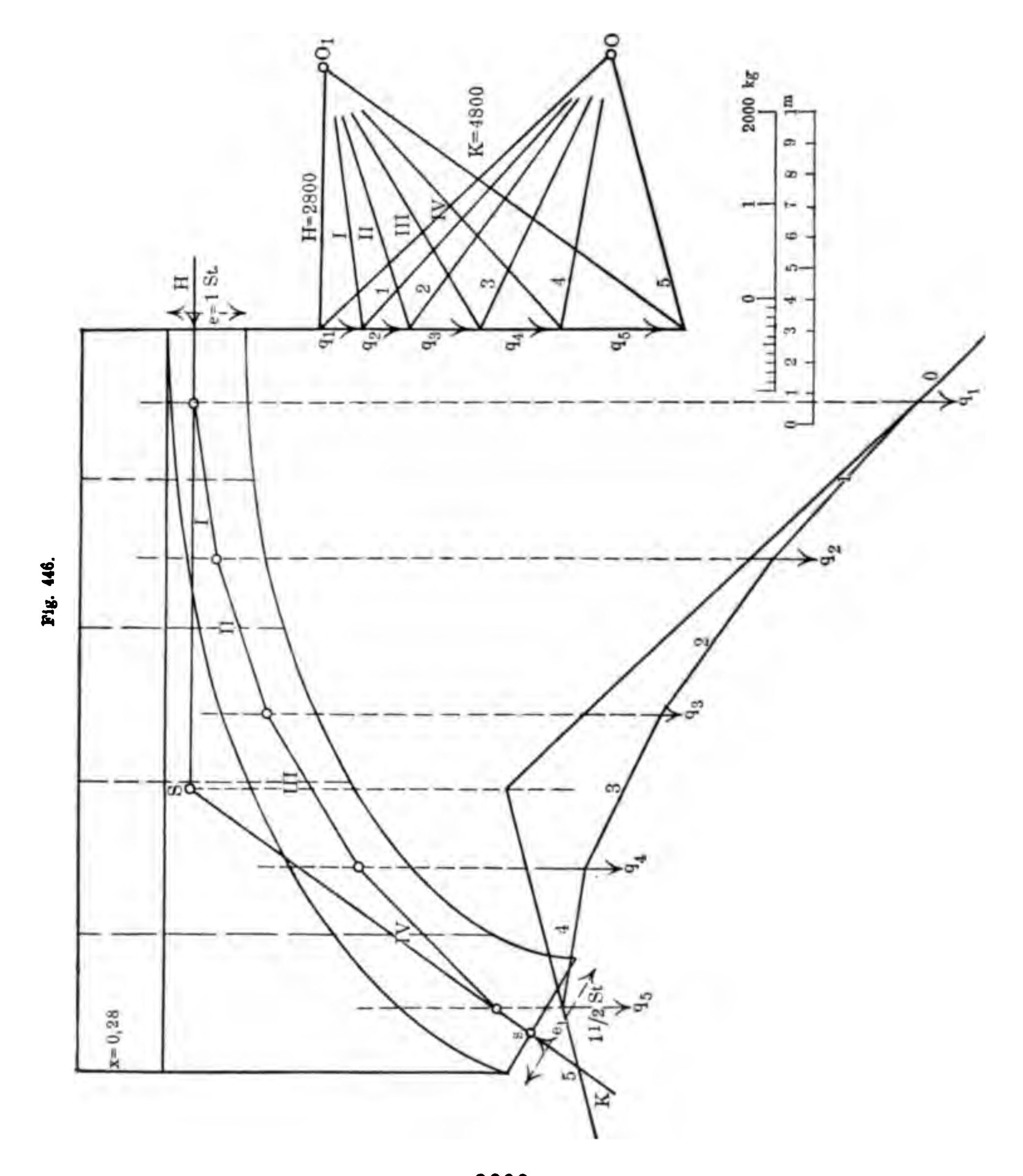


Fig. 446.

Die halbe Verkehrslast ist $\frac{2000}{2} = 1000$ kg, dieser entspricht auf

1 m Breite und bei 1800 kg auf d. cbm Materialgewicht, eine Höhe x, welche sich aus der Gleichung berechnen lässt:

$$1000 = x \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1800, \quad x = 0,28 \text{ m}.$$

Wir haben in Fig. 446 das Gewölbe im Scheitel mit 1 Stein stark, am Kämpfer mit $1\frac{1}{2}$ Stein stark aufgetragen, hierzu die Hintermauerung und die Höhe x der Verkehrslast. Den gesamten Querschnitt haben wir ferner in 5 Elemente zerlegt, deren Gewichte sind

$$q_1 = 0,53 \cdot 0,48 \cdot 1800 = 440, \quad q_2 = 0,6 \cdot 0,48 \cdot 1800 = 520,$$
$$q_3 = 0,84 \cdot 0,48 \cdot 1800 = 720, \quad q_4 = 1,03 \cdot 0,48 \cdot 1800 = 900 \text{ und}$$
$$q_5 = 1,5 \cdot 0,48 \cdot 1800 = 1300 \text{ kg}.$$

In Summa 3880 kg, welche Summe mit der obigen

$$\frac{5760 + 2000}{2} = \frac{7760}{2} = 3880$$

auch übereinstimmt.

Mit Hilfe des beliebigen Polpunktes O_1 haben wir zur Feststellung der Schwerlinie das Seilpolygon 1, 2, 3 ... konstruiert, ferner haben wir die horizontale Scheitelkraft H, um mit der Mittellinie des Druckes innerhalb der Kernlinie zu bleiben, in der oberen Kerngrenze der Scheitelfuge angenommen; aus demselben Grunde waren wir genötigt, den Angriffspunkt der Kämpferkraft K auch in der linken Kerngrenze anzunehmen, die Richtung dieser Kraft sS wurde sodann in den Kräfteplan übertragen, wodurch wir den Polpunkt O, sowie die Grössen der Kräfte H und K erhielten, H = 2800 und K = 4800 kg.

Die Druckspannungen sind nach Gl. 38 S. 314, oder Gl. (c) S. 334

$$\text{in der Scheitelfuge } k_d = \frac{2 \cdot 2800}{100 \cdot 25} = 2\tfrac{1}{4} \text{ kg und}$$

$$\text{in der Kämpferfuge } k_d = \frac{2 \cdot 4800}{100 \cdot 38} = 2\tfrac{1}{2} \text{ kg auf d. qcm.}$$

Die vorstehenden allerdings besonders ausgewählten Beispiele geben uns sofort an die Hand, dass die Mittellinie des Druckes wesentlich auf die Form des Gewölbes von Einfluss ist. Die günstigste Lage ist natürlich der Verlauf durch die Schwerlinie, sagen wir hier durch die Mittellinien der Fugen und senkrecht auf diesen; dass sich dies für bewegliche Lasten kaum ausführen lässt, ist eine in der Praxis bekannte Thatsache. —

Nach unseren oben S. 311, 334 u. f. aufgestellten Betrachtungen genügt es schon, um Zug zu vermeiden, wenn die Richtung der Druckkraft, also das Seilpolygon, innerhalb des Kernes bleibt, oder wenigstens

an der Kerngrenze, wie im letzten Beispiel. Aus jenen, wie aber auch aus den letzteren Betrachtungen dürfte man bereits gesehen haben, dass

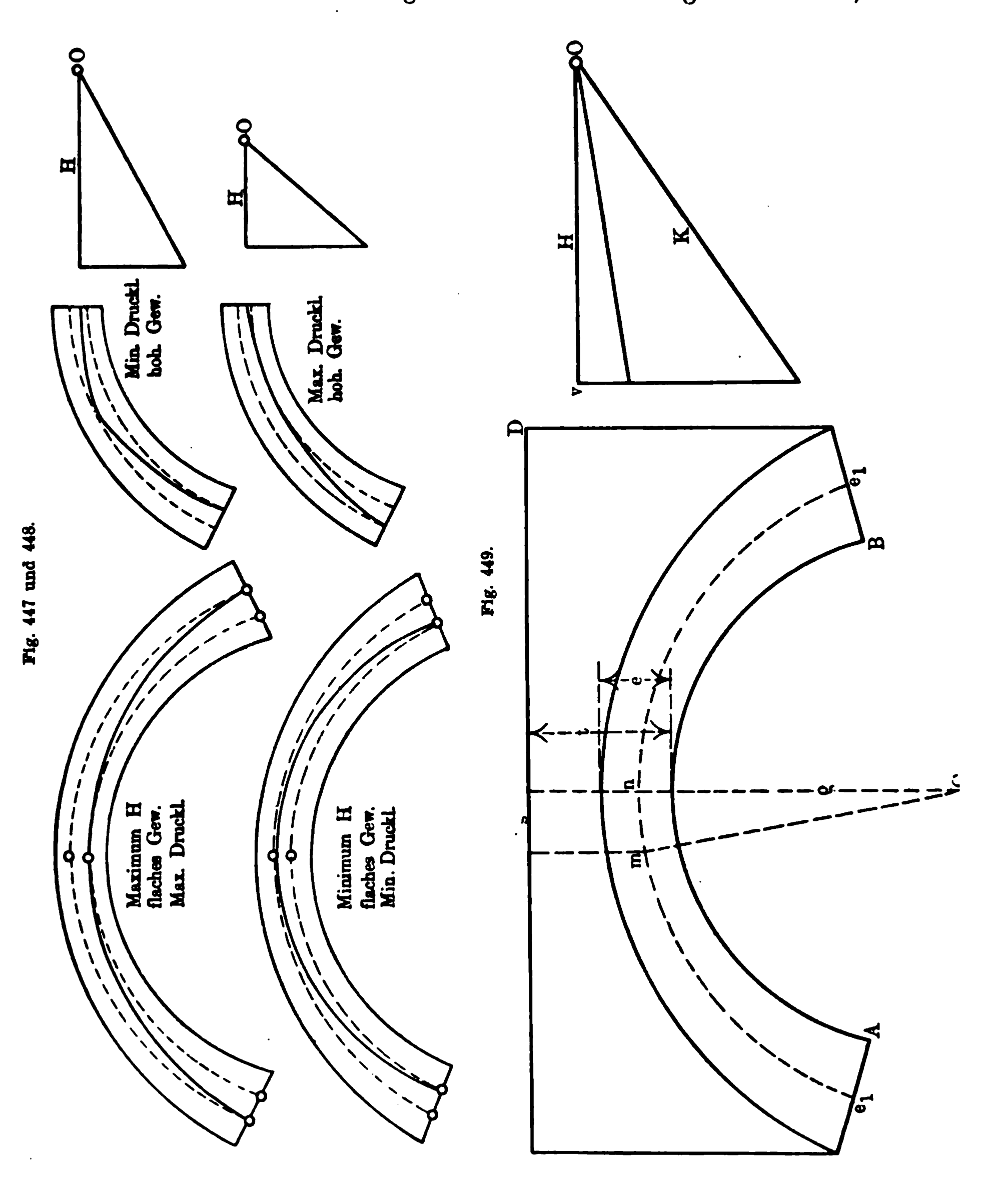


Fig. 447 und 448.

Fig. 449.

je grösser H oder je grösser der Polabstand, um so flacher wird das Gewölbe, um so grösser wird e, die Scheitelstärke, und umgekehrt. Wir

erhalten also relative Maximalwerte für H, welche einer Maximal- und Minimal-Drucklinie entsprechen.

Für H_{max} erhalten wir demnach nach Gl. 38

$$e_{max} = \frac{2\,H_{max}}{100\,k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (57).$$

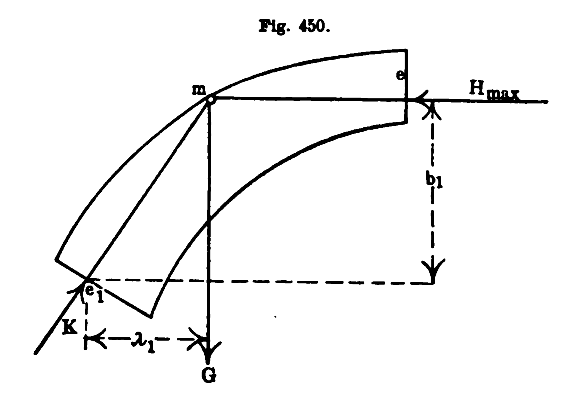
Wenn H gross ist, so werden die Polkräfte flacher.

Die entsprechende Lage der Drucklinie ist in der oberen Fig. 447 angedeutet. Wenn H klein, werden die Polkräfte steiler, die äusserste Lage der Drucklinie deutet die untere Fig. 447 für flache Gewölbe an.

Die äussersten Lagen der Drucklinien für grössere Pfeilhöhen sind in den Fig. 448 angedeutet. Die letztere entspricht nahezu dem Beispiel III. Eine Annäherung der Drucklinie an die Grenzen deutet immerhin auf einen Bruch hin. Jedem Gewölbe wird eine Maximal- und Minimal-Drucklinie entsprechen, je weiter deren Grenzen auseinander liegen, je grösser die Differenz zwischen H_{max} und H_{min} wird, um so vielseitiger kann die Belastung sein, um so stabiler ist das Gewölbe.

Man kann den grössten Wert der Horizontalkraft H berechnen, wenn man, Fig. 450, den Angriffspunkt m der 3 Kräfte H, K und G im

Fig. 450.



äusseren Bogen so wählt, dass H und K durch die Kerngrenzen wirken. Man entnimmt dann λ_1 und b_1 aus der Zeichnung und berechnet aus $G\,\lambda_1 = H_m\,b_1$,

$$H_{max} = \frac{G\,\lambda_1}{b_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (58).$$

Bei hohen und mittleren Gewölben ist man, um die richtige Lage der Drucklinie und die Grenzen zu erhalten, meist auf das Probieren angewiesen.

Die Kräfte H und K liegen stets in einem rechtwinkeligen Dreieck und es muss K > H werden, daher theoretisch die Gewölbestärke im Kämpfer $e_1 > e$ sein muss. —

Wir erwähnten oben, dass es am günstigsten ist, wenn die Mittellinie des Druckes durch die Mitte der Gewölbefuge geht, ein solches Gewölbe nennt man ein Stützliniengewölbe, es ist dies aber nur für ruhende Lasten möglich, da jede Veränderung der Belastung auch eine Veränderung der Druck- oder Stützlinie mit sich führt.

Es sei, Fig. 449, AB ein solches Gewölbe, H der Horizontalschub im Scheitel, ρ der Krümmungshalbmesser im Scheitel, die Horizontale durch D die reduzierte Belastungslinie. Denken wir uns die der Länge mn = s entsprechende Belastung $s \cdot t \cdot 1 \cdot \gamma$ kg nach vw in die Kraftlinie übertragen (der Buchstabe w unterhalb v ist in der Fig. zu ergänzen), so wird das △ mnC dem △ vwO ähnlich sein müssen, und es ergiebt sich aus der Proportion $H : s \cdot t \cdot \gamma = \rho : s$,

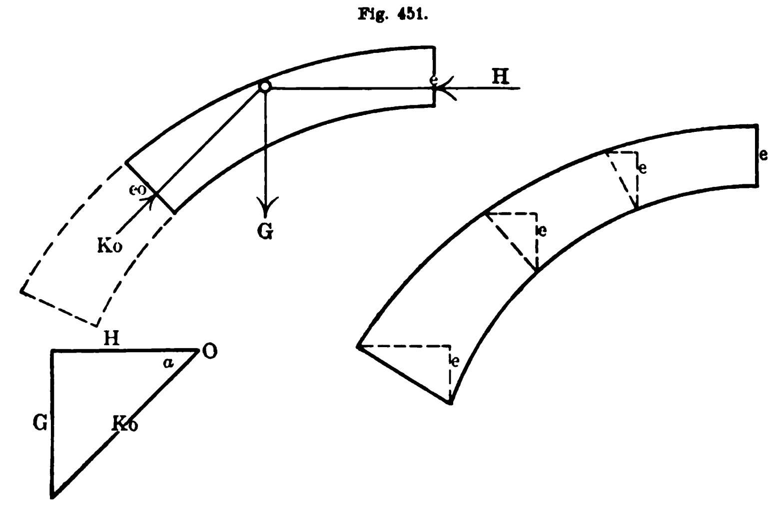
$$H = t \cdot \gamma \cdot \rho \quad \text{. . . . . (59).}$$

Für ein kreisförmiges Gewölbe ist $\rho = R$ und

$$H = t \cdot \gamma \cdot R \quad \text{. . . . . (59a).}$$

Da nun t nach beiden Seiten hin wächst, so muss, wenn immer die gleiche Druckspannung vorhanden sein soll, $e_1 > e$ werden. An einer

Fig. 451.



beliebigen Stelle sei K_0, Fig. 451, die Druckkraft, e_0 die Gewölbestärke, dann muss sich verhalten $e : e_0 = H : K_0$, woraus $e_0 H = e K_0$.

Da nun aus dem Kräftedreieck der Figur $H = K_0 \cos \alpha$ sich er-

giebt, so findet man, diesen Wert in die vorstehende Gleichung eingesetzt,

$$\frac{e}{e_0} = \cos \alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (60).$$

Das heisst, bei einem Stützliniengewölbe von in jedem Querschnitt gleichen Widerstand gegen Druck, muss im senkrechten Schnitt durch jede Fuge und jedesmalige Konstruktion des Schnittdreiecks der gleiche Wert e sich darstellen lassen, vergl. die Nebenfigur 451.

Wir kommen nun noch zurück auf die obige Bemerkung der teilweisen oder unsymmetrischen Belastung eines Gewölbes. Diese ist als Verkehrslast veränderlich, und man müsste sonach für jede Laststellung eine Drucklinie konstruieren. Es tritt in Wirklichkeit für jede besondere Belastungsart eine Deformation im Bogen ein, welche aber im Mauerwerk oder richtiger in dem spröden Steinmaterial und infolge der mit Mörtel zusammengesetzten Steinmassen nicht als elastische Veränderung aufgefasst werden kann, wie bei Eisen- oder Holzbogen; es werden sofort Risse und Sprünge eintreten, daher ist es Bedingung, bei Gewölben Zugspannungen zu vermeiden. Ein frisch aufgeführtes Gewölbe, beispielsweise für eine Eisenbahn oder für eine Strassenbrücke, wird man, noch besonders, wenn eine Dammschüttung vorhanden ist, stets von beiden Seiten hintermauern und von beiden Seiten gleichzeitig mit Dammerde belasten; erst einen Steg oder Gang darüber schütten, und diesen Streifen dann an beiden Seiten erbreitern, um die unberechenbaren Deformationen zu vermeiden.

Wir denken uns in Fig. 452 die linke Hälfte eines Gewölbes belastet, in der rechten wirkt nur das Eigengewicht. Es genügt hier auch nur die Hälften der Brücken in Rücksicht zu ziehen; die Betrachtung auf kleinere Belastungslängen auszudehnen, ist nicht unbedingt erforderlich. Wir teilen beide Gewölbehälften wieder in Belastungselemente $q_1\, q_2 \ldots q_8$; die letzten 4 entsprechen dem Eigengewicht der halben Brücke. Die Linie ac, Fig. 453, enthält die linearen Belastungskräfte Σq parallel zu den gegebenen. O ist ein beliebig gewählter Polpunkt. Mit Hilfe des übertragenen Seilpolygons 1 2 3 . . . konstruiert man die beiden Hälften entsprechenden Schwerlinien $S_1\, G_1$ und $S_2\, G_2$. Für die Konstruktion der Drucklinie sind uns dann die Fig. 430 u. s. w. massgebend, die Drucklinie muss durch die Punkte m, o und n gehen, wenn auch keine besonderen Gelenke vorhanden sind. Verlängert man den Seilzug 4 nach beiden Seiten, so ergeben sich mit den Seilzügen o und 8 die Schnittpunkte s_1 und s_2, durch welche die Schwerlinien für

Die Kräfte H und K liegen stets in einem rechtwinkeligen Dreieck und es muss K > H werden, daher theoretisch die Gewölbestärke im Kämpfer $e_1 > e$ sein muss. —

Wir erwähnten oben, dass es am günstigsten ist, wenn die Mittellinie des Druckes durch die Mitte der Gewölbefuge geht, ein solches Gewölbe nennt man ein Stützliniengewölbe, es ist dies aber nur für ruhende Lasten möglich, da jede Veränderung der Belastung auch eine Veränderung der Druck- oder Stützlinie mit sich führt.

Es sei, Fig. 449, AB ein solches Gewölbe, H der Horizontalschub im Scheitel, ρ der Krümmungshalbmesser im Scheitel, die Horizontale durch D die reduzierte Belastungslinie. Denken wir uns die der Länge $mn = s$ entsprechende Belastung $s \cdot t \cdot 1 \cdot \gamma$ kg nach vw in die Kraftlinie übertragen (der Buchstabe w unterhalb v ist in der Fig. zu ergänzen), so wird das $\triangle$ mnC dem $\triangle$ vwO ähnlich sein müssen, und es ergiebt sich aus der Proportion $H : s \cdot t \cdot \gamma = \rho : s$,

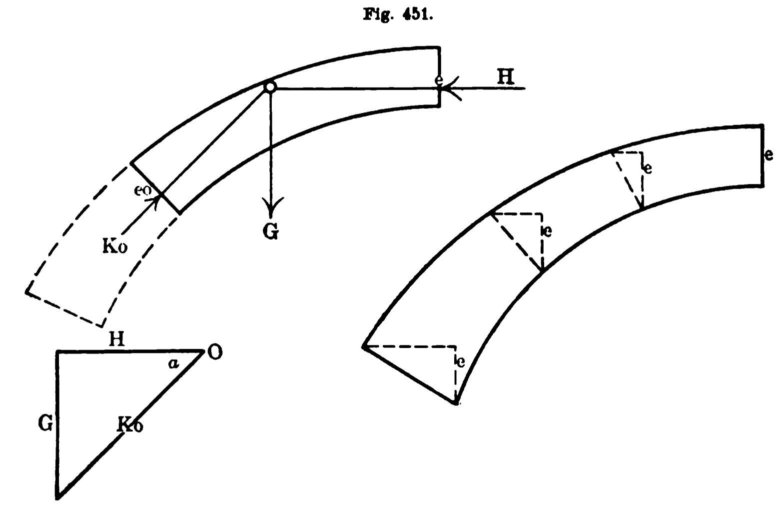
$$H = t \cdot \gamma \cdot \rho \quad \ldots \ldots \ldots \quad (59).$$

Für ein kreisförmiges Gewölbe ist $\rho = R$ und

$$H = t \cdot \gamma \cdot R \quad \ldots \ldots \ldots \quad (59a).$$

Da nun t nach beiden Seiten hin wächst, so muss, wenn immer die gleiche Druckspannung vorhanden sein soll, $e_1 > e$ werden. An einer

Fig. 451.



beliebigen Stelle sei K_0, Fig. 451, die Druckkraft, e_0 die Gewölbestärke, dann muss sich verhalten $e : e_0 = H : K_0$, woraus $e_0 H = e K_0$.

Da nun aus dem Kräftedreieck der Figur $H = K_0 \cos \alpha$ sich er-

giebt, so findet man, diesen Wert in die vorstehende Gleichung eingesetzt,

$$\frac{e}{e_0} = \cos \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60).$$

Das heisst, bei einem Stützliniengewölbe von in jedem Querschnitt gleichen Widerstand gegen Druck, muss im senkrechten Schnitt durch jede Fuge und jedesmalige Konstruktion des Schnittdreiecks der gleiche Wert e sich darstellen lassen, vergl. die Nebenfigur 451.

Wir kommen nun noch zurück auf die obige Bemerkung der teilweisen oder unsymmetrischen Belastung eines Gewölbes. Diese ist als Verkehrslast veränderlich, und man müsste sonach für jede Laststellung eine Drucklinie konstruieren. Es tritt in Wirklichkeit für jede besondere Belastungsart eine Deformation im Bogen ein, welche aber im Mauerwerk oder richtiger in dem spröden Steinmaterial und infolge der mit Mörtel zusammengesetzten Steinmassen nicht als elastische Veränderung aufgefasst werden kann, wie bei Eisen- oder Holzbogen; es werden sofort Risse und Sprünge eintreten, daher ist es Bedingung, bei Gewölben Zugspannungen zu vermeiden. Ein frisch aufgeführtes Gewölbe, beispielsweise für eine Eisenbahn oder für eine Strassenbrücke, wird man, noch besonders, wenn eine Dammschüttung vorhanden ist, stets von beiden Seiten hintermauern und von beiden Seiten gleichzeitig mit Dammerde belasten; erst einen Steg oder Gang darüber schütten, und diesen Streifen dann an beiden Seiten erbreitern, um die unberechenbaren Deformationen zu vermeiden.

Wir denken uns in Fig. 452 die linke Hälfte eines Gewölbes belastet, in der rechten wirkt nur das Eigengewicht. Es genügt hier auch nur die Hälften der Brücken in Rücksicht zu ziehen; die Betrachtung auf kleinere Belastungslängen auszudehnen, ist nicht unbedingt erforderlich. Wir teilen beide Gewölbehälften wieder in Belastungselemente $q_1\, q_2 \dots q_8$; die letzten 4 entsprechen dem Eigengewicht der halben Brücke. Die Linie ac, Fig. 453, enthält die linearen Belastungskräfte Σq parallel zu den gegebenen. O ist ein beliebig gewählter Polpunkt. Mit Hilfe des übertragenen Seilpolygons 1 2 3 . . . konstruiert man die beiden Hälften entsprechenden Schwerlinien $S_1\, G_1$ und $S_2\, G_2$. Für die Konstruktion der Drucklinie sind uns dann die Fig. 430 u. s. w. massgebend, die Drucklinie muss durch die Punkte m, o und n gehen, wenn auch keine besonderen Gelenke vorhanden sind. Verlängert man den Seilzug 4 nach beiden Seiten, so ergeben sich mit den Seilzügen o und 8 die Schnittpunkte s_1 und s_2, durch welche die Schwerlinien für

Die Kräfte H und K liegen stets in einem rechtwinkeligen Dreieck und es muss $K > H$ werden, daher theoretisch die Gewölbestärke im Kämpfer $e_1 > e$ sein muss. —

Wir erwähnten oben, dass es am günstigsten ist, wenn die Mittellinie des Druckes durch die Mitte der Gewölbefuge geht, ein solches Gewölbe nennt man ein Stützliniengewölbe, es ist dies aber nur für ruhende Lasten möglich, da jede Veränderung der Belastung auch eine Veränderung der Druck- oder Stützlinie mit sich führt.

Es sei, Fig. 449, AB ein solches Gewölbe, H der Horizontalschub im Scheitel, ρ der Krümmungshalbmesser im Scheitel, die Horizontale durch D die reduzierte Belastungslinie. Denken wir uns die der Länge $mn = s$ entsprechende Belastung $s \cdot t \cdot 1 \cdot \gamma$ kg nach vw in die Kraftlinie übertragen (der Buchstabe w unterhalb v ist in der Fig. zu ergänzen), so wird das $\triangle\, mnC$ dem $\triangle\, vwO$ ähnlich sein müssen, und es ergiebt sich aus der Proportion $H : s \cdot t \cdot \gamma = \rho : s$,

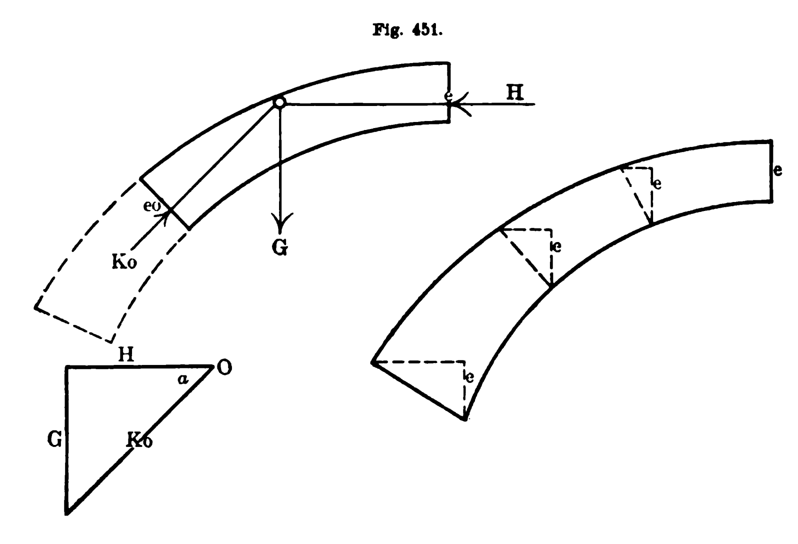
$$H = t \cdot \gamma \cdot \rho \quad \ldots\ldots\ldots \quad (59).$$

Für ein kreisförmiges Gewölbe ist $\rho = R$ und

$$H = t \cdot \gamma \cdot R \quad \ldots\ldots\ldots \quad (59a).$$

Da nun t nach beiden Seiten hin wächst, so muss, wenn immer die gleiche Druckspannung vorhanden sein soll, $e_1 > e$ werden. An einer

Fig. 451.



beliebigen Stelle sei K_0, Fig. 451, die Druckkraft, e_0 die Gewölbestärke, dann muss sich verhalten $e : e_0 = H : K_0$, woraus $e_0\, H = e\, K_0$.

Da nun aus dem Kräftedreieck der Figur $H = K_0 \cos \alpha$ sich er-

giebt, so findet man, diesen Wert in die vorstehende Gleichung eingesetzt,

$$\frac{e}{e_0} = \cos \alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (60).$$

Das heisst, bei einem Stützliniengewölbe von in jedem Querschnitt gleichen Widerstand gegen Druck, muss im senkrechten Schnitt durch jede Fuge und jedesmalige Konstruktion des Schnittdreiecks der gleiche Wert e sich darstellen lassen, vergl. die Nebenfigur 451.

Wir kommen nun noch zurück auf die obige Bemerkung der teilweisen oder unsymmetrischen Belastung eines Gewölbes. Diese ist als Verkehrslast veränderlich, und man müsste sonach für jede Laststellung eine Drucklinie konstruieren. Es tritt in Wirklichkeit für jede besondere Belastungsart eine Deformation im Bogen ein, welche aber im Mauerwerk oder richtiger in dem spröden Steinmaterial und infolge der mit Mörtel zusammengesetzten Steinmassen nicht als elastische Veränderung aufgefasst werden kann, wie bei Eisen- oder Holzbogen; es werden sofort Risse und Sprünge eintreten, daher ist es Bedingung, bei Gewölben Zugspannungen zu vermeiden. Ein frisch aufgeführtes Gewölbe, beispielsweise für eine Eisenbahn oder für eine Strassenbrücke, wird man, noch besonders, wenn eine Dammschüttung vorhanden ist, stets von beiden Seiten hintermauern und von beiden Seiten gleichzeitig mit Dammerde belasten; erst einen Steg oder Gang darüber schütten, und diesen Streifen dann an beiden Seiten erbreitern, um die unberechenbaren Deformationen zu vermeiden.

Wir denken uns in Fig. 452 die linke Hälfte eines Gewölbes belastet, in der rechten wirkt nur das Eigengewicht. Es genügt hier auch nur die Hälften der Brücken in Rücksicht zu ziehen; die Betrachtung auf kleinere Belastungslängen auszudehnen, ist nicht unbedingt erforderlich. Wir teilen beide Gewölbehälften wieder in Belastungselemente $q_1 \, q_2 \ldots q_8$; die letzten 4 entsprechen dem Eigengewicht der halben Brücke. Die Linie ac, Fig. 453, enthält die linearen Belastungskräfte Σq parallel zu den gegebenen. O ist ein beliebig gewählter Polpunkt. Mit Hilfe des übertragenen Seilpolygons 1 2 3 . . . konstruiert man die beiden Hälften entsprechenden Schwerlinien $S_1 \, G_1$ und $S_2 \, G_2$. Für die Konstruktion der Drucklinie sind uns dann die Fig. 430 u. s. w. massgebend, die Drucklinie muss durch die Punkte m, o und n gehen, wenn auch keine besonderen Gelenke vorhanden sind. Verlängert man den Seilzug 4 nach beiden Seiten, so ergeben sich mit den Seilzügen o und 8 die Schnittpunkte s_1 und s_2, durch welche die Schwerlinien für

Die Kräfte H und K liegen stets in einem rechtwinkeligen Dreieck und es muss $K > H$ werden, daher theoretisch die Gewölbestärke im Kämpfer $e_1 > e$ sein muss. —

Wir erwähnten oben, dass es am günstigsten ist, wenn die Mittellinie des Druckes durch die Mitte der Gewölbefuge geht, ein solches Gewölbe nennt man ein Stützliniengewölbe, es ist dies aber nur für ruhende Lasten möglich, da jede Veränderung der Belastung auch eine Veränderung der Druck- oder Stützlinie mit sich führt.

Es sei, Fig. 449, AB ein solches Gewölbe, H der Horizontalschub im Scheitel, ρ der Krümmungshalbmesser im Scheitel, die Horizontale durch D die reduzierte Belastungslinie. Denken wir uns die der Länge $mn = s$ entsprechende Belastung $s \cdot t \cdot 1 \cdot \gamma$ kg nach vw in die Kraftlinie übertragen (der Buchstabe w unterhalb v ist in der Fig. zu ergänzen), so wird das $\triangle$ mnC dem $\triangle$ vwO ähnlich sein müssen, und es ergiebt sich aus der Proportion $H : s \cdot t \cdot \gamma = \rho : s$,

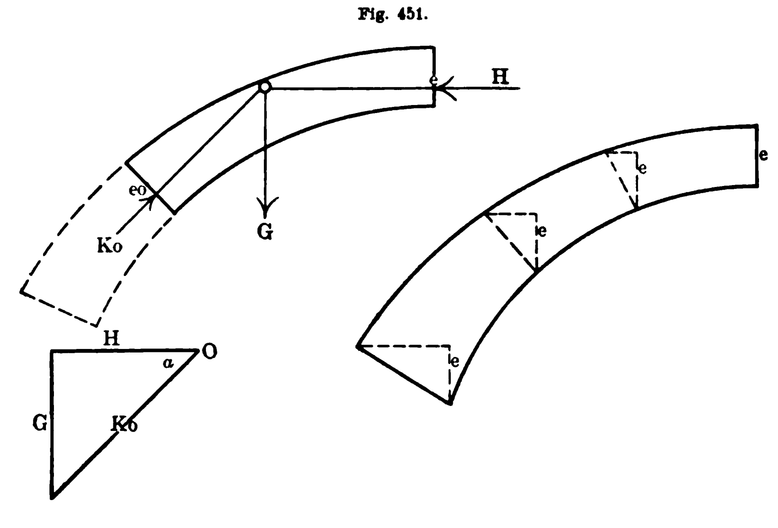
$$H = t \cdot \gamma \cdot \rho \quad \ldots \ldots \ldots \quad (59).$$

Für ein kreisförmiges Gewölbe ist $\rho = R$ und

$$H = t \cdot \gamma \cdot R \quad \ldots \ldots \ldots \quad (59a).$$

Da nun t nach beiden Seiten hin wächst, so muss, wenn immer die gleiche Druckspannung vorhanden sein soll, $e_1 > e$ werden. An einer

Fig. 451.



beliebigen Stelle sei K_0, Fig. 451, die Druckkraft, e_0 die Gewölbestärke, dann muss sich verhalten $e : e_0 = H : K_0$, woraus $e_0 H = e K_0$.

Da nun aus dem Kräftedreieck der Figur $H = K_0 \cos \alpha$ sich er-

giebt, so findet man, diesen Wert in die vorstehende Gleichung eingesetzt,

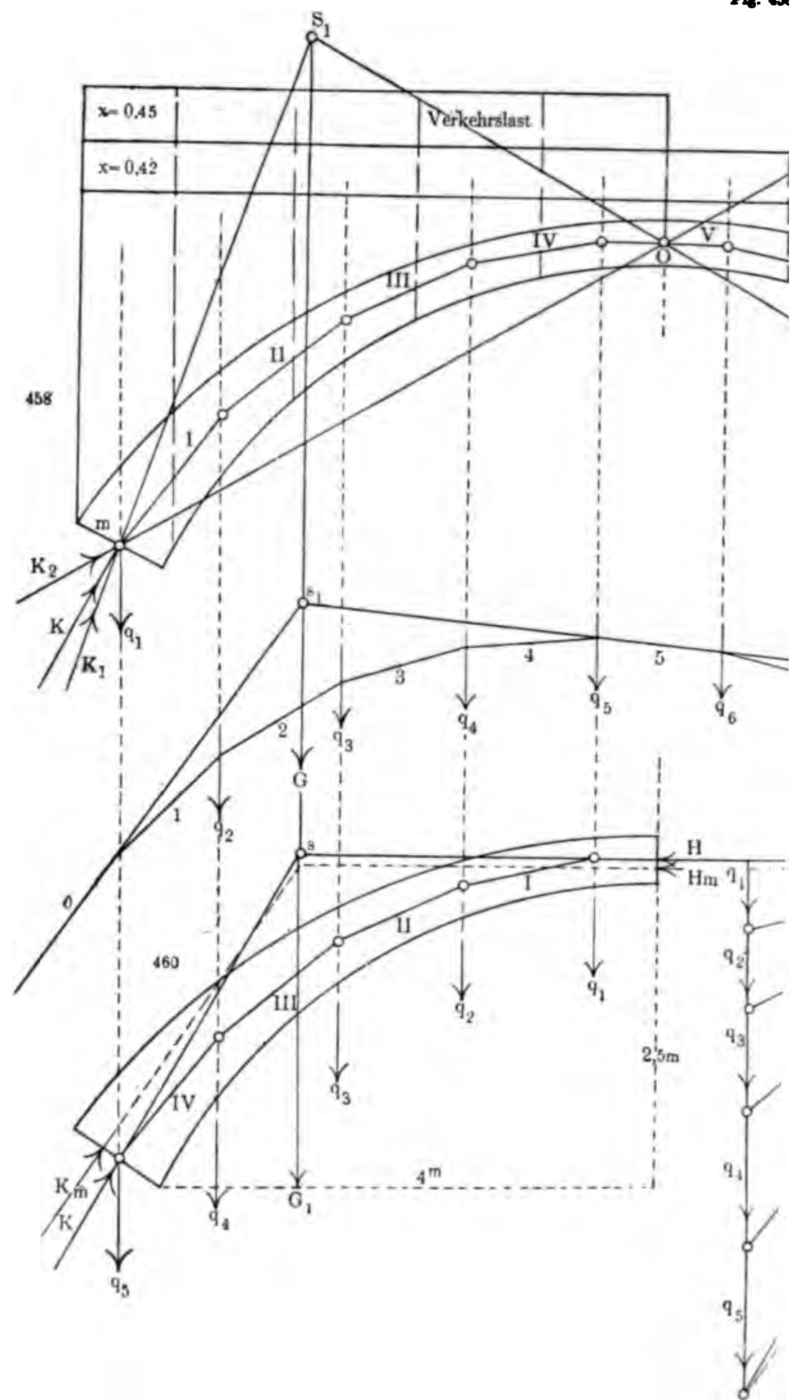
$$\frac{e}{e_0} = \cos \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60).$$

Das heisst, bei einem Stützliniengewölbe von in jedem Querschnitt gleichen Widerstand gegen Druck, muss im senkrechten Schnitt durch jede Fuge und jedesmalige Konstruktion des Schnittdreiecks der gleiche Wert e sich darstellen lassen, vergl. die Nebenfigur 451.

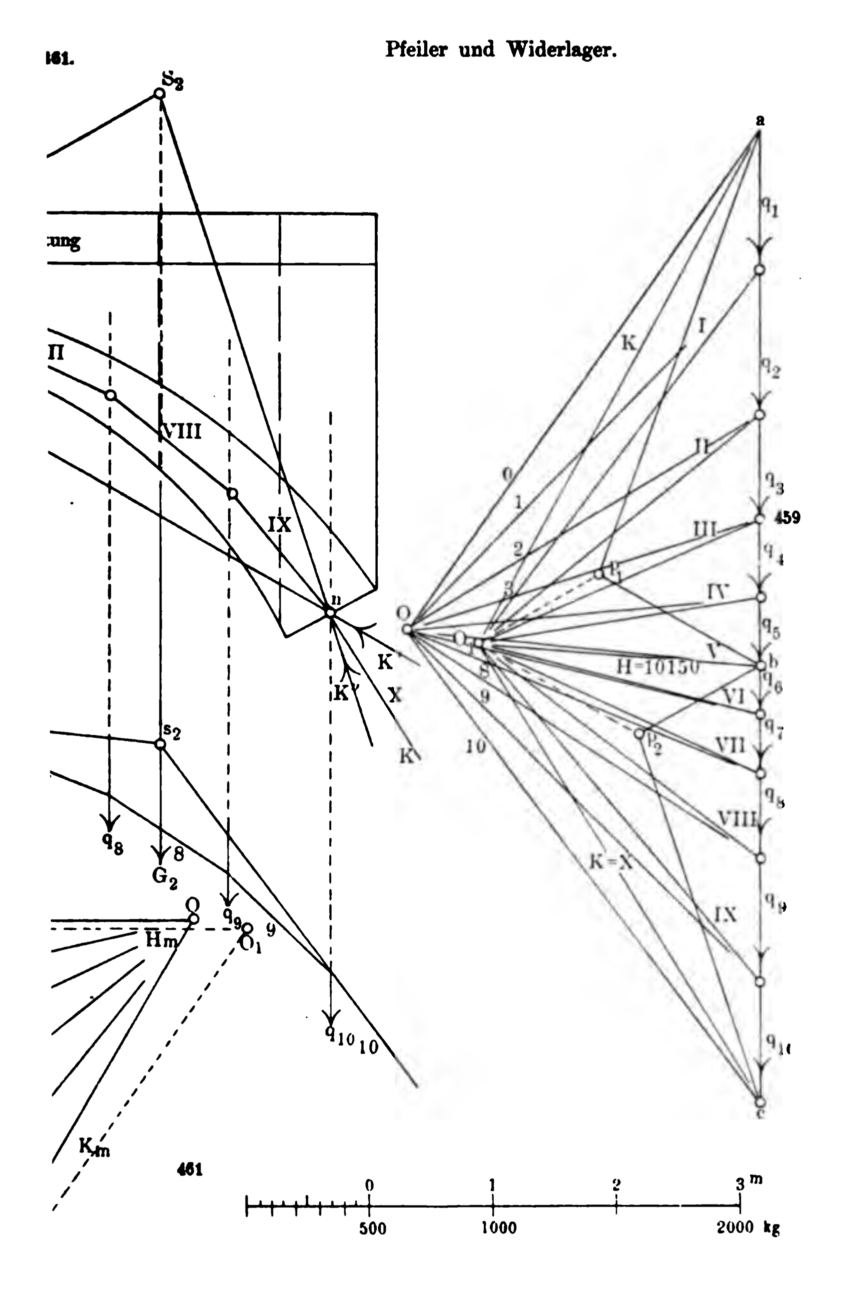
Wir kommen nun noch zurück auf die obige Bemerkung der teilweisen oder unsymmetrischen Belastung eines Gewölbes. Diese ist als Verkehrslast veränderlich, und man müsste sonach für jede Laststellung eine Drucklinie konstruieren. Es tritt in Wirklichkeit für jede besondere Belastungsart eine Deformation im Bogen ein, welche aber im Mauerwerk oder richtiger in dem spröden Steinmaterial und infolge der mit Mörtel zusammengesetzten Steinmassen nicht als elastische Veränderung aufgefasst werden kann, wie bei Eisen- oder Holzbogen; es werden sofort Risse und Sprünge eintreten, daher ist es Bedingung, bei Gewölben Zugspannungen zu vermeiden. Ein frisch aufgeführtes Gewölbe, beispielsweise für eine Eisenbahn oder für eine Strassenbrücke, wird man, noch besonders, wenn eine Dammschüttung vorhanden ist, stets von beiden Seiten hintermauern und von beiden Seiten gleichzeitig mit Dammerde belasten; erst einen Steg oder Gang darüber schütten, und diesen Streifen dann an beiden Seiten erbreitern, um die unberechenbaren Deformationen zu vermeiden.

Wir denken uns in Fig. 452 die linke Hälfte eines Gewölbes belastet, in der rechten wirkt nur das Eigengewicht. Es genügt hier auch nur die Hälften der Brücken in Rücksicht zu ziehen; die Betrachtung auf kleinere Belastungslängen auszudehnen, ist nicht unbedingt erforderlich. Wir teilen beide Gewölbehälften wieder in Belastungselemente $q_1\, q_2 \ldots q_8$; die letzten 4 entsprechen dem Eigengewicht der halben Brücke. Die Linie ac, Fig. 453, enthält die linearen Belastungskräfte Σq parallel zu den gegebenen. O ist ein beliebig gewählter Polpunkt. Mit Hilfe des übertragenen Seilpolygons 1 2 3 . . . konstruiert man die beiden Hälften entsprechenden Schwerlinien $S_1\, G_1$ und $S_2\, G_2$. Für die Konstruktion der Drucklinie sind uns dann die Fig. 430 u. s. w. massgebend, die Drucklinie muss durch die Punkte m, o und n gehen, wenn auch keine besonderen Gelenke vorhanden sind. Verlängert man den Seilzug 4 nach beiden Seiten, so ergeben sich mit den Seilzügen o und 8 die Schnittpunkte s_1 und s_2, durch welche die Schwerlinien für

Fig. 45(



458
460
x= 0,45
x= 0,42
Verkehrslast
S_1
m
K_2
K
K_1
q_1
q_2
q_3
q_4
q_5
q_6
G
G_1
H
Hm
K_m
4^m
2,5m
I
II
III
IV
V
O


a
K
I
II
III
IV
V
VI
VII
VIII
IX
H=10150
K=X
459
461
0
500
1000
2000 kg
1
2
3 m

$$\frac{(9 + 3,6)\,1,2}{2} \cdot 8 \cdot 1400 \sim 85000 \text{ kg}.$$

Das Steinmaterial wiegt 2000 kg der cbm, dessen spec. Gewicht ist sonach $\sigma = 2,0$. Hiernach erhalten wir als Eigengewicht des Gewölbes nach Gl. 54 S. 402 $P = 500 \cdot 8 \cdot 2\,(2,5 + 0,6) = 28000$ kg auf 1 m Breite. Die Reduktion der obigen Belastungen auf 1 m Breite liefert

$$K = \frac{90000 + 85000}{12,6} = 14000 \text{ kg}.$$

Für $\lambda = \frac{1}{5}$, $k_d = 70000$ kg auf d. qm und $c = 0,25$ erhalten wir nach Gl. 53a eine Scheitelstärke

$$e = c + \frac{P + K}{10\,k_d}\,\frac{1}{b} = 0,25 + \frac{42000}{10 \cdot 70000} \cdot \frac{8}{2,5} = 44 \text{ cm, } 1\tfrac{1}{2} \text{ oder 2 Stein;}$$

am Kämpfer nehmen wir $e_1 = 0,77$ m, 3 Stein stark.

Die in den Figuren vorgenommenen graphischen Untersuchungen beziehen sich auf eine ungleichmässig verteilte Belastung, und zwar rechtsseitig mit Eigengewicht und Dammerde, linksseitig kommt noch die Verkehrslast hinzu, Fig. 458 und 459.

Die Reduktion der letzteren auf das Einheitsgewicht des Gewölbematerials 2000 kg auf d. cbm, ergiebt sich aus

$$90000 = 12,6 \cdot 8 \cdot x \cdot 2000, \text{ zu } x = 0,45 \text{ m};$$

die der Dammbelastung aus

$$85000 = 12,6 \cdot 8 \cdot x_1 \cdot 2000, \text{ zu } x_1 = 0,42 \text{ m}.$$

Wir haben, wie aus der Fig. 458 zu ersehen, jede Bogenhälfte in 5 Teile geteilt, aus den Zeichnungsquerschnitten multipliziert mit der Einheit 2000, erhält man

$q_1 = 5600$ kg,	$q_6 = 1960$ kg,
$q_2 = 5900$ „	$q_7 = 2460$ „
$q_3 = 4300$ „	$q_8 = 3460$ „
$q_4 = 3300$ „	$q_9 = 5060$ „
$q_5 = 2800$ „	$q_{10} = 4930$ „

Die Fig. 460 und 461 beziehen sich auf eine gleichmässig verteilte volle Belastung eines Gewölbebogens. Wir tragen zunächst die Belastungen $\Sigma q = ac$, Fig. 459, auf, und konstruieren mit dem beliebigen Polpunkt O das Seilpolygon 0, 1, 2 ... 10. Mit Rücksicht auf den unter dem Scheitel liegenden Seilzug 5, erhalten wir die Schnittpunkte s_1 und s_2 für die Schwerlinien der beiden Gewölbehälften, Fig. 458. Wir ziehen nun die Vertikalen $s_1\,S_1$ und $s_2\,S_2$ und bestimmen die Schnittpunkte S_1 und S_2 dadurch, dass wir die Gelenklinien mo und no über o hinaus verlängern.

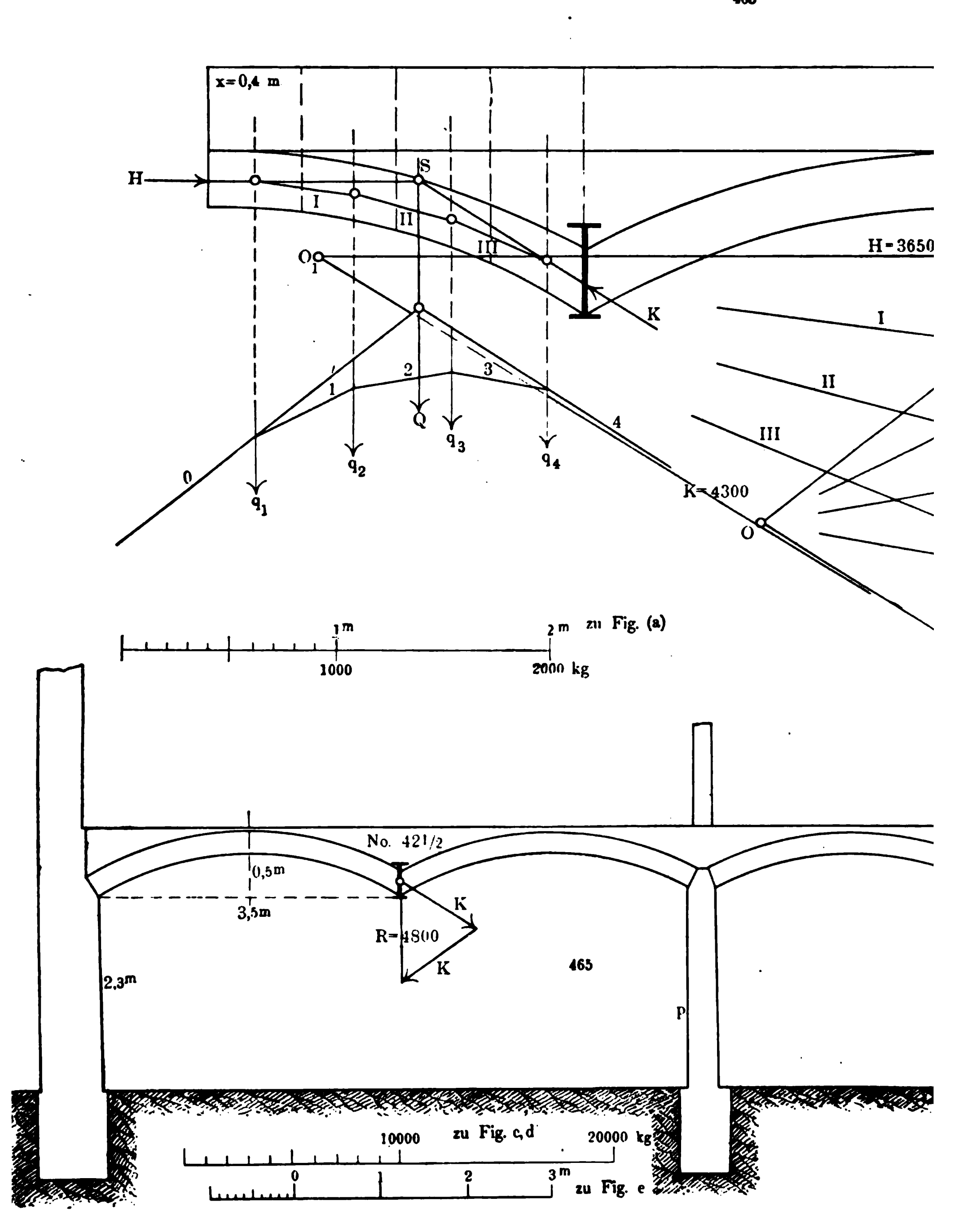
Verbindet man dann S_1 mit m und S_2 mit n, so ergeben sich die Richtungen der Kämferreaktionen K_1 und K' für die linke und K_2, K'' für die rechte Gewölbebelastung G_2. Die Richtungen dieser Kräfte übertragen wir paarweise parallel den Belastungen entsprechend durch a, b, c, Fig. 459, und erhalten die Schnittpunkte p_1 und p_2. Die Vollendung des Parallelogramms O_1 p_1 p_2 b ergiebt den Polpunkt O_1. Mit diesem konstruieren wir das uns massgebende Seilpolygon I, II, III ... X. Die in Rechnung zu ziehenden Kämpferkräfte sind dann K und K = X rechtsseitig.

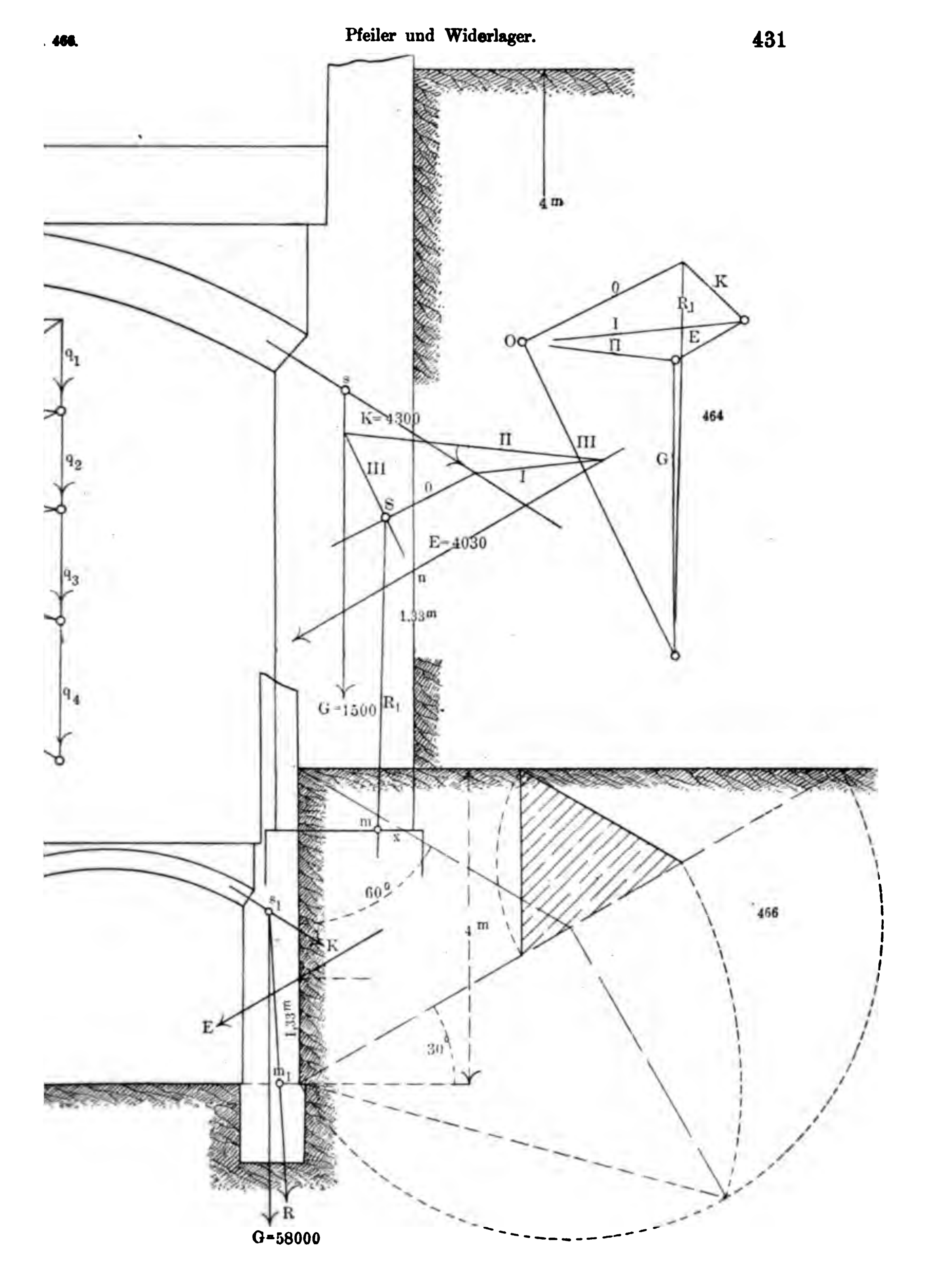
Aus der Zeichnung, Fig. 459, erhält man H = 10150 kg, K linksseitig 22000 kg, K rechtsseitig 24000 kg. Der einheitliche Materialdruck ist nach der Gl. 55, 55a

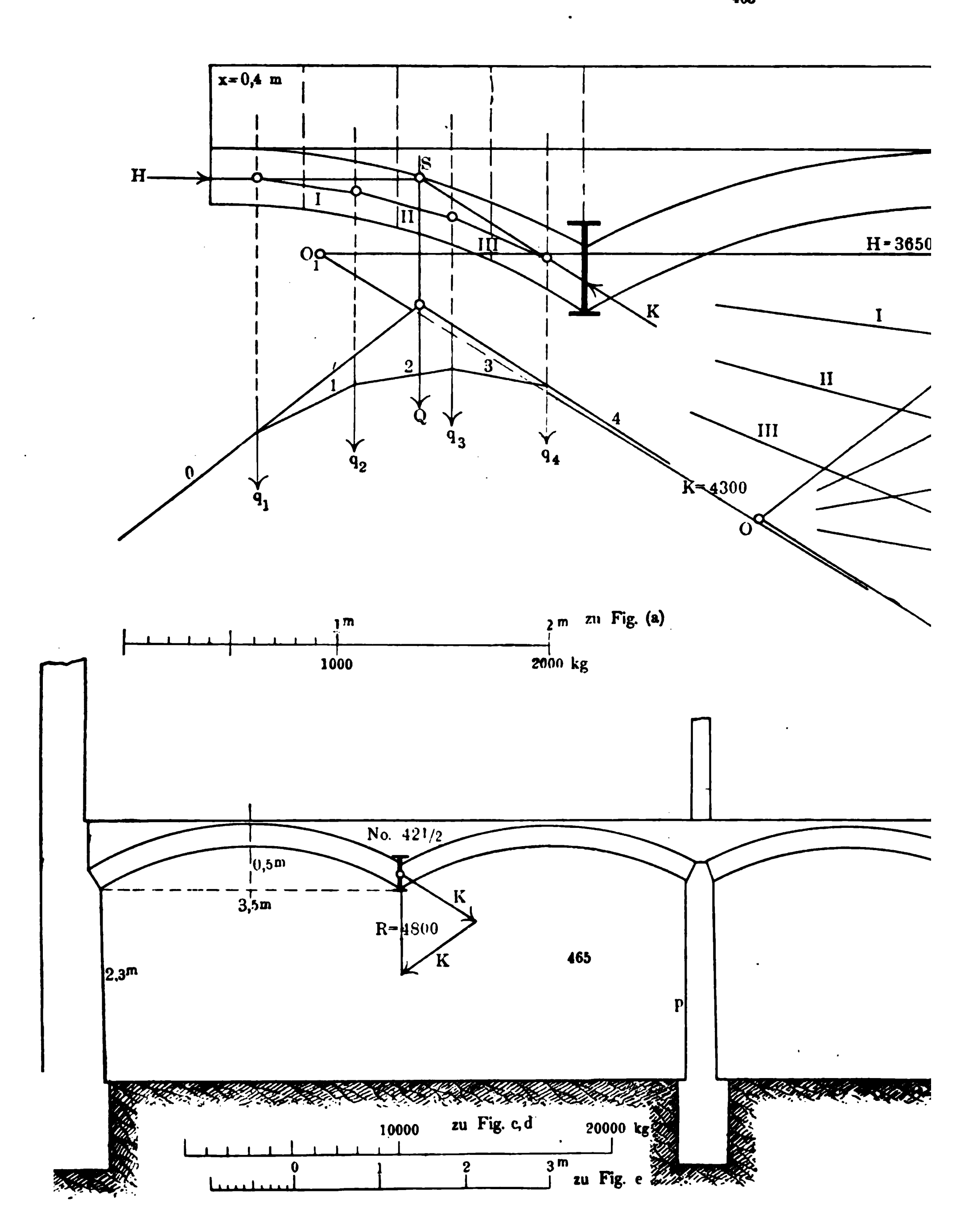
$$k_s = \frac{H}{100 \cdot 38} = 3 \text{ kg}$$

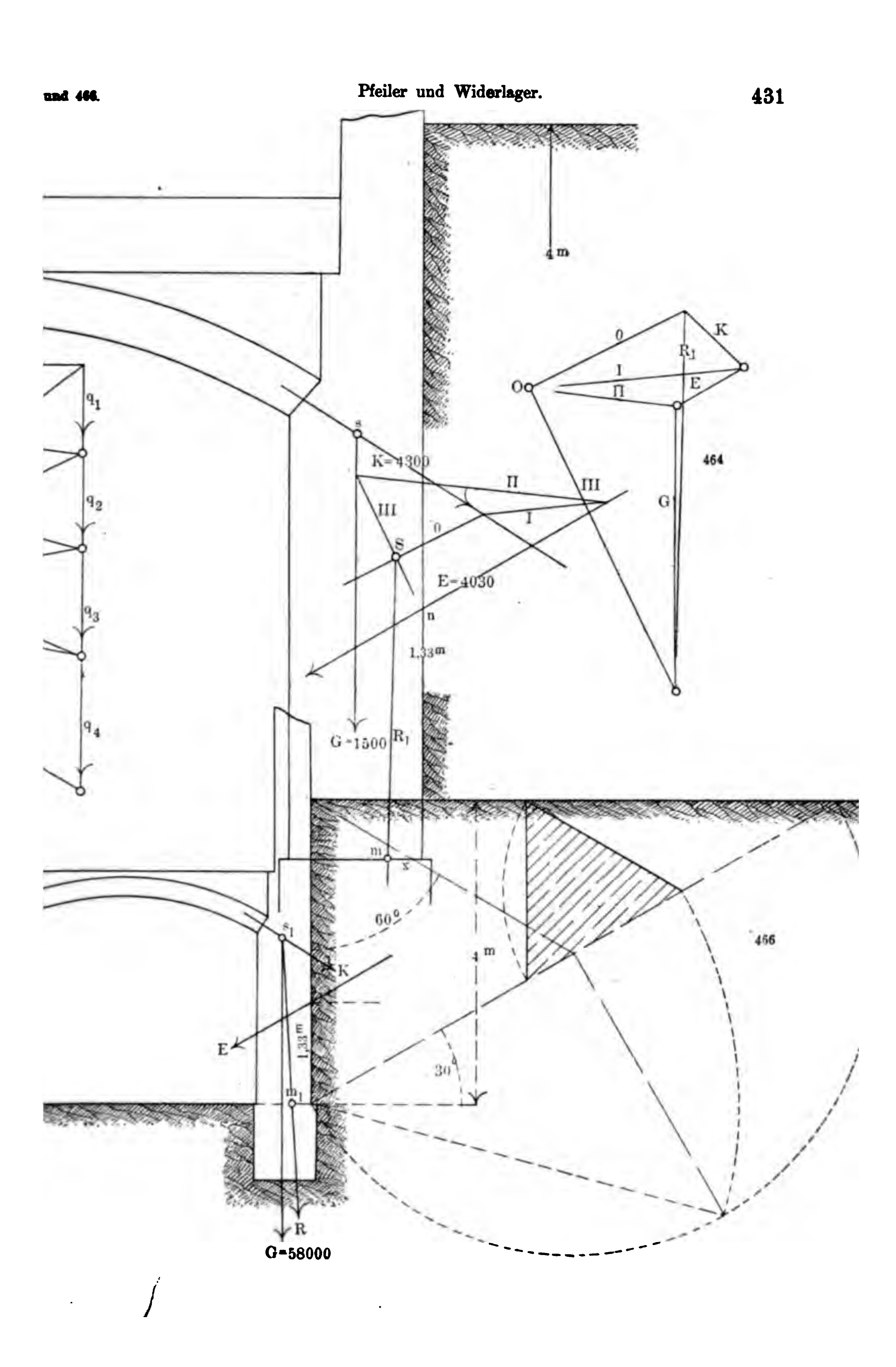
Scheiteldruckspannung.

Fig. 462.


463
x = 0,4 m
H
S
I
II
III
O1
H = 3650
K
I
II
III
1
2
3
4
0
Q
q1
q2
q3
q4
K = 4300
O
1 m
2 m
zu Fig. (a)
1000
2000 kg
No. 42 1/2
0,5m
3,5m
K
R = 4800
K
465
2,3m
P
10000
zu Fig. c, d
20000 kg
0
1
2
3 m
zu Fig. e


4 m
0
K
R1
I
O
E
II
464
s
K=4300
II
III
III
G
I
0
S
E=4030
n
1,33m
G=1500
R1
m
x
60°
466
s1
K
4 m
E
1,33 m
30°
m1
R
G=58000


468
x=0,4 m
H
S
I
II
III
O
H=3650
K
I
II
III
1
2
3
4
0
Q
q_1
q_2
q_3
q_4
K=4300
O
1m
2m
zu Fig. (a)
1000
2000 kg
No. 42 1/2
0,5m
3,5m
2,3m
K
R=4800
K
465
P
10000
zu Fig. c, d
20000 kg
0
1
2
3m
zu Fig. e


4 m
0
K
R_1
I
E
O
II
464
s
K=4300
II
III
III
I
G
0
S
E=4030
n
1,33m
G=1500
R_1
q_1
q_2
q_3
q_4
m
x
60°
466
4 m
s_1
K
E
1,33m
30°
m_1
R
G=58000

$$k_d = \frac{K}{100 \cdot 77} = \frac{24000}{100 \cdot 77} = 3,2 \text{ kg}$$

Kämpferdruckspannung.

In Fig. 461 haben wir die der vollen Belastung entsprechenden Werte $q_1 \ldots q_5$ aufgetragen; die Schwerlinie G_1 der Fig. 458 verwertet und K und H für diese Belastung durch die Fugenmitten gezogen. Überträgt man K und H parallel in die Kräftelinie, Fig. 461, so ergiebt sich der Polpunkt O, mit Hilfe desselben konstruiert man das Seilpolygon I, II, III, IV; auch dieses hat für die Stabilität und den Fugendruck eine günstige Lage. In Fig. 461 sind ausserdem noch die Maximalwerte H_m und entsprechend K_m eingetragen, sie ergeben $H_m = 25000$ und $K_m = 26000$ kg, sonach die Maximalpressung nach Gl. 51a, 55, bezw. auch 56

$$k_d = \frac{2 \cdot 26000}{100 \cdot 77} = 7 \text{ kg}.$$

Wir haben nun ferner in Fig. 462 die Pfeiler derselben Brücke untersucht. Der Längenmassstab ist hier halb so gross wie in voriger Figur, der Kräftemassstab ist angegeben.

Die Richtung K_m aus der Fig. 460 ist in das Widerlager übertragen. Das Gewicht des letzteren ist $Q_0 = 3,0 \cdot 1 \cdot 7,2 \cdot 2000 = 43200$ kg. Beide liefern die Resultierende R_0, den Fugenschnitt m, mit $x = 0,92$ m Kantenentfernung; die senkrechte Druckkraft ist $S = 64000$ kg, $T = 15000$ ist Reibungs- bezw. Schubkraft.

Wir setzen voraus, dass keine Zugspannungen zulässig sind, dann wird

$$k_d = \frac{2 \cdot S}{300 \cdot x} = \frac{2 \cdot 64000}{100 \cdot 92} = 14 \text{ kg auf d. qcm};$$

kann ev. noch zulässig sein, andernfalls ist das Widerlager zu verstärken.

Um die Kräfte im Mittelpfeiler bei unsymmetrischer Belastung zu ermitteln, tragen wir die Richtungen der Kämpferkräfte 22000 und 24000 kg auf und ermitteln die Horizontalkräfte H_1 und H_2 bezw. deren Differenz $H - H_2$. Ferner berechnen wir das Gewicht des Mittelpfeilers $Q = 2,6 \cdot 1 \cdot 7,2 \cdot 2000 = 37440$ kg, zu dieser Last mögen noch $Q_1 = 2560$ kg Nebenlasten kommen, so dass $Q + Q_1 = 40000$ kg.

Die Gewichte der Gewölbehälften sind nach S. 428

$$G_1 = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 = 21900 \text{ kg}$$

Durch Annahme des beliebigen Polpunktes O erhalten wir das Seilpolygon o, I, II, III. Von z aus die Richtung R übertragen, erhält man den Fugenschnitt, welcher im Kern der Pfeilerfundamentfuge verläuft.

Die Resultierende R findet sich durch Auftragung der Differenz

$H_1 - H_2$, die man unmittelbar aus der Zeichnung im Mittelpfeiler entnehmen kann. Der Pfeiler hat eine Stärke von 2,6 m, sonach ist die Druckspannung auf den qcm

$$k_d = \frac{S}{260 \cdot 100} = \frac{80000}{26000} \sim 3 \text{ kg}.$$

II. Ein weiteres, etwas ausführliches Beispiel stellen uns die Gewölbekonstruktionen, Fig. 463 bis 466, dar. Die Spannweiten sind 3,5 m, die Pfeilhöhen 0,5 m. (In Bezug auf die Massstäbe ist Fig. 463 = Fig. a, 464 = d, 466 = c, 465 = b.)

Die Belastung ist zu 600 kg auf d. qm angenommen. Die einer Kappe entsprechende relative Lasthöhe ist aus

$$x \cdot 3{,}5 \cdot 1 \cdot 600 = 1600, \quad x \sim 0{,}4 \text{ m},$$

wenn das einheitliche Mauergewicht 1600 kg für d. cbm ist. Wir haben die Stärke der Schicht zwischen den T Trägern zu 25 cm oder 1 Stein stark angenommen. Die mittleren Kappengewölbe ruhen auf einem Pfeiler p Fig. 465; die Länge der Gewölbe, also die Tiefe des eingewölbten Kellerraumes sei 4 m. Der Träger, welcher die beiden rechten Gewölbe, Fig. 465, aufnimmt, wird in der Mitte, also auf 4 m Spannweite durch eine schmiedeeiserne Säule mit doppelt Tförmigem Querschnitt unterstützt. Der linke T Träger liegt auf 4 m frei, und beiderseitig auf den Seitenmauern.

Die Einteilung des halben Gewölbes in 4 Elemente ergiebt aus der Zeichnung abgegriffen, die Gewichte

$$q_1 = 0{,}67 \cdot 0{,}44 \cdot 1 \cdot 1600 = 469 \text{ kg}$$
$$q_2 = 0{,}72 \cdot 0{,}44 \cdot 1 \cdot 1600 = 504 \text{ ,,}$$
$$q_3 = 0{,}82 \cdot 0{,}44 \cdot 1 \cdot 1600 = 574 \text{ ,,}$$
$$q_4 = 1{,}00 \cdot 0{,}44 \cdot 1 \cdot 1600 = 700 \text{ ,,}$$

in Summa abger. $Q = 2250$ kg; das Eigengewicht wäre hiernach, die Belastung $600 \cdot 1 \cdot 3{,}5 = 2100$ kg in Abzug gebracht, 150 kg. Wir haben nun Σq aufgetragen, und mit dem beliebigen Polpunkt O die Schwerlinie Sa festgestellt, Fig. 463; S, unter der Annahme, dass H durch die Mitte der Scheitelfuge geht, fällt in der Zeichnung zufällig in die obere Gewölbebegrenzung. Nimmt man den Kämpferdruck K auch durch die Fugenmitte an, so erhält man durch parallele Übertragung der Richtungen H und K den Polpunkt O_1; das diesem entsprechende Seilpolygon I, II, III... hat eine günstige Kernlage.

Die Zeichnung ergiebt $H = 3650$ und $K = 4300$ kg, hiernach wird die Druckspannung

$$k_d = \frac{4300}{100 \cdot 25} = \sim 2 \text{ kg}.$$

In Fig. 465 sind die beiden Kämpferkräfte $K = 4300$ auf der linken Seite, um die senkrechte, gleichmässig verteilte Kraft für den I Träger festzustellen, aufgetragen. Die Resultierende liefert $R = 4800$ kg für 1 m Breite; die gesamte gleichmässig verteilte Last auf 4 m Tiefe ist demnach $4 \cdot 4800 = 19200$ kg.

Dieser entspricht das Moment

$$M = \frac{19200 \cdot 4}{8} = 9600 \text{ kg m} = 960000 \text{ kgcm}.$$

Bei $k_b = 600$ kg zulässige Spannung erhält man das Widerstandsmoment

$$W^{(cm)} = \frac{960000}{600} = 1600.$$

Die Normalprofile im Anhang für doppelt T Querschnitt ergeben Nr. $42\frac{1}{2}$. Die beiden horizontalen Scheitelkräfte $H = 3650$ heben sich gegenseitig auf, da wir von einer unsymmetrischen Belastung absehen.

Der Pfeiler p hat auf seine Länge von 4 m demselben Vertikaldruck 19200 kg Widerstand zu leisten. Der Pfeiler ist $1\frac{1}{2}$ Stein stark, die Druckspannung auf 1 m ist demnach

$$k = \frac{4800}{100 \cdot 38} = 1{,}3 \text{ kg auf d. qcm.}$$

Der T Träger auf der rechten Seite liegt beiderseitig auf, und ist in der Mitte, auf 2 m Entfernung, unterstützt. Die Belastung auf die freie Öffnung von 2 m Spannweite ist

$$\frac{19200}{2} = 9600 \text{ kg},$$

sonach ist der Druck auf die Mittelstütze (vgl. Band II S. 123, Gl. 75)

$$B = \frac{5}{4}\, 9600 = 12000 \text{ kg}.$$

Dies ist zugleich der Säulendruck. Würde man eine gusseiserne Säule mit ringförmigem Querschnitt anwenden, so ergiebt sich deren Trägheitsmoment bei 2,3 m Säulenlänge, Raumhöhe, s. d. Fig. 465, aus

$$12000 = \frac{\pi^2 E J}{l^2 \cdot n};$$

(vgl. Gl. 142, S. 257 und Tab. S. 260 Band II d. Mech.). Man erhält bei $n = 10$facher Sicherheit $E = 1000000$, $l = 230$ cm,

$$12000 = \frac{10 \cdot 1000000\, J}{230^2 \cdot 10}$$

und folglich $J^{(cm)} = 636$. Die Säulentabelle S. 260 Band II d. Mech. ergiebt den äusseren Durchmesser von 12 cm und 15 mm Wandstärke.

Wendet man, wie oben schon angenommen, einen 2,3 m langen

doppelt T Träger an, so findet sich dessen Trägheitsmoment für $E = 200000$ und bei 8facher Sicherheit

$$J^{(cm)} = \frac{12000 \cdot 230^2 \cdot 8}{10 \cdot 2000000} \sim 250.$$

Für die ungünstigste Knickung nach der Y Achse (s. die Tab. im Anhang) wird man mit Nr. 24 auskommen; diesem Normalprofil entspricht das Trägheitsmoment $J_y = 261$.

Der Träger über der Säule kann leichter, bezw. schwächer als der auf der linken Seite sein. Bei 9600 kg Belastung auf 2 m ist

$$M = \frac{9600 \cdot 2}{8} = 2400 \text{ kgm} = 240000 \text{ kgcm}.$$

Das für $k_b = 600$ entsprechende Widerstandsmoment ist

$$W^{(cm)} = \frac{240000}{600} = 400.$$

Diesem entspricht nach den Tab. im Anhang das Normalprofil Nr. 26.

Das Widerlager rechts liegt auf 4 m Tiefe in der Erde, es ist also einem von rechts wirkenden Erddruck ausgesetzt; das einheitliche Erdmaterialgewicht ist 1600 kg für d. cbm, der Böschungswinkel 30°.

Wir konstruieren das Erddruckdreieck, Fig. 466, und ermitteln dessen Inhalt:

$$\frac{2,4 \cdot 2,1}{2} = 2,52 \text{ qm}.$$

Der Erddruck selbst ist sodann $E = 2,52 \cdot 1600 = 4030$ kg; er wirkt in $\frac{1}{3}$ der Erddruckhöhe, das sind 1,33 m. Die Konstruktion des Erddruckes ist aus der Figur zu ersehen; die Verteilung der Kräfte haben wir aber in Fig. 463 und 464 ausgeführt. Trägt man die Richtungen von $K = 4300$ und $G = 15000$ kg Mauergewicht von s in der Widerlagerschwerlinie, und E von n aus in Richtung von 30° an, so findet man aus dem in Fig. 464 konstruierten Kräftepolygon die Resultierende R_1. Mit Annahme des Polpunktes O ergiebt sich das Seilpolygon I II III, durch dasselbe der Angriffspunkt S obiger Resultanten R_1, deren Richtung aus (Fig. 464) parallel übertragen wird. Die Zeichnung liefert, nahezu senkrecht wirkend, $R_1 = 20000$ kg und den Fugenschnitt m in der Entfernung $x = 17$ der 71 cm starken Mauer, Fig. 463. Da Zugspannungen ausgeschlossen sein sollen, so hat die Stärke von $3 \cdot 17 = 51$ cm den ganzen Druck aufzunehmen; die Kantenpressung ist hiernach

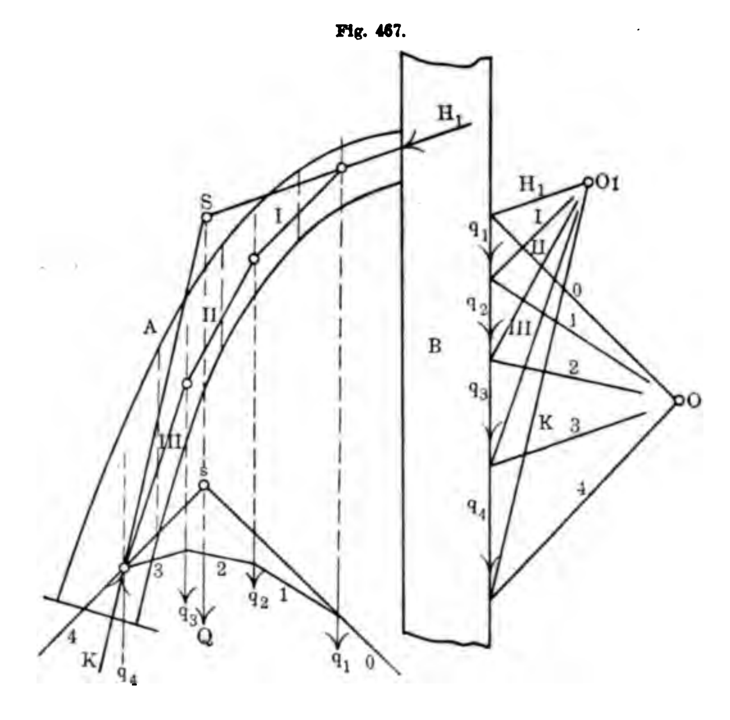
$$k_d = \frac{2 \cdot 20000}{300 \cdot 17} = 8 \text{ kg auf d. qcm}.$$

Die auf der linken Seite freistehend gedachte Seitenmauer ist keinem

Erddruck ausgesetzt. Trägt man, wir haben die betr. Konstruktion rechts in Fig. 465 zum Teil angedeutet, K = 4300 von s_1 aus auf, zieht die Richtung $s_1 m_1$ durch die Kerngrenze m_1, so muss dem Widerlager, damit die Zugspannungen in der Fundamentfuge verschwinden, ein Gewicht von G = 58000 kg auf 1 m Breite durch die verschiedenen Stockwerke hindurch entsprechen. In der Figur konnte, wegen Mangel an Raum, das betr. Parallelogramm nicht eingezeichnet werden, da die Figur zu gross wird.

III. Der Mauerbogen A, Fig. 467, 71 cm breit, ist durch den Pfeiler B einem schiefen Druck H_1 ausgesetzt (z. B. Winddruck o. a.).

Fig. 467.

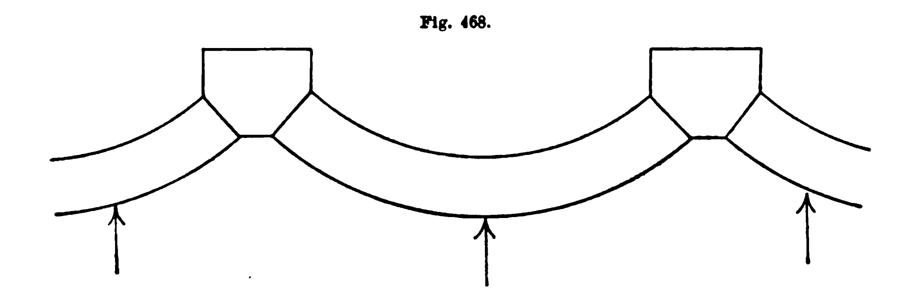


Derselbe soll unter Annahme, dass die Drucklinie möglichst im Kern des Bogens bleibt, bestimmt werden. Die Stärke im Scheitel ist 1 Stein, e = 25 cm, die freie Spannweite 2,8 m, die Pfeilhöhe 2,4 m. Die einzelnen Gewichte sind für 1400 kg Einheitsgewicht des Mauerbogens

$$q_1 = 0{,}11 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}71 \cdot 1400 = 26 \text{ kg}$$
$$q_2 = 0{,}12 \cdot 0{,}28 \cdot 0{,}71 \cdot 1400 = 34 \text{ „}$$
$$q_3 = 44, \text{ und } q_4 = 57 \text{ kg.}$$

Trägt man diese Werte auf und konstruiert mit O das Seilpolygon 0, 1, 2, 3, 4, so findet man die Schwerlinie Ss; die in der Kerngrenze angetragene gegebene Richtung H_1 liefert den Schnitt S mit der Vertikalen Q; zieht man ferner die Kämpferrichtung K durch die innere Kerngrenze, und überträgt beide Richtungen in die Kraftlinie Σq, so ergiebt sich der Polpunkt O_1, sowie die Grössen H_1 und K selbst. Das durch O_1 ermittelte Seilpolygon wird dann in die Hauptfigur übertragen; es nähert sich in unserer Figur im Seilzug II am meisten der Bogenlinie. Aus der Figur erhält man $H_1 = 43$ kg und $K = 180$ kg Druck auf die Fugen; es kommt hier offenbar weniger auf die zulässige Spannung der Quadrateinheit, als auf die Lage der Mittellinie des Druckes an, um festzustellen, ob im Gewölbe keine Fugenklappungen eintreten.

Fig. 468.



IV. Die Fig. 468 stellt den Horizontalquerschnitt einer Stützmauer dar, welche aus einzelnen Pfeilern und dazwischen gespannten Bogen besteht.

Wir haben kein besonderes Zahlenbeispiel angenommen, da die Gesamtlösung wohl als eine Kombinationsaufgabe für Gewölbe und Stützmauern keine besonderen Schwierigkeiten bieten dürfte; durch die eingeführte gebogene Form der eigentlichen Stützmauer zwischen den Strebepfeilern wird die Tragfähigkeit, bezw. die Stabilität bedeutend erhöht.

V. In Fig. 469 ist ein Spitzbogengewölbe gegeben, dessen Stabilität und Widerstandsfähigkeit untersucht werden soll. Die Einteilung liefert die Gewichtselemente

$$q_1 = 600, \; q_2 = 800, \; q_3 = 1400 \text{ und } q_4 = 2100 \text{ kg}.$$

Mit dem Polpunkt O konstruiert man erst wieder die Schwerlinie Ss.

Um eine günstige Lage der Drucklinie zu erhalten, nimmt man die Richtung der Horizontalkraft H in der Mitte der Scheitelfuge und K in

der inneren Kerngrenze an. Gegeben ist die Stärke der Scheitelfuge $e = 0{,}2$ m, die der Kämpferfuge $e_1 = 32$ cm, ferner die Pfeilhöhe 1,85 m und die Spannweite $l = 2{,}2$ m.

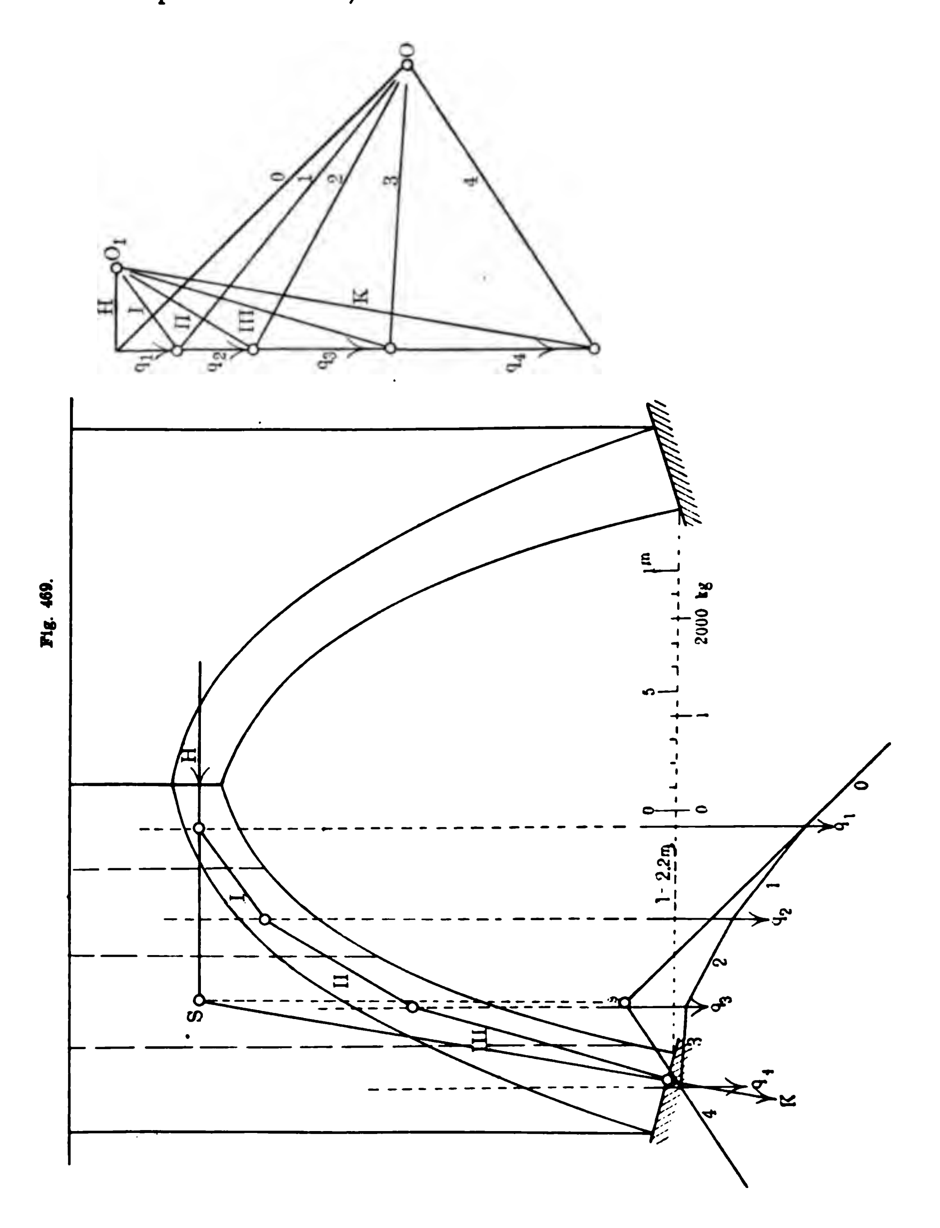


Fig. 469.

Die Druckspannungen berechnet man dann aus den der Zeichnung entnommenen Kräften H = 800 kg und K = 5000 kg; man findet für den Scheitel

$$k_d = \frac{H}{100 \cdot e} = \frac{800}{100 \cdot 20} = \tfrac{1}{3} \text{ kg}$$

und für den Kämpfer

$$k_d = \frac{2\,H}{100 \cdot e_1} = \frac{2 \cdot 5000}{100 \cdot 32} = 3 \text{ kg auf d. qcm.}$$

5. Biegungs- und Drehmomente, Kurbeln.

Im Anschluss an die Seite 369 u. f. in den Fig. 401 behandelten graphischen Zusammensetzungen von Biegungsmomenten, wollen wir noch ein für die graphischen Methoden sehr lehrreiches Kapitel anschliessen, welches sich auf die Zusammensetzung von Biegungs- und Drehmomenten bezieht.

Die praktischen Anforderungen solcher Zusammensetzungen sind oft ziemlich verwickelter Art; der rechnerische Weg bietet häufig genug Schwierigkeiten, da er der Übersicht für die idealen Spannungen entbehrt. Die graphische Darstellung lässt hier keinen Zweifel aufkommen, und zeigt mit viel grösserer Sicherheit die wunden Stellen einer solchen auf Biegung und Drehung beanspruchten Welle, Kurbel oder gekröpften Achse, als es die Rechnung bieten kann.

Nach den im II. Band S. 331 u. f. aufgestellten Theorien ist die ideale Spannung eines gleichzeitig mit k_s und k_z kg auf die Einheit beanspruchten Balkens

$$k_i = \tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{m}\right) k_z + \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{m}\right) \sqrt{k_z^2 + 4\,k_s^2} \quad . \quad . \quad (61)$$

Der sog. Kontraktionskoefficient m wird aus praktischen Versuchen gewonnen; er ist von dem Wachstum, bezw. von der Herstellung des Materiales abhängig und liegt zwischen den Grenzen m = 3 und m = 4. Verwendet man die von Bach eingeführte Beobachtungszahl $m = \frac{10}{3}$, so erhält man*)

$$k_i = 0{,}35\,k_z + 0{,}65 \sqrt{k_z^2 + 4\,k_s^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61\,a)$$

*) In Band II S. 331 bitten wir an dieser Stelle um Korrektur des dort vorhandenen Druckfehlers, $\frac{1}{m} + 1 = 1{,}7$ (5. Zeile v. unten) in $\frac{1}{m} + 1 = 1{,}3$ zu verbessern, und ebenso für die dortige Gl. 162a und in den folgenden Bezugsgleichungen den Koefficienten 0,85 in 0,65 zu verändern.

Für die Praxis und auch für die graphischen Darstellungen nach obiger Gl. 61 verwendet man meistens $m = 4$, und erhält

$$k_i = \tfrac{3}{8}\, k_z + \tfrac{5}{8} \sqrt{k_z^2 + 4\, k_s^2} \quad . \; . \; . \; . \quad (61\,b)$$

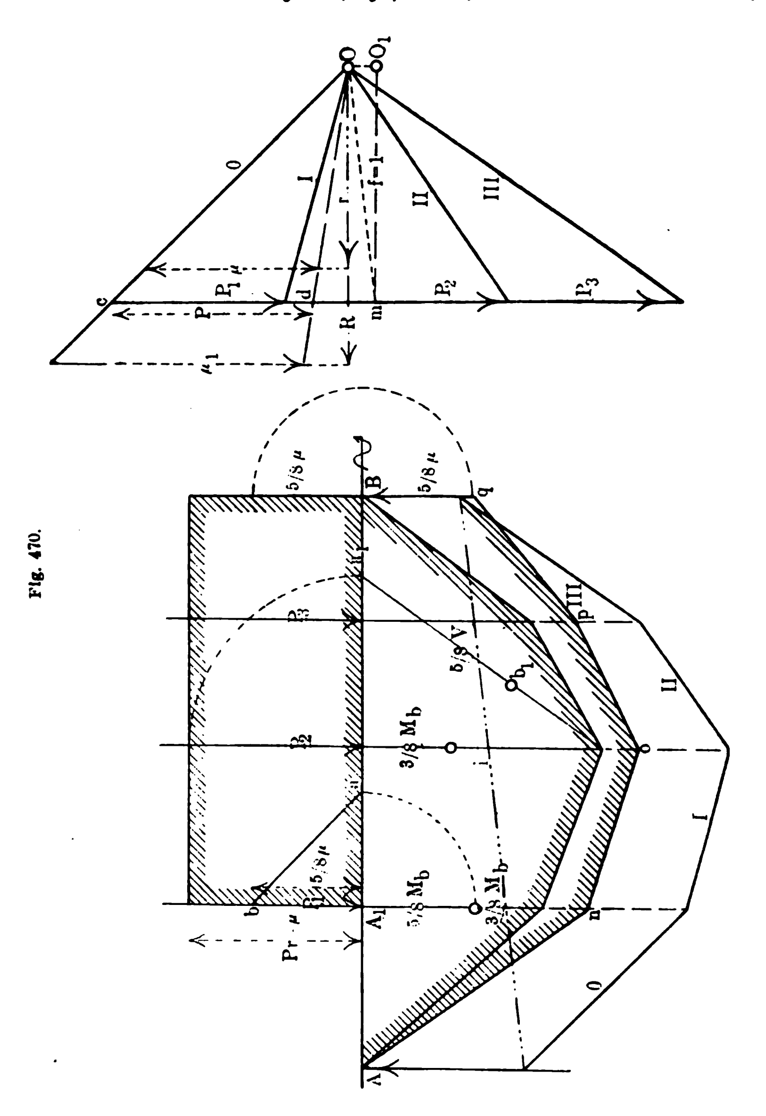


Fig. 470.

Bezeichnet man nun mit W_b das gegebene Biegungsmoment, mit M_t das Torsionsmoment, mit W und W_p die Widerstandsmomente für kreisförmigen Querschnitt, so sind die zulässigen Spannungswerte

$$k_s = k_b = \frac{M_b}{W} \text{ und } k_s = \frac{M_t}{W_p}.$$

Ferner kann man das polare Widerstandsmoment $W_p = 2\,W$ setzen, denn es ist bei d Kreisdurchmesser

$$W = \frac{\pi d^3}{32} \text{ und } W_p = \frac{\pi}{16} d^3,$$

also $W = \frac{1}{2} W_p$, die obigen Spannungswerte sind sonach

$$k_s = \frac{M_b}{W} \text{ und } k_s = \frac{M_t}{2\,W},$$

setzt man diese in die letzten Gleichungen ein, und berücksichtigt, dass $k_i = \frac{M_i}{W}$, so ergeben sich folgende Ausdrücke für das ideale aus Biegung und Drehung kombinierte Biegungsmoment

$$\left.\begin{array}{l} M_i = \frac{3}{8} M_b + \frac{5}{8} \sqrt{M_b^2 + M_t^2} \\ M_i = 0{,}35\,M_b + 0{,}65 \sqrt{M_b^2 + M_t^2} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (62)$$

Mit Zuhilfenahme eines der Fig. 475 beigezeichneten Reduktionsmassstabes lassen sich beide Gleichungen leicht verwerten; wir haben in den unten folgenden Beispielen die erste Formel zur Anwendung gebracht.

In vorstehender Fig. 470 ist nun zunächst die konstruktive bezw. graphische Ausführung der Kombination eines Biegungs- mit einem Drehmoment nach einer der obigen Formeln dargestellt. Die Achse oder Welle AB ist durch die Kräfte P_1 P_2 und P_3 auf Biegung beansprucht, wir konstruieren zunächst durch Annahme eines beliebigen Polpunktes O das Seilpolygon 0, I, II, III und übertragen die Schlusslinie i; der Schnittpunkt m liefert uns die Auflagerreaktionen A und B. Wir übertragen nun ferner durch einen neuen Polpunkt O_1, beide am besten im Abstand der Einheit $m\,O_1 = 1$, die Momentenfläche in die Achse AB mit horizontaler Schlusslinie, welche letztere also mit der Achse zusammenfällt (vgl. S. 262 u. f.).

Gegeben sei nun ferner das Drehmoment PR, bezw.

$$Pr = M_t = 716 \frac{N}{n} \text{ km} = 71620 \frac{N}{n} \text{ kcm} \quad . \; . \; (63),$$

die Zerlegung desselben in die Betriebskraft P und in den Halbmesser r als Momentenfaktoren ist beliebig, besser gesagt richtet sich nach der gegebenen Kurbel oder auch nach der Grösse der Zeichnung. In unserer Zeichnung soll vorläufig von einer Kurbel abgesehen werden, und es soll das Moment $\mu_1 = PR$ oder $\mu = Pr$ von A_1 durch B und event. weiter übertragen werden. Das Drehmoment besteht aus zwei Faktoren und

stellt sonach ein Rechteck dar, dessen eine Seite in AB fallen muss. Um den graphischen Wert μ, dem gewählten Polabstand entsprechend, zu erhalten, tragen wir in den Kräfteplan von O aus, R oder bezw. r auf, ferner von c an die Kräftelinie den Wert P und ziehen die Linie Od; jenachdem R grösser oder kleiner (r) als f, erhält man μ_1 oder μ als Längenmass für das Moment; denn es verhält sich

$$\left.\begin{array}{l}\mu_1 : R = P : f \text{ bezw.} \\ \mu : r = P : f\end{array}\right\}, \quad \ldots \ldots \quad (64)$$

woraus $f\mu$ bezw. $f\mu_1 = PR$ bezw. Pr.

μ oder μ_1 überträgt man in die Hauptfigur und zeichnet das Torsionsrechteck ein.

Die Verbindung beider Momentenflächen geschieht nun nach Gl. 62 auf graphomathematischem Wege. Jede Biegungsmomentenordinate teilt man in $\frac{3}{8}$ und $\frac{5}{8}$ bezw. in 0,35 und 0,65 ihrer Länge. Die Torsionsmomentenordinate in $\frac{5}{8}$ bezw. 0,65 ihrer Länge.

Die Hypothenuse ab liefert dann unmittelbar den Wurzelwert der Gl. 62. Das gleiche Resultat erzielt man, wie leicht einzusehen, wenn man die Hypothenuse der beiden ungeteilten Ordinaten, wie bei P_2 geschehen, bildet, und von dieser Länge $\frac{5}{8}$ bezw. 0,65 als Wurzelwert entnimmt:

$$a_1 b_1 = \tfrac{5}{8} \sqrt{M_b^2 + M_t^2}.$$

Ist, wie in B das Biegungsmoment, $M_b = 0$, so kommt nur $\frac{5}{8}$ des Torsionsmomentes, $\frac{5}{8} M_t$ bezw. 0,65 M_t in Betracht; in A sind beide Momente Null.

Man hat nun nur noch nötig, die Wurzellängen ab, $a_1\ b_1$ u. s. w. an die betreffenden Längen $\frac{3}{8}$ M_b von der Achse aus anzusetzen, eine graphische Addition, und erhält schliesslich die Ordinaten der idealen Momentenfläche

$$M_i = ab + \tfrac{3}{8} M_b, \quad M_i = \tfrac{3}{8} M_b + a_1 b_1 \text{ u. s. w.}$$

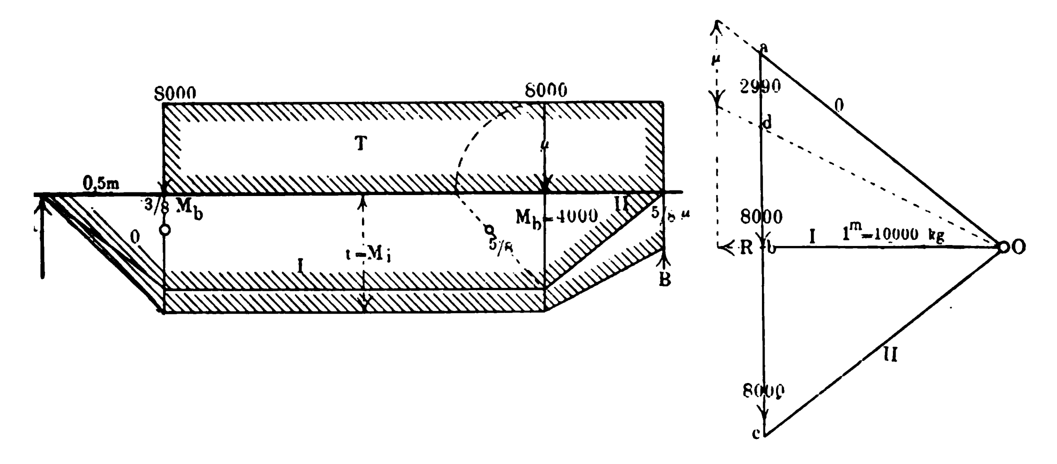
Die in Rechnung zu ziehende Momentenfläche ist dann AnopqB; deren Ordinaten mit f multipliziert, ergeben die idealen Momente.

Die Teilung der Ordinaten kann durch Rechnung oder auch, wie schon bemerkt, mit Hilfe des Reduktionsmassstabes, Fig. 475 durchgeführt werden.

Wir haben in Fig. 470 die Verbindungslinien An, no, op und pq als gerade Linien gezeichnet, konstruiert man einige Zwischenpunkte, wie in den andern Figuren ausgeführt, so erhält man konkave Kurven als Abschlusslinien der idealen Momentenfläche.

Beispiele. I. Die Wasserradwelle AB, Fig. 471, ist in den Entfernungen von 0,5 m von den Lagerungen mit je 8000 kg belastet (der Buchstabe B in der Figur ist mit seinem Pfeil über $\frac{5}{8}$ μ zu setzen), sie soll bei n = 12 Umdrehungen N = 60 PS übertragen; nach welchem grössten idealen Moment ist der mittlere Teil zu berechnen. Wir tragen die gegebenen Belastungen ab = bc = 8000, welche die Welle auf Biegung beanspruchen darf, auf, nehmen in b senkrecht auf ac den Polpunkt

Fig. 471.



O, hier in der Entfernung der Einheit an und konstruieren das Seilpolygon 0 I II. Das Torsionsmoment ist $M_t = 716{,}2 \ \frac{60}{12} = 3581$ kg. Die Zerlegung ergiebt PR = 1,2 · 2990 = 3590 kg; trägt man R = 1,2 m von O und ad = 2990 auf, so ergiebt sich die Momentenlänge für μ, indem man aO und dO verlängert bis zum Schnitt mit der durch den Endpunkt von R gezogenen Senkrechten. Man überträgt die Länge μ in die Hauptfigur, und kombiniert dann das Torsionsrechteck T mit der Momentenfläche der Biegung A o I II B zu der idealen Momentenfläche. Die grösste Ordinate M_i mit dem Massstab Ob = 1 = 10000 kg gemessen, liefert 4900 kg, und da die Einheit Ob, meter bedeutet, so sind 4900 gleichzeitig km, denn nach Gl. 44 S. 346 ist

$$M_i = t \cdot f = 4900 \cdot 1 = 0{,}49 \cdot 10000 \cdot 1 = 4900 \text{ kgm}.$$

Die Rechnung, auch die Zeichnung liefert M_b = 4000 kgm, M_t = 3581 $\backsim$ 3600 kgm, danach wird

$$M_i = \tfrac{3}{8}\, 4000 + \tfrac{5}{8} \sqrt{4000^2 + 3600^2} = 4870 \text{ kgm}.$$

II. Die Welle in Fig. 472 ist innerhalb der Auflager mit 300, 600 und 300 kg belastet, ausserhalb in 0,5 m Entfernung von B mit 400 kg; es sollen noch ausserdem N = 17 PS bei n = 12 Umdrehungen über-

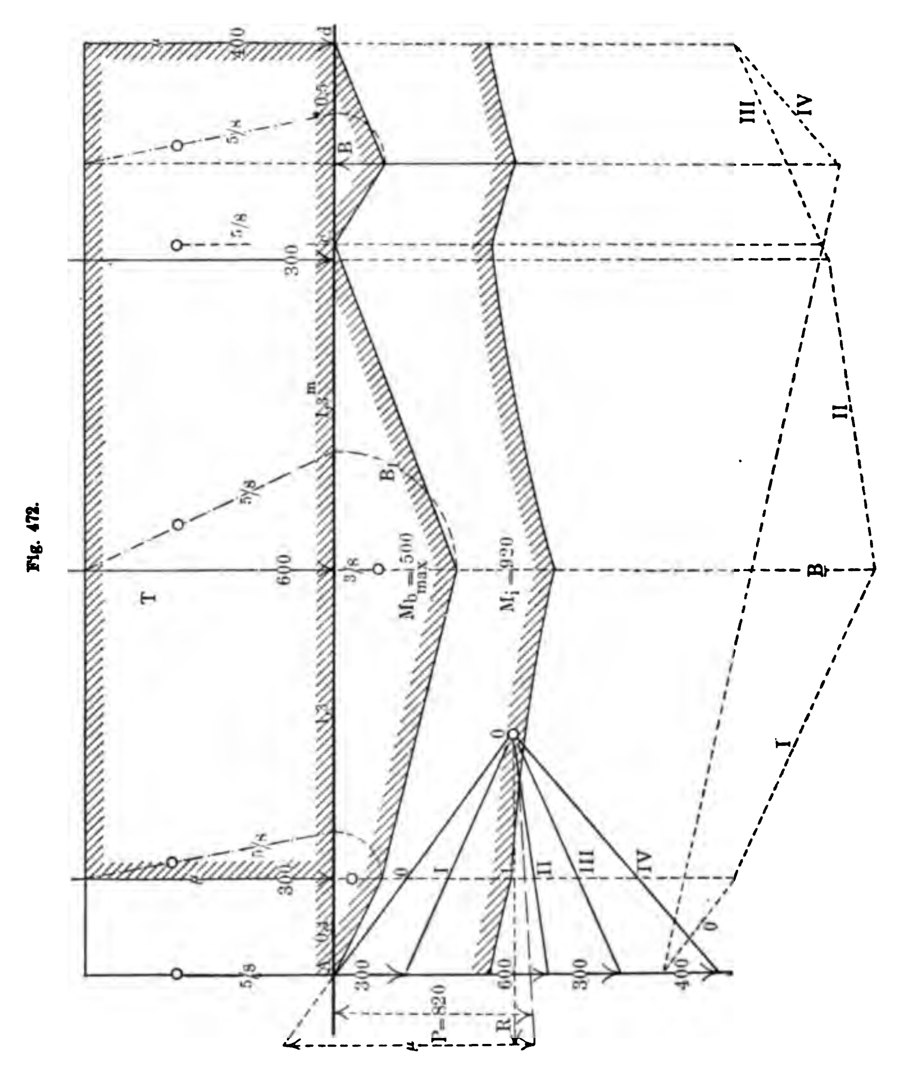


Fig. 472.

tragen werden. Das Torsionsmoment ist demnach

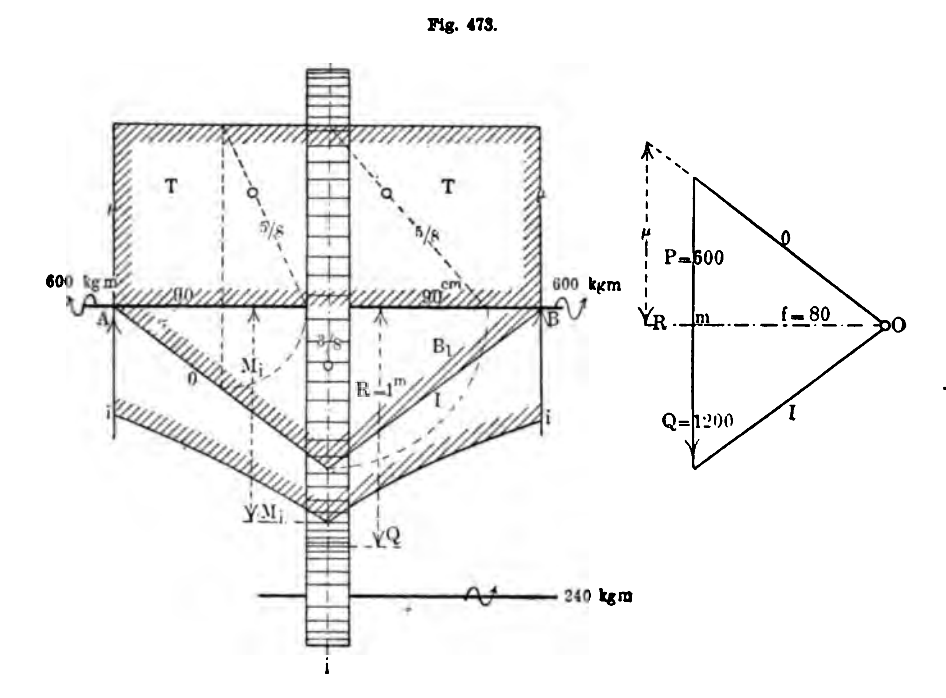
$$PR = 1{,}3 \cdot 820 = 716{,}2 \tfrac{17}{12} = 1066 \text{ kgm}.$$

Da wir den Polabstand wieder der Einheit = 1 m = 1000 kg gleich angenommen haben, so hätten wir μ = 1066 unmittelbar auftragen

können, um aber einen linearen Wert von μ zu erhalten, haben wir die obige Teilung in $820 \cdot 1,3$ vorgenommen.

Das mit dem beliebigen Pol 0 konstruierte Seilpolygon 0, I, II, III, IV haben wir in die Achse AB übertragen. Hierauf $R = 1,3$ und $P = 800$ in die Kräftelinie eingezeichnet und erhalten die dem Polabstand entsprechende Länge μ. Das Torsionsrechteck T mit der Biegungsfläche B_1 kombiniert, ergiebt die ideale Momentenfläche, deren grösste Ordinate M_i das ideale Biegungsmoment $M_i = 920$ kgm liefert, während die grösste Ordinate der Biegungsmomentenfläche $M_b = 500$ kgm ist. Die schwächsten Stellen in der Welle sind in A, d und c.

Fig. 473.



III. Es soll durch Vermittelung zweier Zahnräder ein Moment von $M = 1200$ kgm auf eine Welle AB, Fig. 473, übertragen werden, derart, dass von der Mitte der 180 cm langen Welle zu beiden Seiten 600 kg abgeleitet werden können; wie stark ist die Welle auszuführen; die Übersetzung ist 1 : 5, das Moment in der Betriebswelle sonach

$$\frac{1200}{5} = 240 \text{ kgm}.$$

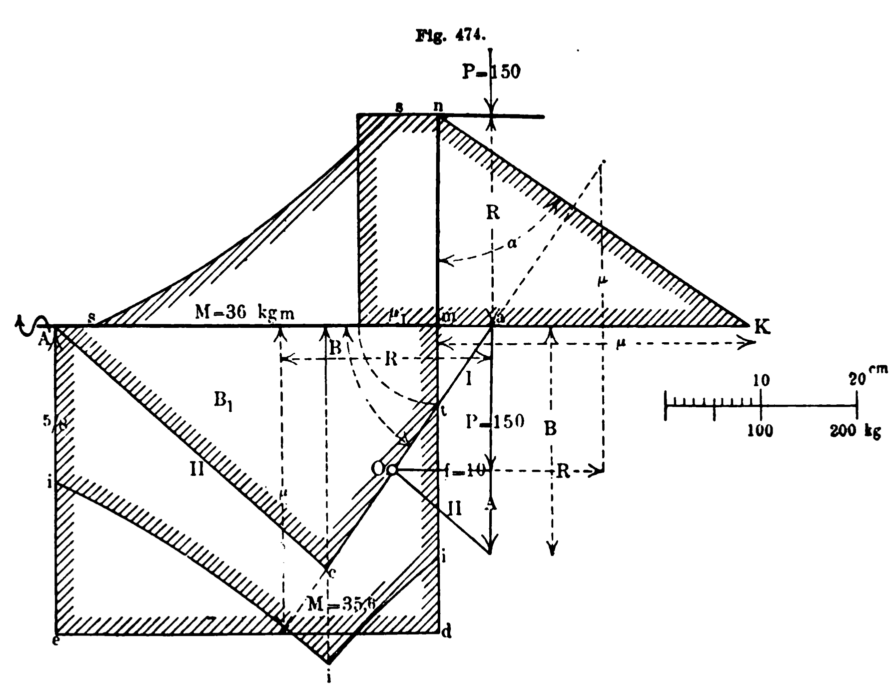
Das Rad hat 2 m Durchmesser, der Zahndruck ist demnach

$$Q = \frac{M}{R} = \frac{1200}{1} = 1200 \text{ kg};$$

dieser Druck ist gleichzeitig ohne Rücksicht auf das Zahnradgewicht die auf die Mitte der Welle einwirkende Biegungskraft. Tragen wir diese auf und nehmen in der Mitte derselben in m senkrecht den Polabstand, hier f = 80 an, so erhalten wir mit o und I das Seilpolygon mit horizontaler Schlusslinie, zugleich die Biegungsfläche B_1. Um die beiderseitigen Torsionsflächen T zu erhalten, tragen wir P = 600 kg in den Kräfteplan, ebenso den Radius R = 1 m von O aus auf und ermitteln μ. Die Zusammensetzung beider Momentenflächen nach obiger Gl. 62 zu dem idealen Moment i, i, bietet dann keine Schwierigkeiten mehr. Das grösste Moment ist

$$M_i = 900 \cdot f = 900 \cdot 80 = 72000 \text{ kgcm}.$$

Fig. 474.



IV. Es sollen durch eine rechtwinkelige Kurbel ABmn, Fig. 474, N = 3 PS bei n = 65 Umdrehungen in der Min. übertragen werden. Die Kurbelwelle liegt in A und B auf. Der Kurbelhalbmesser ist gegeben, R = 22 cm.

Der Druck P auf die Mitte des Kurbelzapfens lässt sich berechnen aus der Gl. 63

$$P = 716{,}2 \frac{N}{n \cdot R} = \frac{716{,}2 \cdot 3}{65 \cdot 0{,}22} = 150 \text{ kgm.}$$

Man rechnet zunächst die Zapfendimensionen aus, oder nimmt dieselben, sowie die des Kurbelarmes vorläufig an, und trägt die Mittellinie der Kurbel auf, A B m n. Die Zapfenkraft P wirkt durch die Mitte des Zapfens und schneidet in der Verlängerung die Achse der Kurbel in a. Man trägt dann senkrecht an die Achse in a die Kraft P, am Endpunkt derselben senkrecht den Polabstand, hier $f = 10$ und zieht die Linie a O, bezw. deren Verlängerung, bis zum Schnitt mit der Auflagerreaktionslinie B, diesen Schnittpunkt c verbindet man mit A und überträgt II parallel durch O, um die Auflagerkraft A festzustellen, diese ist hier $A = 90$ kg.

Wie leicht zu übersehen, ist I II das Seilpolygon des Polpunktes O mit horizontalem Abschluss $f = 10$, der letztere ist zugleich Polabstand für die Biegungsfläche A c t m · $A + P = 150 + 90 = 240$ kg, bilden zusammen die von unten nach oben wirkende Auflagerkraft B, welche P und A an ihren jeweiligen Hebelarmen, von B aus gemessen, das Gleichgewicht halten muss.

Die Torsionskraft $P = 150$ wirkt am Halbmesser $R = 22$ ctm. Wir können R in der Verlängerung von f oder auch entgegengesetzt senkrecht auf P auftragen; die Verlängerung der Seillinie a O nach der einen oder andern Seite liefert die dem Polabstand entsprechende Länge $\mu = P R$. Das Rechteck m d e A ist dann Torsionsrechteck, dieses mit der Biegungsfläche kombiniert, liefert die ideale Biegungsfläche A i i i m, nach welcher die Achse A m zu berechnen ist; der Zapfendruck bei A, nach oben wirkend, ist, wie schon angedeutet, $A = 90$ kg, das Auflager $B = 240$ kg.

Der Kurbelarm m n wird bei m durch das Moment P R am meisten beansprucht, die Biegung bei n ist Null. Wir tragen darum den Wert μ, bezw. den Winkel α, an m n, in n an; das Biegungsmoment für den Kurbelarm ist dann n m K.

Die Kraft P verdreht aber gleichzeitig am Halbmesser m a, der halben Zapfenlänge, den Kurbelarm. m a bildet nun bereits eine Kathete des Poldreiecks, liegt bezw. im $< \alpha$; das dem Torsionsrechteck des Kurbelarmes entsprechende Längenmass $\mu_1 = m t$ haben wir demnach nur nötig in die Achse zu übertragen, um das dem Arm m n entsprechende Torsionsrechteck zu erhalten; m t ist gleichzeitig das Bruch-

moment für den Zapfen selbst. Dieses mit dem $\triangle$ m n K nach Gl. 62 kombiniert, erhält man die ideale Biegungsfläche s m n s, nach welcher der Kurbelarm zu berechnen ist.

Die beiden grössten idealen Momente sind: für den Kurbelarm $M_i =$ 36 kgm und für die Welle AB in B, $M_i = 35{,}6$ kgm; beide kann man unmittelbar aus dem beigefügten Massstab abgreifen.

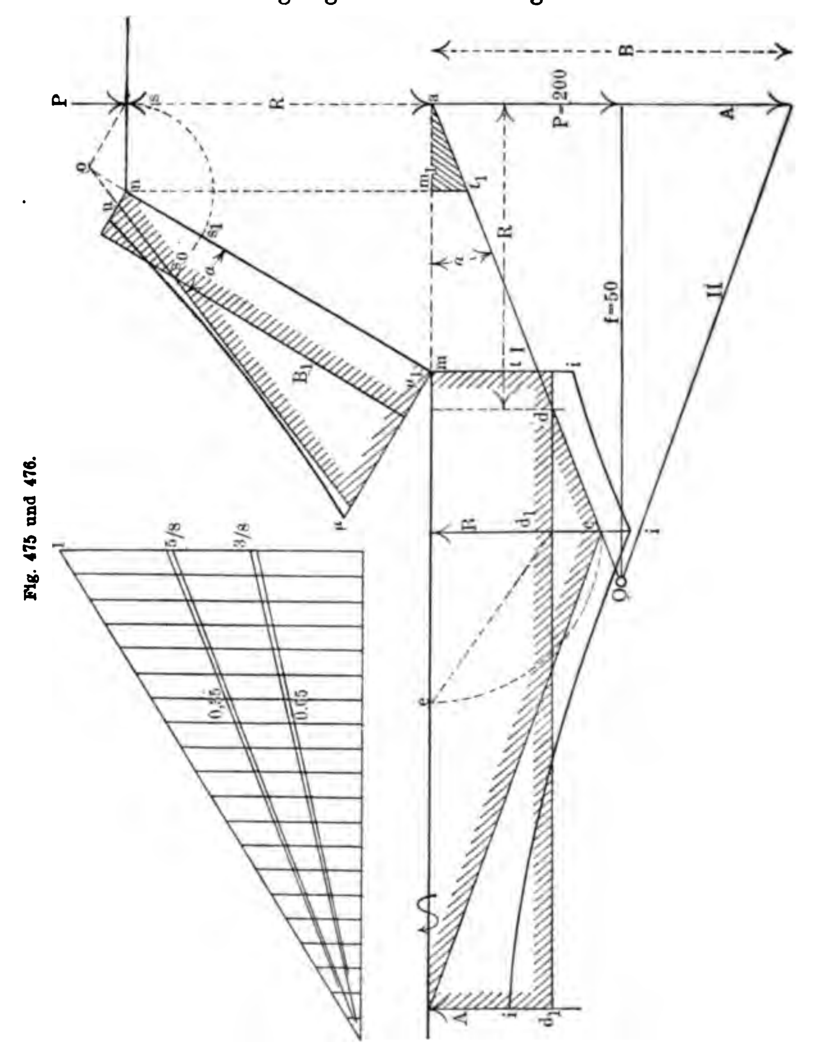


Fig. 475 und 476.

V. Die Konstruktion der Kurbel, Fig. 476, mit schief angesetztem Kurbelarm ist nach demselben Konstruktionsgang ausgeführt. Die Kraft

am Kurbelzapfen ist $P = 200$ kg, der senkrecht gemessene Kurbelarm ist $R = 32$ cm. Der Polpunkt O liegt im Polabstand $f = 50$. Dieser Figur beigefügt, ist, wie schon oben bemerkt, Fig. 475, ein Reduktionsmassstab, der sich natürlich auch für die anderen Figuren verwerten lässt.

Man trägt die gegebene Kurbelkraft $P = 200$ kg im Punkt a senkrecht zur Kurbelwellenachse an, am Endpunkt derselben den Polabstand hier in $f = 5$ Einheiten, bezw. in 50 cm. Die Seilpolygonlinie I schneidet die Reaktionslinie B in c, die Verbindungslinie c mit A ist die andere Seilkraftlinie II; sie bestimmt durch parallele Übertragung durch den Polpunkt die Reaktionskraft A. A und P wirken nach unten und halten der Kraft $B = A + P$ in B als Drehpunkt das Gleichgewicht. Trägt man ferner R in der Achse senkrecht auf P auf, und zieht am Endpunkt eine Parallele zu P, so schneidet diese die Seilkraft I in d, durch eine Parallele zu A m durch d erhält man das Torsionsrechteck $A d_1 d m$, welches mit der Biegungsmomentenfläche A c m nach Gl. 62 zusammengesetzt, die ideale Biegungsfläche A i i i m liefert, nach welcher die Achse A m berechnet wird. Aus der Zeichnung findet sich

$$A = 770 \text{ kg}, \; B = 200 + 770 = 970 \text{ kg, ferner}$$
$$Bi = M_i \max = 210 \cdot 50 = 10500 \text{ kgcm}.$$

In A muss die Welle noch auf das ideale Biegungsmoment

$$M_i = Ai = 85 \cdot 50 = 4250 \text{ kgcm}$$

berechnet werden. Die grösste Ordinate Bi findet man, indem man Bc nach Be überträgt, e mit d_1 dem Endpunkt der Biegungsflächenordinate verbindet und $\frac{5}{8}$ von ed_1 zu $\frac{3}{8}$ $\overline{Bc}$ addiert. Da nun hier der Kurbelarm mn nicht mehr mit mt in eine gerade Linie fällt wie in der vorigen Kurbel, so ist das Zapfenbiegungsmoment $P \cdot \overline{am_1}$ dadurch festzustellen, dass man senkrecht durch n die Momentenordinate $m_1 t_1$ abschneidet, welche natürlich dem Polwinkel α entsprechen muss.

Die Biegungsfläche für den Kurbelarm mn erhält wieder in m ihre grösste Ordinate. Verlängert man mn bis o, und trägt in o den Winkel α an, so schneidet dieser auf den Senkrechten in m und n das Biegungstrapez B_1 ab, die Biegungsfläche des Kurbelarmes. Das Drehmoment P am Hebelarm os senkrecht auf mn wird gefunden, indem man os nach os_1 schlägt (in der Fig. wurde der Bogen fälschlich von n geschlagen) und senkrecht darauf mit $s_1 s_0$ in die Abgrenzungslinie der Biegungsfläche einschneidet; beide verbinden sich zu der idealen Biegungsfläche $u m n \mu$, nach welcher der Arm mn zu berechnen ist. Man findet aus der Figur

$$M_i = \overline{m\mu} \cdot f = 180 \cdot 50 = 9000 \text{ kcm}.$$

Das Zapfenmoment ist $M_z = \overline{m_1 t_1} \cdot f = 40 \cdot 50 = 2000$ kcm.

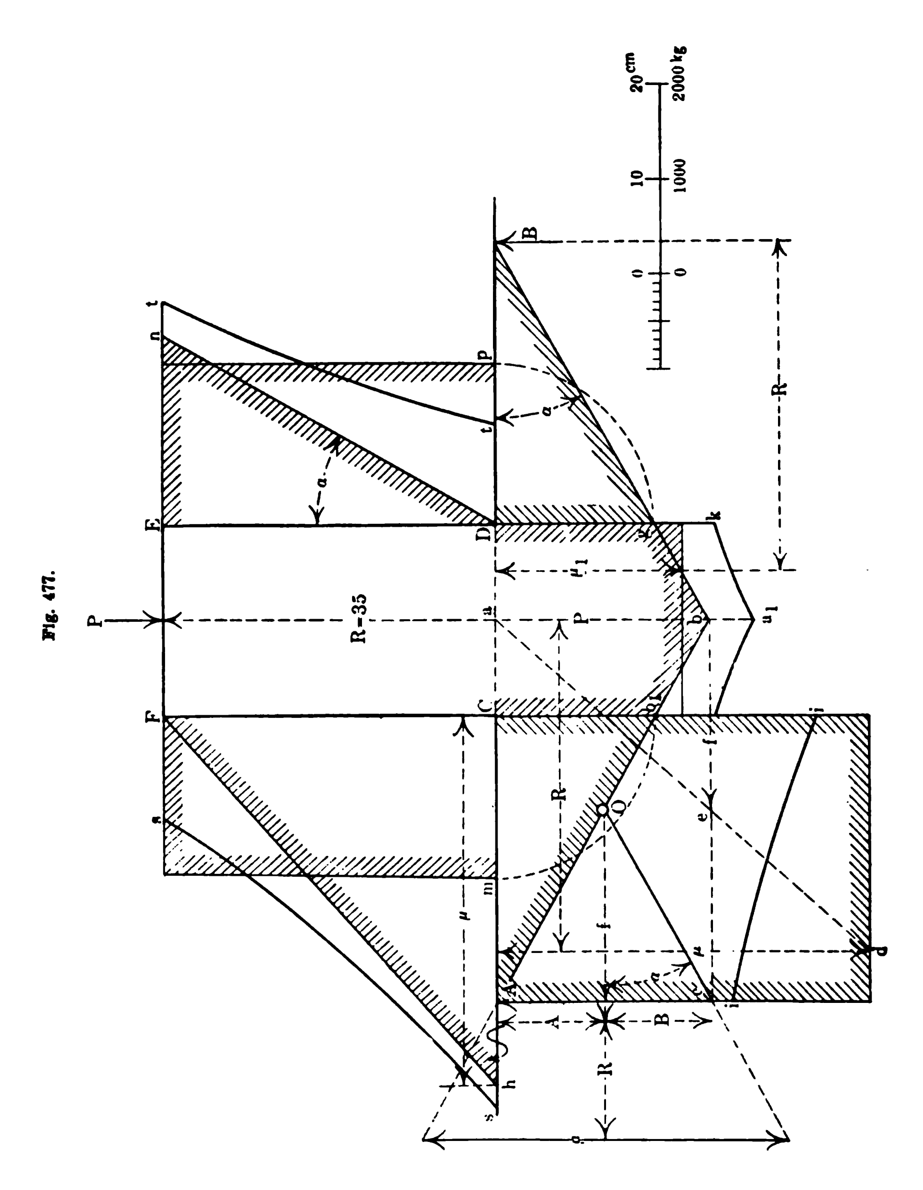


Fig. 477.

VI. Es soll eine Krummachse berechnet werden, welche bei 50 Pferdestärken 46 Umdrehungen in der Minute machen soll. Der

Kurbelhalbmesser, die in diesem Fall **senkrechte** Kröpfung, ist gegeben, R = 0,35 m. Die Kurbelkraft P ist sonach nach Gl. 63

$$P = \frac{716,2}{R} \frac{N}{n} = \frac{716,2 \cdot 50}{0,35 \cdot 46} \sim 2250 \text{ kgm.}$$

Die Kraft P liegt in der Mitte der beiden Lagerungen A und B, deren Abstand 0,8 m ist. Man überschlägt nun vorläufig die Hauptdimensionen der Achse, namentlich um Anhaltepunkte für die Zapfen zu erhalten, deren Längen zu berücksichtigen sind, um eine Achsenlinie der gekröpften Welle zeichnen zu können.

Das grösste Bruchmoment im Angriffspunkt der Kraft P = 2250 ist, ohne Rücksicht auf die Drehung,

$$M = \frac{Pl}{4} = \frac{2250 \cdot 0,8}{4} = 450 \text{ kgm} = 45000 \text{ kgcm.}$$

Nach Band II Gl. 46 ist sonach das Widerstandsmoment

$$W = \frac{M}{k_b} = \frac{45000}{500} = 90,$$

wonach sich der Durchmesser der Welle an dieser Stelle aus

$$90 = \frac{\pi}{32} d^3,$$

zu d ∼ 10 cm ergeben würde.

Wir haben in vorstehender Figur die ideale Zapfenlänge von Mitte zu Mitte Kurbelarm zu 20 cm angenommen.

Wir tragen ab = P = 2250 in der Richtung der Kraft P auf und verbinden b mit A und B, ziehen durch b zu AB eine Parallele bis zum Schnitt c der Auflagerreaktion A, dann ist Ac = A + B = P; zieht man nun ferner cO parallel zu Bb, so ist der Schnitt O in Ab der Polpunkt, AbB die Biegungsmomentenfläche. Der Polabstand ergiebt sich hier zu f = 20 cm, das Biegungsmoment im Angriffspunkt des Halszapfens bei P ist dann ab = 2250 · 20 = 45000 kcm.

Wir wollen nun vorausgehen lassen, dass die obige Arbeitsleistung von 50 PS nur nach links durch die Achse AC abgeleitet werden soll, die rechte Kurbelachse findet daher in B nur eine einfache Lagerung, sie ist in DE auf Biegung beansprucht und hat, weil in B kein Widerstand vorhanden ist, abgesehen vom Zapfenreibungswiderstand, keine Torsion zu übertragen, die Achse AC hingegen ist auf Torsion durch das Moment PR zu berechnen.

Wir tragen darum, um das Torsionsrechteck für AC zu bestimmen, R von O oder ebensogut R senkrecht auf ab an, überträgt man ferner den Polabstand f nach be und verlängert ae bis zu d, so ist

d der Abschluss des Torsionsrechteckes. Es ist natürlich ebensogut möglich, wenn R klein ist, dass die Länge μ des Torsionsmomentes PR innerhalb der Linie bc fallen kann.

Die beiden Momentenflächen $\triangle$ Ab_1C und das Rechteck AdC werden zu der idealen Biegungsmomentenfläche AiiC verbunden. Das Biegungsmoment der Achse BD in D ist bereits durch das $\triangle$ BDg gegeben, Torsion ist, wie vorausgesetzt, keine vorhanden.

Die Beanspruchung der beiden Kurbelarme DE und CF ist, da die Torsion nur einseitig abgegeben wird, verschieden. Auf der A Seite ist der Torsionswiderstand vorhanden, die Biegungsbeanspruchung des Armes CF ist sonach bei C am grössten und kann nur vom Moment PR abhängen; trägt man demnach μ nach Ch, so ist $\triangle$ ChF die Biegungsmomentenfläche. Die auf CF einwirkende Verdrehungskraft ist A am Hebelarm AC, sie wird also durch das Moment Cb_1 dargestellt, man überträgt daher die Linien Cb_1 nach Cm und erhält durch Fm das Torsionsrechteck, welches mit dem $\triangle$ CFh zusammengesetzt, die ideale Biegungsfläche CssF giebt, nach welcher der Kurbelarm zu rechnen ist.

Denkt man sich die Schubstange in EF angreifend und für einen Augenblick fest mit dem Halszapfen verbunden, hingegen B sich drehend oder besser durch den Lagergegendruck auf die sich in B frei bewegende Achse DB einwirken, so sucht die Lagerkraft B den Kurbelarm DE bei E als grösstes Moment abzubrechen; wir haben also nur nötig den Winkel α für die Kraft B, um denselben Polwinkel bei O einzuhalten, an D anzutragen. Das Biegungsdreieck DEn mit En als grösste Momentenordinate entspricht dann dem Kurbelarm DE. Die Torsionskraft ist wieder B am Halbmesser DB, sonach für den Winkel α stellt im $\triangle$DgB die Ordinate Dg, die wir nach Dp übertragen, die Seite des Torsionsrechteckes pE dar, welche den Kurbelarm DE verdreht, beide liefern das ideale Biegungsmoment für DE, nämlich die Fläche DttE.

Die Biegungsfläche für den Halszapfen EF endlich ist, wie uns schon bekannt, C$b_1$bgD. Der Torsion entspricht die Reaktion in B am Hebelarm R. Wir tragen hiernach dem Polabstand f, bezw. dem Polwinkel α entsprechend, R von B aus auf und erhalten die dem Moment B · R entsprechende Länge μ_1, da in unserem Beispiel Aa = aB, so wird in unserem Falle $\mu_1 = \frac{\mu}{2}$.

Das ideale Moment aa_1 = M_2 für den Halszapfen ergiebt sich aus der Zeichnung

$$M_1 = aa_1 \cdot f = 2700 \cdot 20 = 54000 \text{ kcm},$$

es wird um 9000 kcm grösser als das oben berechnete. In der Ausführung wäre es geboten, den Halsschenkel EF doch etwas grösser als 20 cm anzuordnen.

Der Durchmesser des Halszapfens ergiebt sich aus*)

$$54000 = k_b \frac{\pi d^3}{32}, \quad d = \sqrt[3]{\frac{54000 \cdot 32}{\pi \cdot 500}} = 10{,}3 \text{ cm},$$

die Länge des Halszapfens 20,6 cm, hierzu kommen noch die beiderseitigen halben Stärken des Kurbelarmes an dieser Stelle.

Das Moment Ci für die Achse CA wird aus der Zeichnung entnommen

$$M_t = 3400 \cdot 20 = 68000 \text{ kgcm}.$$

Das grösste Biegungsmoment für DB ist

$$M_t = Dg = 1700 \cdot 20 = 34000 \text{ kgcm}.$$

Der Kurbelarm CF ist in C mit dem Moment beansprucht

$$M_t = Cs = 4150 \cdot 20 = 83000 \text{ kgcm}.$$

In F wirken noch in Richtung der Achse EF

$$M_t = Fs = 1100 \cdot 20 = 22000 \text{ kgcm}.$$

Der Kurbelarm DE wird in D nach dem Moment

$$M_t = Dt = 1050 \cdot 20 = 21000 \text{ kgcm},$$

in E nach dem Moment

$$M_t = Et = 2390 \cdot 20 = 47800 \text{ kgcm}$$

zu berechnen sein.

VII. Die Berechnung der gekröpften Kurbel in Fig. 478 schliesst sich der soeben besprochenen unmittelbar an.

Hier sollen P = 2250 kg durch den Kurbelhalbmesser R = 32 cm nach beiden Seiten gleichmässig übertragen werden. Die Schenkel Aa und Ba sind hier ungleich gross. Wir tragen zunächst mit einem beliebigen Pol O die Kraft P auf und konstruieren das Seilpolygon A_1I IIB_1, dessen grösstes Moment unterhalb P wir nach ab übertragen; der Pol O_1 entspricht hiernach einer in der Achse AB liegenden Schlusslinie und AbB ist die Biegungsmomentenfläche.

Die Gesamtkraft ist 50 𝒫𝒮 bei 50 Umdrehungen, denn nach

$$\frac{N}{n} 71620 = M \text{ ist } 2250 \cdot 32 = \frac{50}{50} 71620 \sim 72000 \text{ kgcm};$$

*) Vergl. Band II S. 351; Fig. 286. In der dortigen Rechnung ist versehentlich das Biegungsmoment im Auflager B mit 12 cm statt nach dem in der Figur angegebenen Hebelarm von 20 cm Länge berechnet. Das Biegungsmoment ist daher

$$M_b = 1640 \cdot 20 = 32800 \text{ kgcm},$$

oder es ist in Fig. 286 der Hebelarm für die Kraft 1640 in 12 cm zu verändern.

nach beiden Seiten werden N = 25 PS abgegeben. Wir tragen nun R = 32 an O_1 in f an und finden durch Verlängerung der punktierten Seilkräfte μ, welche Länge wir als Seite des Torsionsrechteckes zur Hälfte

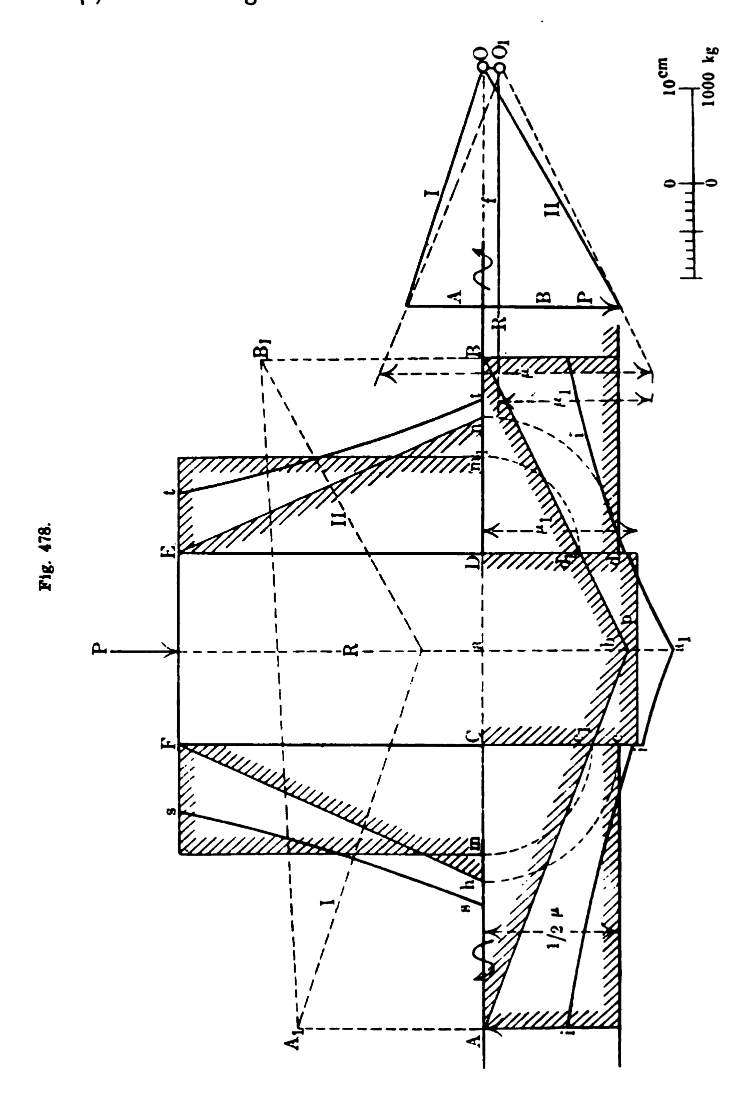


Fig. 478.

Cc = Dd = ½ μ abtragen. Diese Torsionsrechtecke Ac und Bd kombinieren wir mit den betr. Biegungsmomentenflächen △ ACc_1 und BDd_1 zu den idealen Momentenflächen AiC und DiB.

Die beiden Kurbelarme CF und DE finden in A und B jeder einen

Widerstand, da die Kraft nach beiden Seiten übertragen wird, ihre grössten Momente sind sonach $\frac{P}{2}$ R für jeden Arm; diesem Moment entsprechen die Längen $\frac{1}{2}\mu$, welche von C und D aus nach beiden Seiten in die Achsen geklappt werden. Das Biegungsdreieck für CF ist dann CFh, das des anderen Armes DEn. Die Torsionsrechtecke für beide Arme entsprechen den Momenten

$$A \cdot \overline{AC} \text{ und } B \cdot \overline{BD},$$

wir erhalten sie, wie in der vorigen Figur, wenn wir die Momente Cc_1 und Dd_1 nach m bezw. nach m_1 übertragen. Das ideale Biegungsmoment des linken Kurbelarmes CF setzt sich aus dem $\triangle$ CFh und dem Rechteck mF zu der Fläche CssF zusammen, das des rechten Armes aus dem $\triangle$ DnE und dem Rechteck m_1E zu DttE. Das grösste Biegungsmoment für den Halszapfen EF ist ab, das Torsionsmoment erhalten wir, wenn wir R von O_1 an auftragen und den Seilstrahl, welcher der Reaktion B entspricht, verlängern, das Moment μ_1 ist dann $\mu_1 = B \cdot R$. Das Torsionsmoment auf der andern Seite $A \cdot R$ ist kleiner, wir verwenden daher das Rechteck CpD und kombinieren dasselbe mit der Biegungsfläche Cc_1bd_1D zu der idealen Biegungsfläche, deren grösste Ordinate aa_1 ist.

Obgleich sich die gesamte Kraftübertragung dieser Krummachse von der in Fig. 477 nicht viel unterscheidet, so werden aber doch die Dimensionen der Achse selbst schwächer, da sich die gesamte Kraft nach beiden Seiten verzweigt.

Das grösste Moment des Halszapfens ist für $f = 25$

$$M_i = aa_1 \cdot f = 2000 \cdot 25 = 50000 \text{ kgcm}.$$

Das Moment in C für die Achse AC ist

$$M_i = Ci \cdot f = 1590 \cdot 25 = 39750 \text{ kgcm}.$$

Das für die rechte Achse DB ist in D etwas kleiner

$$M_i = 1480 \cdot 25 = 37000 \text{ kgcm}.$$

Der Kurbelarm CF ist beansprucht in C mit

$$M_i = Cs \cdot f = 1700 \cdot 25 = 42500 \text{ kgcm},$$

in F mit

$$M_i = Fs \cdot 25 = 700 \cdot 25 = 17500 \text{ kgcm}.$$

Dieselbe Beanspruchung erfährt der rechte Kurbelarm BE in E und in D.

Bedeutend stärkere Dimensionen müssen die linke Achse AC und der linke Arm in Fig. 477 erhalten als die gleichen Elemente in der eben berechneten Krummachse. Von den Lagerungen A und B aus

können die Wellen nach beiden Seiten auf Torsion nach dem Moment

$$M_t = Ai \cdot f = 800 \cdot 25 = 20000 \text{ kgcm}$$

berechnet werden.

Bei Anwendung von Schmiedeeisen sind die Wellendurchmesser (vgl. Band II S. 67)

$$d = 0{,}289 \sqrt[3]{20000} = 7{,}8 \text{ cm}.$$

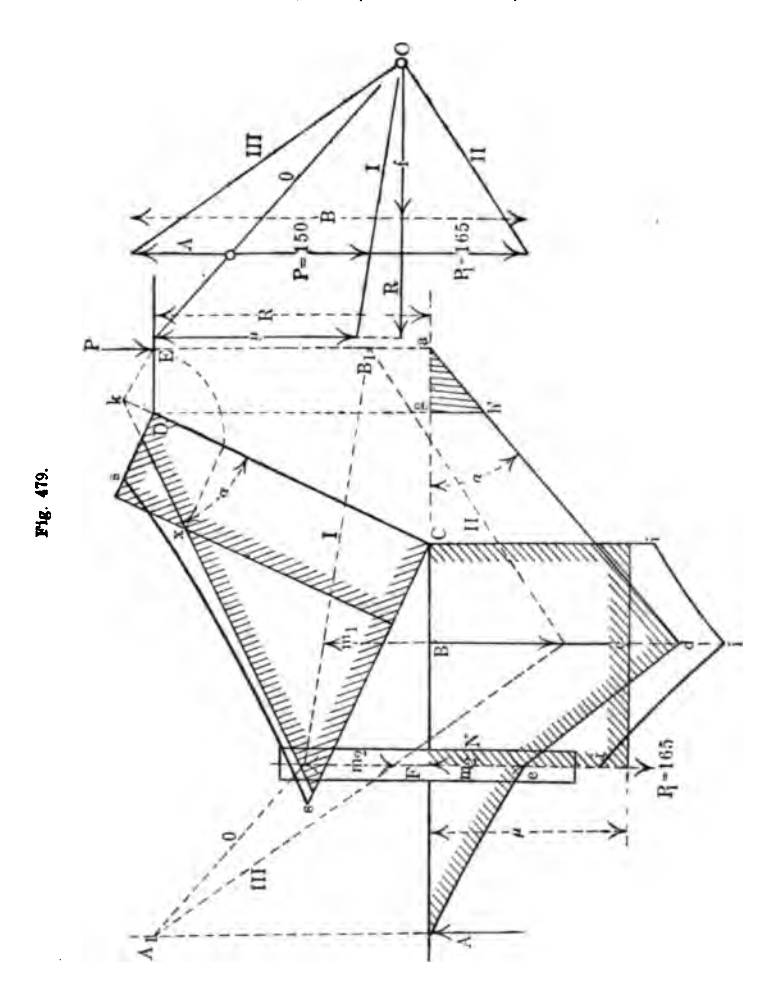


Fig. 479.

VIII. Wir haben uns in Fig. 479 eine Stirnkurbel mit unter einem Winkel stehende Kurbelarm zur Berechnung vorgelegt, welche in der Kurbelachse zwischen den Lagern A und B noch einer Biegungskraft

$P_1 = 165$ ausgesetzt ist; von da soll auch die durch die Kraft $P = 150$ im Kurbelzapfen eingeführte Torsion übertragen werden.

Der Kurbelhalbmesser ist $R = 29$ cm. Das Moment in der Achse ist

$$M = 29 \cdot 150 = 4350 \text{ kgcm.}$$

Die Riemscheibe N hat 0,8 m Halbmesser, sonach ist auf der einen Seite der Riemzug

$$\frac{4350}{80} = 55 \text{ kg,}$$

auf der anderen Seite bringen wir ihn wegen der Reibung doppelt in Anrechnung*), daher ist die Zugkraft in der Riemscheibe

$$P_1 = 3 \cdot 55 = 165 \text{ kg.}$$

Wir tragen die Richtungen und Grössen von P und P_1 auf, wählen im Abstand f den Polpunkt O und konstruieren das punktiert eingezeichnete Seilpolygon O I II III, bezw. $A_1 B_1$; wir übertragen dasselbe weiter in die Achse AC, indem wir die Momente m_1 und m_2 in B und F abtragen, die an die Achse Aa sich anschliessende Biegungsmomentenfläche ist dann Aeda. Das Moment des Zapfens in D wird dargestellt durch die Ordinate gh im $\triangle$ gha.

Die Ordinate des Torsionsrechteckes auf der Kurbelachse CF erhalten wir durch Auftragen von R in die Polabstandslinie, es wird dann μ proportional dem Polabstand, das Rechteck FcC wird mit einem Teil der obigen Momentenfläche, mit FdC nach Gl. 62 zusammengesetzt; es resultiert die ideale Biegungsfläche FiiiC, während das Achsenelement AF nach dem Biegungsdreieck AeF, bezw. in F nach der Ordinate Fi zu berechnen wäre. Der Zapfendruck A ergiebt sich aus dem Kräfteplan zwischen den Seilstrahlen o und III.

Übertragen wir den Winkel α nach k als Scheitel, so erhalten wir das Biegungsdreieck für den Kurbelarm CD; das Torsionsmoment ist $P \cdot \overline{DE}$, wir übertragen DE durch einen Kreisbogen in den Kurbelarm, ziehen senkrecht bis zum Schnitt x und durch x eine Parallele zu DC.

Beide Momentenflächen liefern die ideale Momentenfläche CDss zur Berechnung des Kurbelarmes.

Die Momente, welche in Rechnung zu ziehen sind, entnimmt man aus der Zeichnung und multipliziert sie mit dem Polabstand f: für die Achse AC

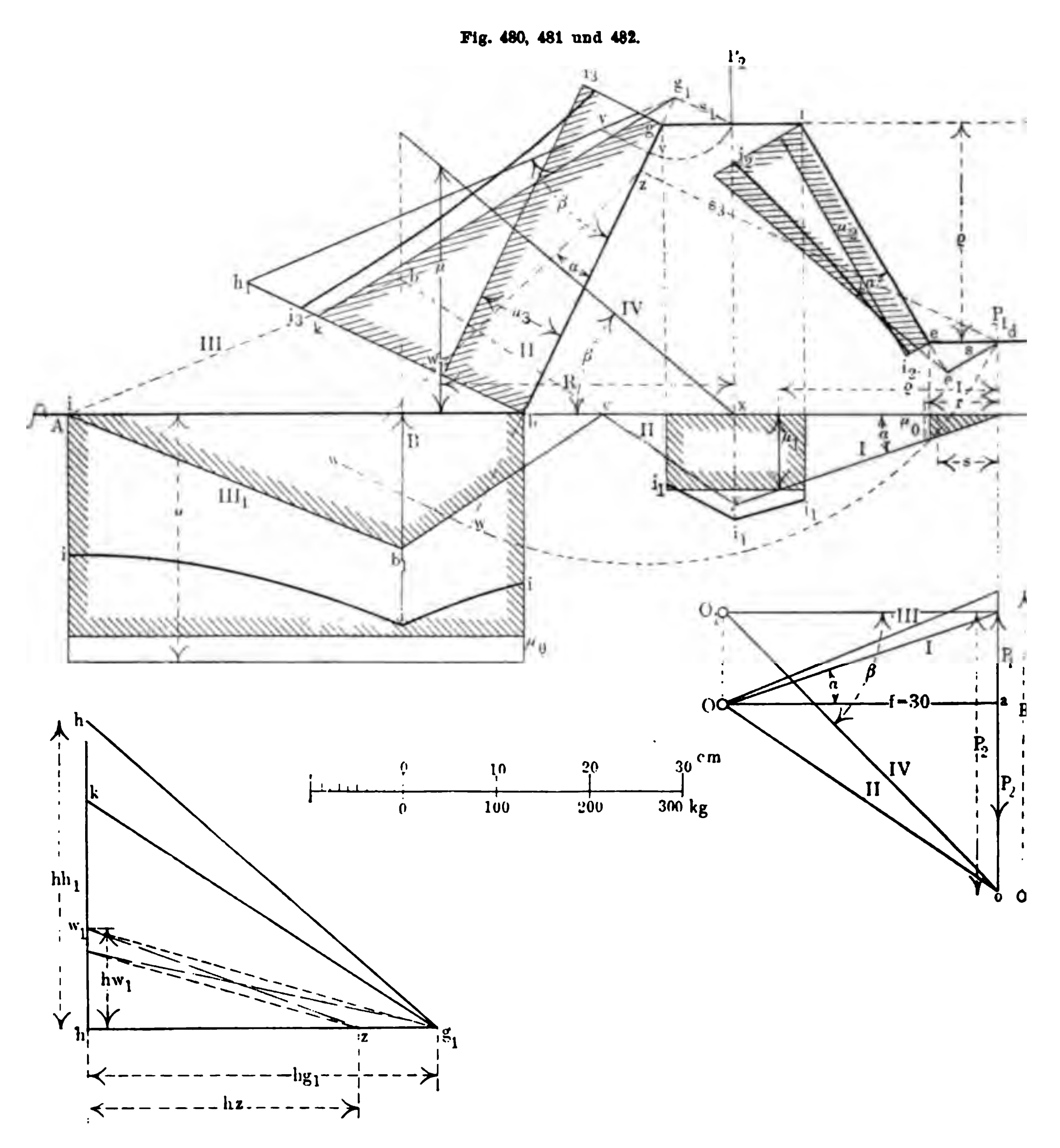
in F ist $M_i = Fi \cdot f$; in B, $M_i = Bi \cdot f$; in C, $Ci \cdot f$ für den Kurbelarm.
in C, $Cs \cdot f$; in D, $Ds \cdot f$.

---

*) Vergl. Band II, Gl. 114 S. 217.

IX. Die folgenden Fig. 480 bis 482 stellen die graphische Konstruktion einer Gegenkurbel (Kontrekurbel) dar.

Fig. 480, 481 und 482.



A und B sind die beiden Auflager, das vorläufig angenommene Achsenkreuz ist Ahgfed. Die Kraft im Halsschenkel gf ist $P_2 = 300$ kg,

die in dem Gegenkurbelzapfen ist $P_1 = 100$ kg, um die ungünstigste Stellung zu erzielen, nehmen wir beide entgegengesetzt wirkend an, P_2 nach unten, P_1 nach oben.

Wir wählen in Fig. 481 einen Polpunkt O, tragen von a, P_1 nach oben, P_2 nach unten auf, und errichten in a den Polabstand f senkrecht auf P_1 und P_2. Das Seilpolygon I II III, welches die Achse in c, Fig. 480, schneidet — in c ist das Moment Null — wird nach unten geklappt, so dass $Bh = Bb_1$. Der Zapfen de für die Gegenkurbel wird nach dem unter demselben liegenden Momentendreieck, und zwar nach dem Moment, welches sich aus der grössten Ordinate desselben, unter e ergiebt, berechnet; es ist in der Figur nicht näher bezeichnet. Die Biegungsmomentenfläche für den Halszapfen gf besteht aus zwei Trapezen, die grösste Ordinate ist xy. Die Verdrehung dieses Zapfens erfolgt durch die Kraft P_1 am Hebelarm $R - r = \rho$. Dieser Wert wird von der Senkrechten durch d in die Achse übertragen, und erhält man das Drehmoment μ_1; dasselbe Resultat wird man erhalten, wenn man ρ von O aus in den Polabstand anträgt. Die Zusammensetzung beider Momentenflächen ergiebt die ideale, deren Abschluss $i_1 i_1 i_1$ ist. Nach dem Moment

$$M_i = \overline{xi_1} \cdot f = 112 \cdot 30 = 3360 \text{ kgcm}$$

wird man den Zapfen gf berechnen. Das Moment für den Zapfen in e ist

$$M_b = 22 \cdot f = 22 \cdot 30 = 660 \text{ kgcm}.$$

Die Achse ABh ist auf Biegung und Torsion beansprucht. Die Biegungsfläche ist uns bereits bekannt, sie ist mit drei Buchstaben bezeichnet Ab_1h, auf die Seilzüge III_1 bezw. III kommen wir gleich zurück. —

Ehe wir die Torsionsrechtecke feststellen, wollen wir die noch fehlenden Kräfte im Kräftepolygon, Fig. 481, bestimmen. Verbinden wir, Fig. 480, b mit A und übertragen III parallel durch O, so schneidet III, Fig. 481, in der hier verlängerten Kräftelinie die Kraft A ab, weil Oa parallel der Achse, die horizontale Schlusslinie ist. P_2 wirkt nach unten, P_1 nach oben; um das Gleichgewicht herzustellen, müssen A nach unten und die Kraft in B, das Auflager, nach oben wirken; III_1 ist, wie schon gesagt, der nach unten geklappten Seillinie III gleich.

Die Torsion in der Achse Ah können wir hier auch nur indirekt durch die Gegenkraft im Auflager B bestimmen. Denken wir uns die Schubstange im Zapfen gf für einen Augenblick fest verbunden, so wirkt die Kraft im Auflager B am Hebelarm R entgegen, es dreht aber die Kraft P_1 am freien Zapfenende ed, und zwar am Hebelarm r. Das Moment BR finden wir proportional dem gewählten Polabstand, indem wir

in Fig. 481 am Endpunkt von P_1 den Polabstand parallel Ah abtragen, und den neuen Polpunkt O_1 mit o verbinden; die Seilkraft IV wird dann von x parallel in die Hauptfigur übertragen. Schneidet man von x in der Achse R ab, so ist μ das fragliche Moment, dasselbe können wir natürlich auch aus Fig. 481 bestimmen, wenn wir R von O_1 aus abtragen, da der $\angle \beta$ in beiden Dreiecken derselbe ist. Das Gegenmoment $P_1 r$ ergiebt sich durch den Winkel α, indem wir r unterhalb d in der Achse abtragen und die Ordinate μ_0, das Moment $P_1 r$ aus dem Biegungsdreieck in Fig. 380 entnehmen, das in Rechnung zu ziehende Moment ist dann $\mu - \mu_0$, dieses wird mit $A b_1 h$ zu der idealen Momentenfläche Aiiih verbunden.

Der freie Kurbelarm ef wird durch die Kraft P_1 am Hebelarm $e_1 f$ bei f abgebrochen, durch das Moment P_1 an $s = e_1 d$ gedreht. Das letztere Verdrehungsmoment μ_2 konstruieren wir durch Abtragen von s im Winkel α, die Biegungsfläche dadurch, dass wir den Winkel α von e_1 aus an $e_1 f$ antragen, beide liefern die ideale Biegungsfläche $f i_2 i_2 e$.

Der Hauptkurbelarm hg ist wieder doppelt beansprucht, er wird vor- und rückwärts gebogen, und vor- und rückwärts verdreht. Durch die Kraft P_2 wird dieser Kurbelarm direkt vorwärts gebogen, das zugehörige Biegungsdreieck, bezw. hier Trapez, finden wir durch Abtragung des Winkels β an $h g_1$ im Punkt g_1, die grösste Momentenordinate ist $h h_1$. Die entgegengesetzt, rückwärts biegende Kraft ist wieder P_1 an zh. Wir errichten dz senkrecht auf hg und tragen in z den Winkel α an, und übertragen zd durch Kreisbogen nach zw, dann ist ww der theoretische Abschluss, die theoretische Biegungsmomentenordinate, die in Betracht kommende ist $h w_1$.

Die beiden Biegungsmomentendreiecke $h h_1 g_1$ und $h w_1 z$ werden voneinander abgezogen, die Differenz stellt das $\triangle g_1 h k$ dar, welches mit dem noch zu suchenden Torsionsrechteck kombiniert wird.

Die Konstruktion der Differenz $h g_1 k$ haben wir in Fig. 482 ausgeführt. Man trägt die beiden Dreiecke $h g_1 h_1$ und $h w_1 z$ aneinander, und verwandelt das eine, hier kleinere, $h z w_1$ in eines mit der Höhe $h g_1$, die Verwandlung geschieht in derselben Weise wie wir sie S. 301, Fig. 384, bei den Futtermauern kennen gelernt haben. Die verkürzte Basis wird dann nach $h_1 k$ getragen, indem jetzt das $\triangle h_1 k g_1$ gleichen Inhalt mit dem Dreieck $h z w_1$ hat. Das $\triangle h g_1 k$ haben wir in die Hauptfigur übertragen.

Das Differenzrechteck der Verdrehung ergiebt sich folgendermassen. Die direkte Vorwärtsverdrehung findet durch P_2 an s_1 statt; wir schlagen

s_1 durch Kreisbogen von g_1 aus in die Achse des Kurbelarmes, die Höhe vv ist dann die Ordinate des Vorwärtstorsionsrechteckes. Die Ordinate des entgegendrehenden Momentes ist $P_1 \cdot s_3$ ww. Konstruieren wir mit ww und vv zwei Rechtecke auf hg, so ist die Differenz mit der Höhe (Ordinate) μ_3 das in Rechnung zu ziehende Torsionsrechteck. Das letztere wird mit obigem Dreieck, bezw. Trapez zu der idealen Momentenfläche $h\,i_3\,i_3\,g$ verbunden.

Das grösste Moment des Kurbelarmes hg ist

$$M_i = \overline{h\,i_3} \cdot f = 260 \cdot 30 = 7800 \text{ kgcm},$$

wenn f Polabstand, das der Achse Ah ist

$$M_i = Bi \cdot f = 220 \cdot 30 = 6600 \text{ kgcm}.$$

X. Eine einfache Wellenkröpfung mit schiefen Armen stellt die Fig. 483 dar. Gegeben ist die Kraft P im Kurbelzapfen.

Die Torsion soll nur nach links durch die Lagerung A übertragen werden, in B findet eine solche ohne Torsionswiderstand statt. Hieraus ergiebt sich, dass die Welle auf der rechten Seite nur auf Biegung, links nach A und zwischen A und C auf Biegung und Torsion beansprucht ist.

Wir zeichnen zunächst wieder die Achsenlinie ABCDEF auf, indem wir vorläufig entsprechende Verhältnisse annehmen. Dann tragen wir die gegebene Kraft P = ab an a in Richtung derselben an und ziehen bA und bB. Man wählt nun, Fig. 484, einen Pol O und Polabstand f, zieht I und II parallel den Seilkräften und findet, da f parallel der Achse AB, die Grössen der Auflager A und B aus dem Kräfteplan. Der Stirnzapfen in B wird nach B berechnet, die Achse BF auf Biegung nach der unter BF liegenden Momentenfläche, hier Biegungsdreieck m. Für die Biegung allein ist auf der linken Seite das Biegungsdreieck n massgebend. Um das Torsionsrechteck für die Achse AC zu konstruieren, tragen wir wieder R in den Kräfteplan von O aus an und ziehen am Endpunkt hier durch Verlängerung der Seillinien I und II die Senkrechte μ. Das Torsionsrechteck und das Biegungsdreieck n verbinden wir zu der idealen Biegungsfläche AiiC.

Die Biegungsfläche des Kurbel-Halszapfens DE liegt unterhalb und bildet den mittleren Teil der gesamten Fläche AbB; die grösste Ordinate ist ab. Die Verdrehung erfolgt wieder indirekt durch die Gegenkraft B im Auflager B am Hebelarm R. Man trägt den Hebelarm R in der Achse an B an, der Winkel α ist dem entsprechenden im Kräfteplan, Fig. 484, gleich und verwendet die Ordinate μ_1. Das Torsionsrechteck schliesst dann mit gh ab; die ideale Biegungsfläche ist aus

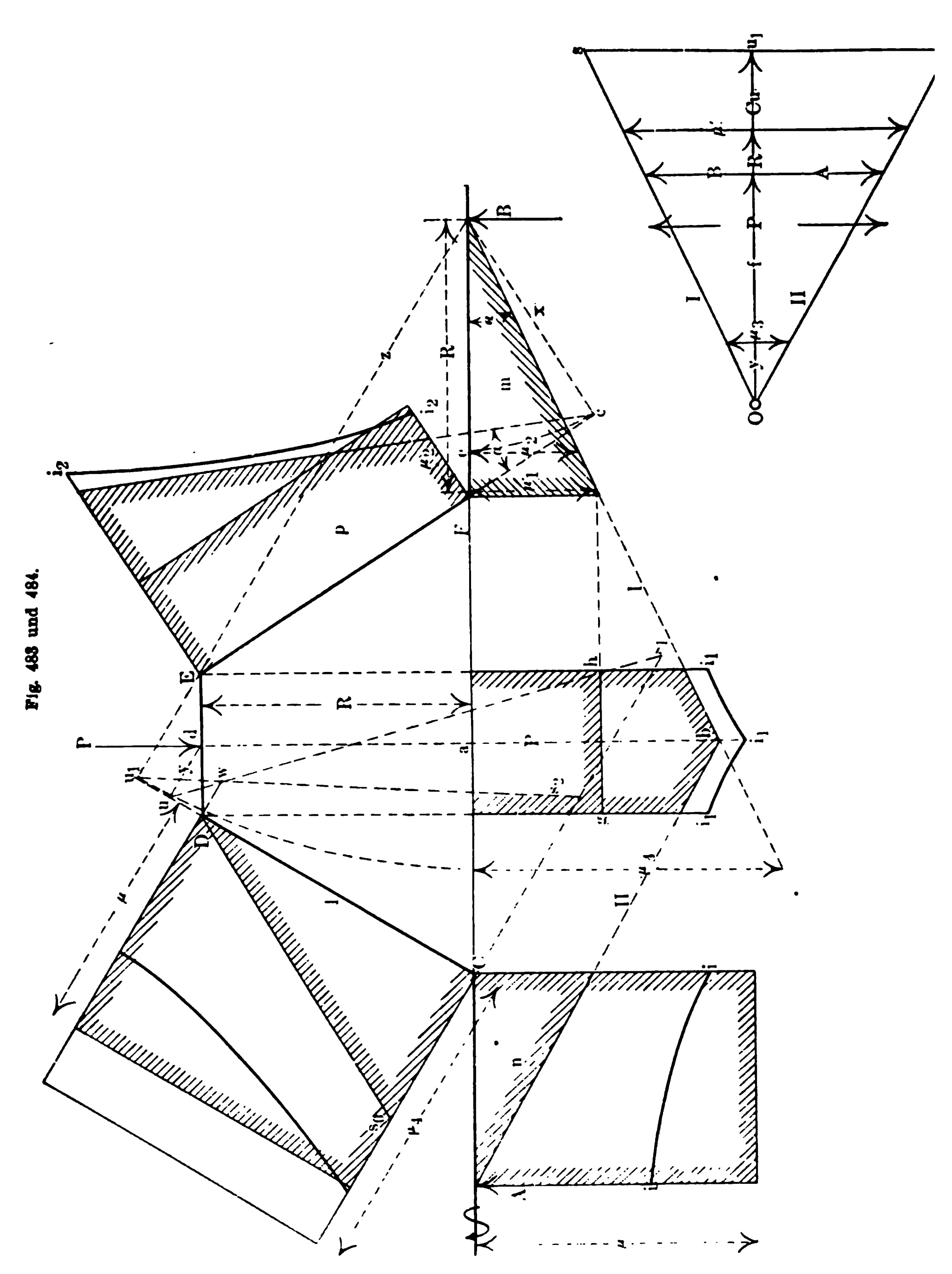


Fig. 483 und 484.

beiden zusammengesetzt: das Doppeltrapez $a\,i_1\,i_1\,i_1$. Die grösste Beanspruchung des rechten Kurbelarmes EF findet in E statt und zwar

durch die Gegenkraft in B am Hebelarm cE; man verlängert EF und zieht bis c die Senkrechte Bc. In c tragen wir wieder den Winkel α an und erhalten durch die Senkrechten in E und F das Biegungstrapez p. Das Verdrehungsmoment dieses Armes ist $\mu_2 = B \cdot x$, B am Hebelarm Bc, wir schlagen Bc nach Be und errichten die Senkrechte μ_2, die Torsionsordinate für EF. Dieses Torsionsrechteck mit dem obigen Trapez p verbunden im Sinne der Gl. 62, ergiebt die ideale Biegungsfläche $E i_2 i_2 F$.

Der linke Kurbelarm CD erfährt eine mehrfache Beanspruchung. Zunächst eine Vorwärtsbiegung durch die Kraft P in u, in der Verlängerung von CD, wobei du senkrecht auf Cu, also eine Biegung durch P am Hebelarm uC; eine Rückwärtsbiegung durch die Gegenkraft B am Hebelarm $u_1 C$ wirkend gedacht, wobei z senkrecht durch B auf Cu_1. Der gefährliche Querschnitt liegt jedenfalls in C.

Das Biegungsdreieck für die Vorwärtsbiegung ergiebt sich, indem man $Cu = Ou_1$ von O aus aufträgt und in u_1 die Senkrechte ss errichtet, Fig. 484, diese überträgt man nach Cs_1 und verbindet, um das Biegungsdreieck zu erhalten, u mit s_1. Die Biegungsfläche, bezw. das Biegungsdreieck für die Rückwärtsbiegung ist $u_1 C s_2$; man erhält dasselbe, wenn man eine Senkrechte auf CD in D bis w in die Linie us_1 einschneiden lässt. Beide Dreiecke werden voneinander abgezogen

$$\triangle\, uCs_1 - \triangle\, u_1 Cs_2;$$

als Differenzdreieck, welches also für die Biegung des Kurbelarmes CD massgebend ist, kann man hier näherungsweise das Dreieck $w s_1 s_2$ verwenden, es wurde in das rechtwinkelige CDs_0 verwandelt.

Die Vorwärtsverdrehung erfolgt durch P an y; man trägt sich y an O an und entnimmt als Momentenordinate μ_3. Die Ordinate des Torsionsmomentes für die Rückwärtsverdrehung durch B an z ergiebt sich, indem man den Radius $Bu_1 = z$ in die Achse schlägt und μ_4 errichtet, beide Ordinaten, bezw. beide Rechtecke voneinander abgezogen, liefern das massgebende Torsionsrechteck, dessen Ordinate in der Figur senkrecht auf CD in D auch mit μ bezeichnet ist.

Diese gekröpfte Welle wurde mit $P = 250$ kg Kurbelkraft am Halbmesser $R = 29$ cm bei $f = 24{,}5$ Polabstand für eine Maschine Nr. 5 $\mathscr{PS}$ bei $n = 50$ Umdrehungen konstruiert.

Das grösste ideale Moment im Zapfen DE ist

$$M_i = ai_1 \cdot f = 290 \cdot 24{,}5 \backsim 7100 \text{ kgcm}.$$

Wird die Kraft nach beiden Seiten der Welle verteilt, dann wird

die Konstruktion ähnlich der in Fig. 478 ausgeführt, dann ist die rechte Achse auch auf Biegung und Drehung beansprucht.

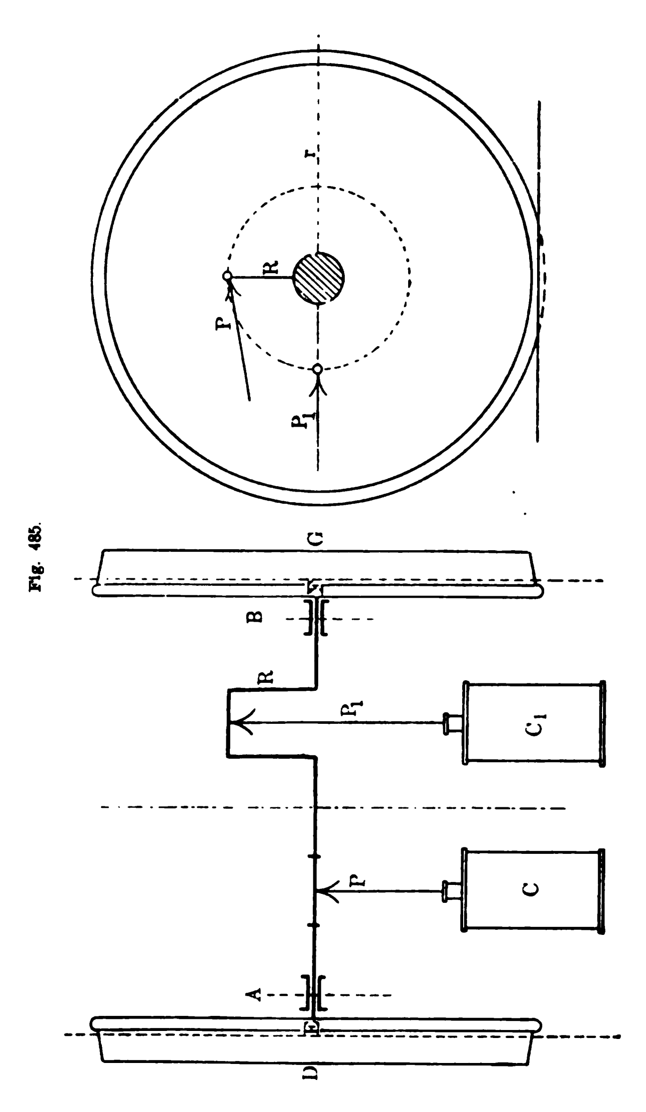


Fig. 485.

XI. Wenn auch die Berechnung einer mehrfach gekröpften Achse nach den im II. Band aufgestellten Formeln der kombinierten Festigkeit keine Schwierigkeiten bereitet, so ist der Gang der Rechnung aber umständlich und bietet verhältnismässig wenig Übersicht; in Bezug auf die

letztere ist aber die graphische Berechnung im Sinne der bereits behandelten Beispiele bei weitem vorzuziehen. Der Gang der Rechnung, bezw. hier die Darstellung der Momente, um sämtlichen Stellungen zu genügen, ist allerdings auch weitläufig, da man genötigt ist, mehrere Zeichnungen anzufertigen, diese gewähren aber eine viel bequemere Einsicht in die Verteilung der Kräfte und Momente, als durch das rechnerische Verfahren.

Als Beispiel*) haben wir eine Lokomotiventriebachse mit doppelter, unter 90° stehender Kröpfung für innen liegende Cylinder gewählt. Fig. 485 stellt schematisch den Grundriss und die Seitenansicht des Triebwerkes dar, die eine Kurbel liegt horizontal, sie ist von der Aussenkraft P_1 des Dampfes aus dem Cylinder C_1 horizontal beansprucht. Die Kraft P des andern Cylinders C wirkt unter dem Winkel α (s. Fig. 488). Das Ergebnis der Untersuchung für diese Stellung ist in den folgenden Figuren enthalten, weil sie die ungünstigste für die Biegungsmomente ist; in Bezug auf die Drehmomente kann dasselbe bis zu 1,4 PR anwachsen, wenn R der Kurbelhalbmesser ist, es findet dies bei einer Kurbelstellung unter 45° statt**).

Der Halbmesser des Triebrades sei r, der der Kurbel R. In A und B sind die Lagerungen der Achse. Auf dieselbe sind noch die Excenter aufgekeilt zur Bewegung der Verteilungsschieber, von der Einwirkung dieser minimalen Kräfte auf die Biegung der Krummachse wollen wir absehen. In Betracht kommen sonach nur P_1 und P als Betriebskräfte, ferner aber das Lokomotivgewicht Q, welches die Achse auch tragen

*) Nach Reuleaux.

**) Nehmen wir an, es stehen beide Kurbeln unter dem beliebigen Winkel φ. Die auf dieselben wirkenden Dampfkräfte P seien gleich gross und ihre Richtungen seien horizontal. K sei die Gegenkraft in der Achsenhöhe des Triebwerkes, am Halbmesser des Triebrades r wirkend. Im Augenblick der Fortbewegung tritt um u Gleichgewicht ein, wenn

$$K r = P [r + R \sin \varphi] + P [r + R \cos \varphi]$$

oder

$$K r = 2 P r + P R (\sin \varphi + \cos \varphi).$$

Dieses Moment erhält seinen grössten Wert (vgl. S. 98 Fig. 92) für $\varphi = 45°$; denn es ist

$$\frac{d [\sin \varphi + \cos \varphi]}{d \varphi} = o,$$

wenn $\cos \varphi - \sin \varphi = o$, oder wenn $\sin \varphi = \cos \varphi$ ist; $\varphi = 45°$ eingesetzt, erhält man

$$P R (\sin 45 + \cos 45) = 2 \cdot \tfrac{1}{2} \sqrt{2} \cdot P R = 1{,}414 \, P R.$$

muss; die Reaktionen sind die Adhäsionskräfte zwischen Triebräder und Schienen, die Lagerkräfte, die Gegenwirkungen in den Befestigungsstellen der Naben der Triebräder.

In der, Fig. 485, gezeichneten Stellung kommen zunächst die Kräfte und Momente in der Vertikalebene in Betracht; die resultierende Momentenfläche VV ist in Fig. 486 konstruiert. M sei die Schwerpunktshöhe, Q das dem Triebwerk entsprechende Gewicht der Lokomotive. Die sogenannten störenden Bewegungen*) der Lokomotive mögen eine im Schwerpunkt angreifende Horizontalkraft H erzeugen, welche zu etwa 0,4 Q angenommen werden kann.

Die Resultierende R aus Q und H durch M liefert die senkrechte Belastung der Achse in Grösse und Richtung. Verbinden wir M mit A und B, den Zapfenlagern, und ziehen durch m, dem Endpunkt von R, die Parallelen ma und mb, so sind P_2 und P_3 die in A und B wirkenden senkrechten Teilkräfte von R.

Verbinden wir ferner M mit den Berührungspunkten c und d der Schienenköpfe, so sind Q_c und Q_d die der Resultierenden R entsprechenden Gegen-Teilkräfte, diese wirken senkrecht auf die Achse in den Richtungen 1, 6, 5 und 4, und zwar in den Punkten D, E, F und G der Radnaben.

---

*) Durch die störenden Bewegungen der Lokomotive, welche diese beim Durchfahren durch das Schienengeleise erfährt, entstehen eine Reihe von Kräften, deren Grössen sich theoretisch mit Schwierigkeiten ermitteln lassen. Zu diesen Bewegungen gehören das Wanken, Wogen und Nicken, welche auch jedem Eisenbahnwagen eigen sind. Das Wanken ist ein Hin- und Hergondeln auf den Federn um eine Längsachse; das Wogen ein Auf- und Niederbewegen; das Nicken ein Vor- und Zurückneigen um eine durch den Schwerpunkt gehende Querachse. Sie sind von den Federn, den Schienenlängen, von den regel- oder unregelmässig aufeinanderfolgenden Schienenstössen, vom Radstand, von der Schwerpunktslage der Ladung u. a. abhängig. Ausserdem tritt in den Kurven eine schlängelnde Bewegung ein und wirkt hier auch die Schwungkraft mit, welche den Eisenbahnwagen nach dem höher gelegenen Schienenstrang drängt (vgl. S. 356, 368, Band I). Bei der Lokomotive besonders kommt noch das Zucken, Schlingern (Schlängern, Schlänkern), das Gaukeln in Betracht. Das Zucken ist eine Reaktionswirkung der hin und her sich bewegenden Kolben, durch welche der ganze Bau zwischen den Federn vor- und zurückgezogen wird. Das Schlingern ist ein Zucken um eine durch den Schwerpunkt gehende senkrechte Achse, gleichsam eine senkrechte oscillierende Drehbewegung, sie wird durch die sich (um 90° gestellten Kurbeln) entgegenwirkende Dampfkraft in den Kolbenbewegungen erzeugt und ist bei aussen liegenden Cylindern grösser als bei innen liegenden. Das Gaukeln kombiniert sich aus beiden, und wird um so grösser, je massiger die sich bewegenden Betriebselemente, Kolben, Schubstangen etc. sind.

Die Kräfte in A und B, 2 und 3 wirken senkrecht nach unten, ebenso 1 und 4 in D und G, die Kräfte 5 und 6 an den inneren Nabenwänden wirken biegend auf die Achse, und zwar nach oben; denkt man

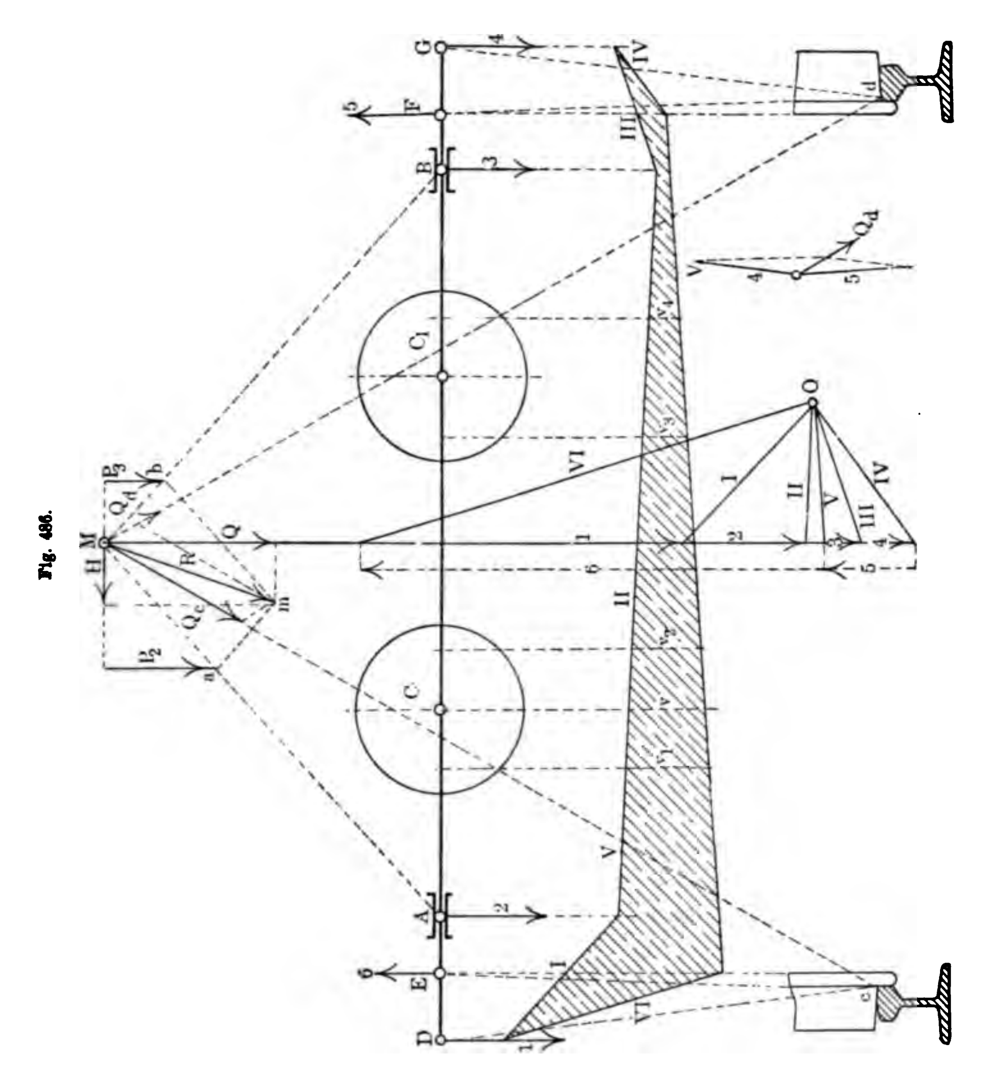


Fig. 486.

sich die Achse in den Punkten DABG nach unten festgehalten, so üben die Kräfte in E und F nach oben einen Druck aus. Man wählt nun einen den sämmtlichen Momentenflächen entsprechenden Polabstand f (hier nicht eingetragen), bezw. einen Polpunkt O. Die Kräfte 2 und 3

kann man unmittelbar aus der Figur entnehmen, P_2 und P_3, 3, 4, 5, 6 ergeben sich durch besondere Parallelogramme für Q_c und Q_d, von denen wir das für Q_d aufgezeichnet haben. (Wir bemerken hier, dass die für den Pol O in unserer Zeichnung verwendeten Grössen 5, 6, 1 und 4 wegen Mangel an Raum verkleinert wurden; sonach sind in der Zeichnung des Kräftepolygons die Längen 4 und 5 kleiner als sie dem besonders gezeichneten Parallelogramm nach sein müssten, da wir kein besonderes Zahlenbeispiel zu Grunde gelegt haben, hat dies für den weiteren Gang keinen Einfluss; die Kraft 4 in der unteren rechten Nebenfigur muss der durch G punktiert eingezeichneten Richtung G d parallel liegen.) Durch die Übertragung der Polstrahlen in die Kräfterichtungen ergiebt sich die konstruierte Momentenfläche V für die Vertikalkräfte.

Die Momentenfläche in der Horizontalebene H ist in Fig. 487 konstruiert. Die in der Horizontalebene wirkenden Kräfte finden wir aus der Nebenfigur 488. In dieser ist der Kurbelkreis, Radius R und ein Teil des Triebradkreises, Radius r, aufgezeichnet. Der Kurbelzapfendruck P ist etwas grösser als der Kolbendruck P_1, er wirkt unter dem Winkel α. Das Moment des Kurbelzapfendruckes nehmen wir $P_1 R$ an. Wir wollen ferner annehmen, dass das rechte Rad einen Widerstand am Schienenstoss findet, wir haben ihn mit 3 in Fig. 487 bezeichnet, derselbe lässt sich aus dem Moment $(3) \cdot r = P_1 R$ berechnen, bezw. dadurch konstruieren, dass man die Kraft P_1 (mit 4 in Fig. 487 bezeichnet) in t aufträgt, x mit w verbindet und in u eine Senkrechte uz, der Kraft 3 entsprechend, errichtet. Die Kraftrichtung 4 liegt in C_1, die der Kraft 3 zwischen F und G im Schienenkopf. Man trägt 3 und 4 am besten in A an und konstruiert für den gleichen obigen Polabstand f das Seilpolygon O I II so, dass die gleich näher zu betrachtende Seillinie III parallel der Achse AB liegt. Um das Seilpolygon zu konstruieren, ist es nötig die in C_1 und zwischen F und G angreifenden Kräfte 4 und 3 auf die Auflager A und B zu reduzieren. Man sucht zunächst die Mittelkraft von 3 und 4, indem man die Seilpolygonlinien O und II bis zum Schnitt q verlängert, $3 + 4 = ik$ aufträgt, und k mit A und B verbindet, eine Parallele il zu Bk und die Senkrechte ln auf ik, bezw. die Parallele ln zu AB schneidet in n die Kräfte 1 und 2, den Auflagern A und B entsprechend, ab. 1 wirkt in A und 2 in B. Die Momentenfläche H der Horizontalkräfte ist voll schraffiert.

Dieselbe Fig. 487 kann man nun auch verwenden, um die Momentenfläche in der schiefen, unter α geneigten Ebene der

Schubstange zu konstruieren. Die in dieser Ebene wirkende Kraft P greift in C an; wir tragen sie in A nach oben auf und konstruieren mit dem Polpunkt O_1 das Seilpolygon 1, 2, so dass die Schlusslinie wieder

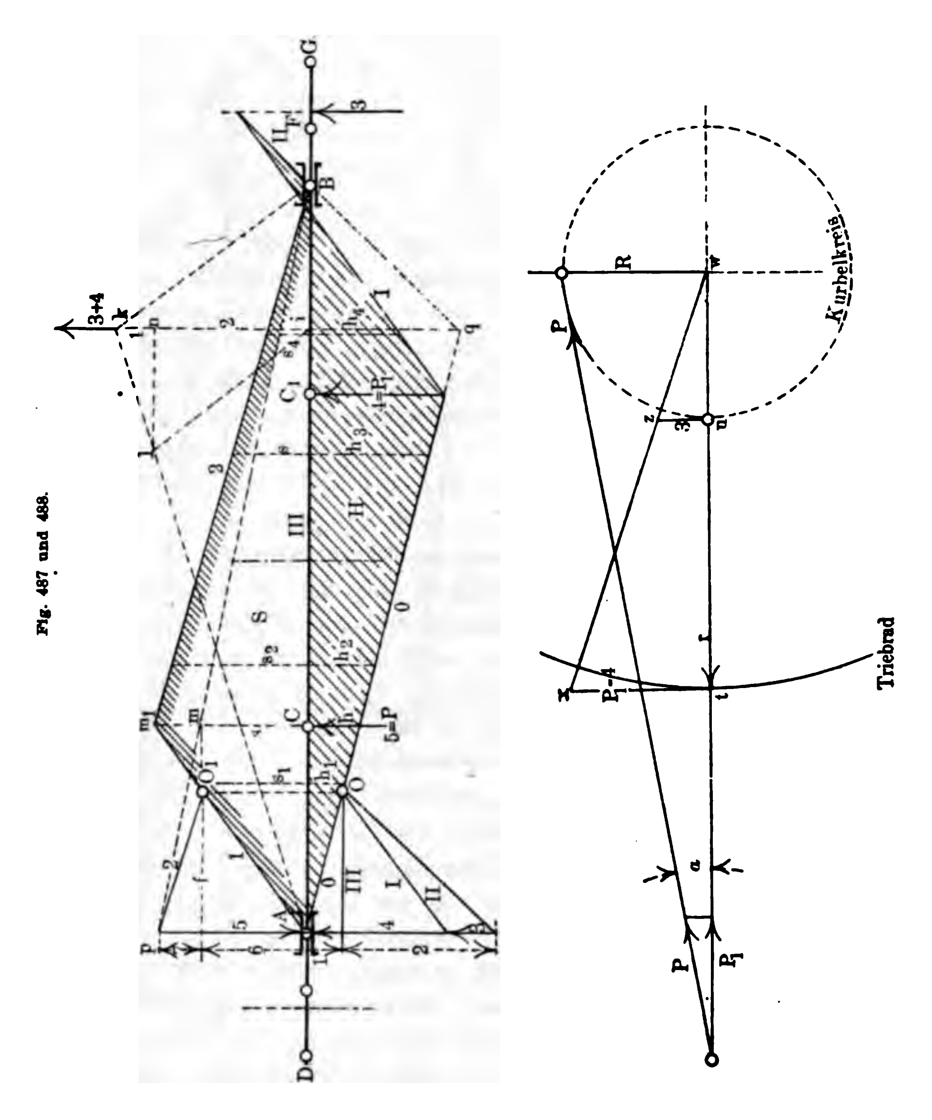


Fig. 487 und 488.

durch AB geht, dazu müssen wir wieder P = 5 in die beiden Kräfte 6 und 7, in A und B angreifend, zerlegen. Es geschieht diese Zerlegung dadurch, dass man p mit B verbindet und durch O_1 die Parallele f zu

AB bis zum Schnitt in m zieht, f schneidet dann auf 5 die Kräfte 6 und 7 ab. Das zugehörige Seilpolygon ABm_1 ist geränderт schraffiert.

Die drei erhaltenen Momentenflächen S_1 H und V werden nun ferner

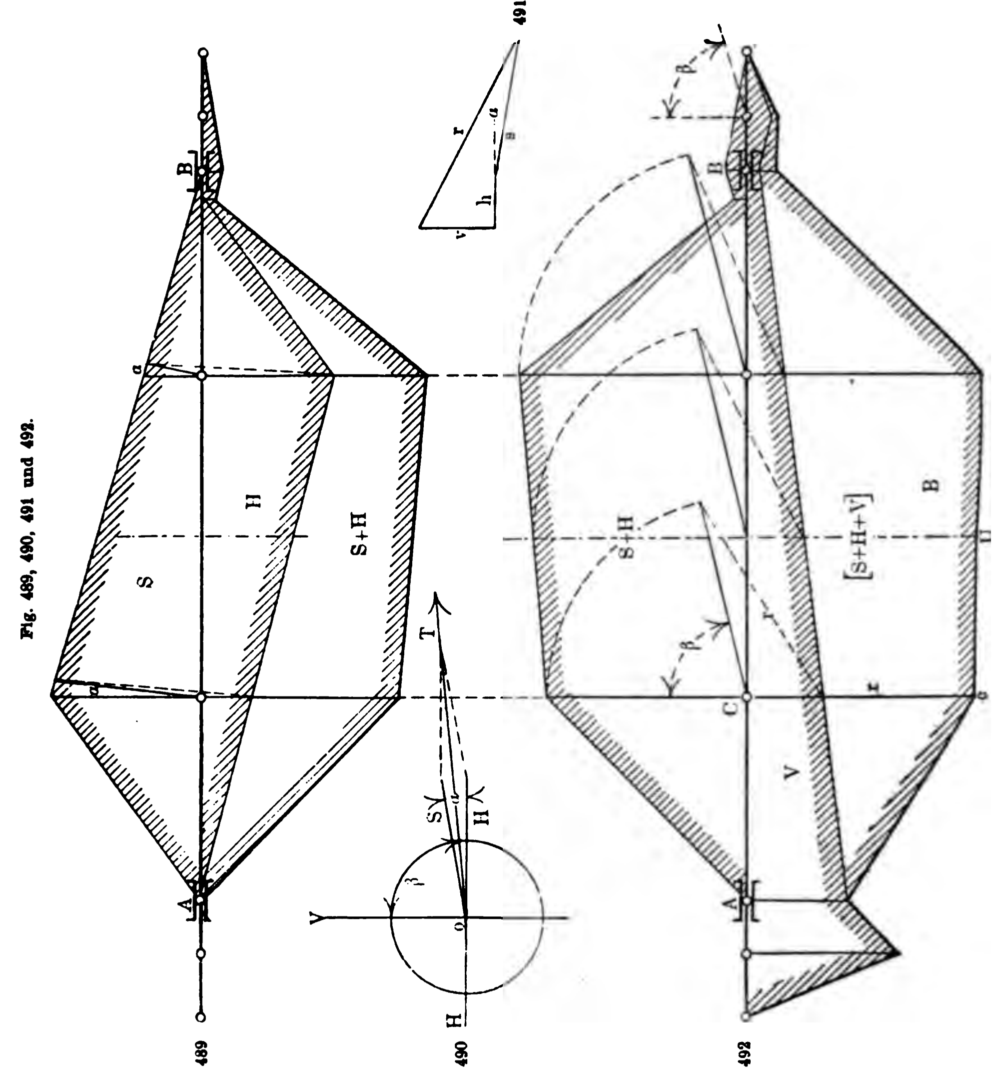


Fig. 489, 490, 491 und 492.

zu einer Biegungsmomentenfläche vereinigt. Diese Kombination der drei Flächen im Sinne der Richtungen ihrer Kräfte haben wir nach der in Fig. 401, Beispiel XI, durchgeführten Konstruktion vorgenommen, und in vorstehenden Figuren ausgeführt.

Man vereinigt zunächst die Momente in der Ebene H und S, linke Hilfsfigur 490, unter $< \alpha$ und erhält eine Ebene oT, welche mit der Vertikalfläche V den Winkel β bildet. Wir tragen dann die beiden Flächen S und H in Fig. 489 auf und kombinieren sie unter $< \alpha$ wie in Fig. 401 zu der Fläche, welche mit $S + H$ bezeichnet ist. Diese übertragen wir in die Fig. 492, zeichnen in dieselbe gleichzeitig die Fläche V aus Fig. 486 ein und kombinieren beide unter $\angle \beta$ zu der endgiltigen in Rechnung zu führenden Biegungsfläche B.

Man kann aber auch die Resultierenden der Momentenordinaten für jede Abscisse der Achse nach dem Kräftepolygon finden. Wir haben in der rechten Hilfsfigur 491 das resultierende Moment für die Abscisse des Angriffspunktes C gesucht. Aus den Fig. 486 und 487 entnimmt man die betreffenden Ordinaten, v senkrecht, rechtwinkelig hierzu h und unter $< \alpha$ anschliessend $s = Cm$, diese liefern zu einem Polygon vereinigt die resultierende Biegungsmomentenordinate $r = Cc$, Fig. 491. Verfährt man für die hauptsächlichsten Abscissen in gleicher Weise, so erhält man dieselbe Biegungsfläche AUB, Fig. 492.

Diese genügt aber zur Berechnung der Achse DG, Fig. 486, etc. noch nicht, sondern die Biegungsmomentenfläche B muss noch nach den Gleichungen 62 mit den Drehmomentenflächen zusammengesetzt werden; es ist dies in Fig. 493 geschehen. In diese Figur haben wir zunächst wieder unterhalb der Achse DABG die Momentenfläche B aus Fig. 492 übertragen, oberhalb sind die Torsionsrechtecke t_1 t_2 t_3 eingezeichnet und diese sind mit B zu der endgiltigen idealen Biegungsfläche DUG vereinigt. Die Ordinaten derselben multipliziert mit dem Polabstand f ergeben die Momente zur Berechnung der Achse DG; auf die Kurbelarme und die Halszapfen kommen wir gleich zurück.

Bei der in Fig. 485 angenommenen Stellung liefert nur die Dampfkraft in C ein Drehmoment von der Grösse PR. In der Stellung der Kurbel um 45° kann das Drehmoment in der Achse bis zu 1,414 PR anwachsen. Da die Drehmomente in den Radnaben DE und FG ihren Widerstand finden, so nehmen wir, um beiden Stellungen zu genügen, das Drehmoment PR für den mittleren Teil CC_1 der Achse, 1,4 PR für die äusseren Achsenteile CD und C_1G an. Wir tragen in einer besonderen Figur, welche wir in Fig. 493 mit eingezeichnet haben, für den gewählten Polabstand f die Kraft P auf, und konstruieren für R das Drehmoment $PR = \mu$. Die drei Torsionsrechtecke t_1 t_2 t_3, t_1 und t_3 für 1,4 μ aufgezeichnet mit der jeweiligen Momentenfläche B verbunden,

liefern dann die in Rechnung zu ziehende ideale Biegungsfläche DUG.

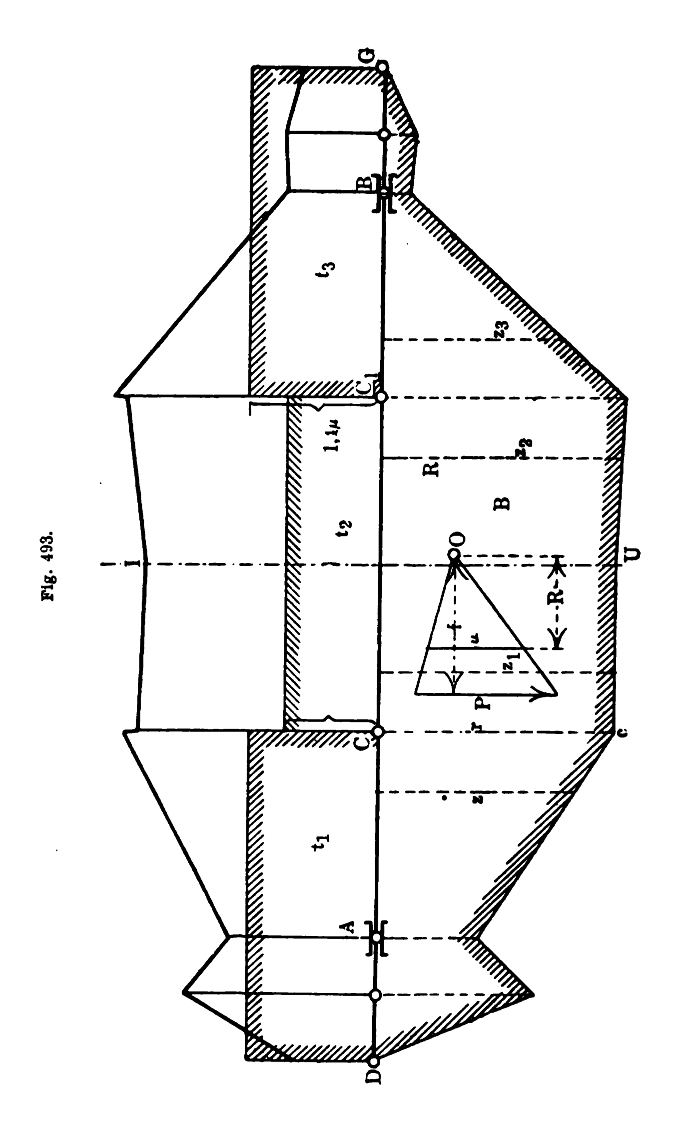


Fig. 493.

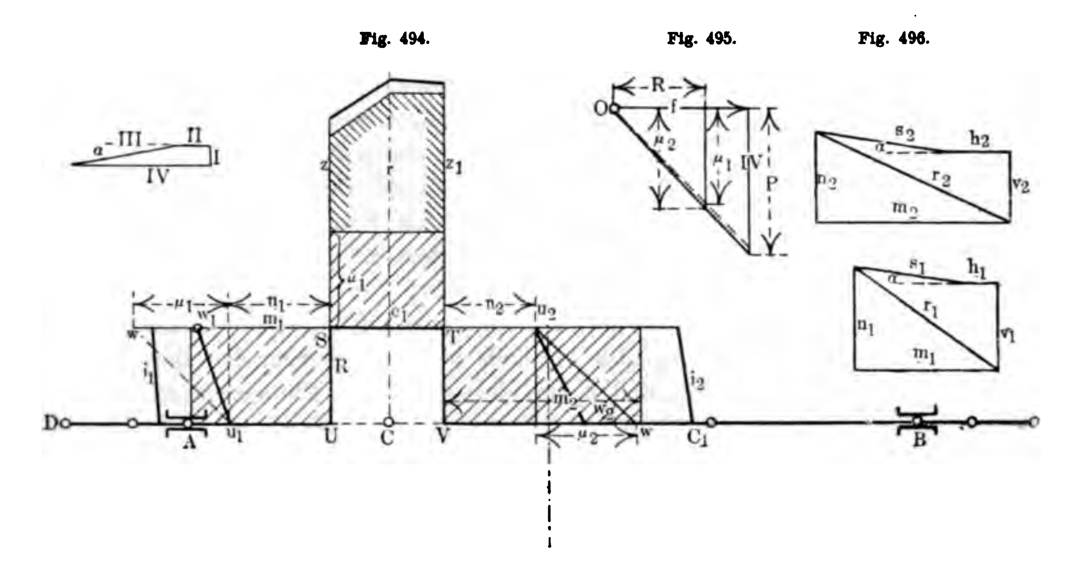
In den folgenden Figuren haben wir die idealen Biegungsmomente der Kurbelarme und des Halszapfens auf der linken Seite für den Cylinder C graphostatisch entwickelt.

Man trägt zunächst wieder die Achse ABC ... auf und berück-

sichtigt besonders die Kurbelkröpfung R und die Zapfenlänge S T. Der Zapfen S T ist zunächst auf Biegung beansprucht, die betreffenden Momentenordinaten $z r z_1$ werden aus der Biegungsmomentenfläch, Fig. 493 bezw. 492, an S T abgetragen. Die Momentenfläche ist gerändert schraffiert.

Die links von U wirkenden Kräfte, bezw. deren Resultante suchen in D U angreifend, den Zapfenhals S T zu verdrehen. Wir suchen deren Resultante und das derselben entsprechende Moment μ_1 auf den Pol-

Fig. 494. Fig. 495. Fig. 496.



abstand f und dem Kurbelhalbmesser R bezogen. Die Vertikalkräfte aus Fig. 487 sind 1, 2 und 6, ihre Resultante ist $I = (6) - [(1) + (2)]$, wir nehmen sie aus dem Kräftepolygon jener Figur und tragen sie am besten in einer besonderen Figur (Hilfsfigur links neben Fig. 494) auf. Links von C ist nur eine Horizontalkraft in A, Fig. 487, vorhanden; ihre Grösse II tragen wir an I, sie wirkt rückwärts gerichtet. Ferner ist auch nur eine Kraft 6 unter $\angle \alpha$ nach rückwärts gerichtet, vorhanden, wir haben sie als III übertragen. Die Schlusslinie IV bildet, wie schon angedeutet, mit R für den Polabstand f und dem Polwinkel der Kraft P entsprechend, das Drehmoment μ_1, Fig. 495; das zugehörige Torsionsrechteck ist in der Hauptfigur voll schraffiert, mit der Biegungsfläche zusammengesetzt resultiert die ideale Momentenfläche mit c_1 i bezeichnet.

Die ideale Momentenfläche des Kurbelarmes US setzt sich

wieder aus dem Biegungs- und Drehmoment zusammen. Zunächst konstruieren wir für die beiden Kurbelarme die Resultante der wirkenden Momente aus den Momentenordinaten. Die letzteren $v_1 h_1 s_1$ und $v_2 h_2 s_2$ entnehmen wir aus den Fig. 486 und 487; sie sind in den rechten Figuren 496 aufgezeichnet und es sind die Resultierenden mit r_1 und r_2 bezeichnet. Jede dieser zerlegen wir in eine vertikale $n_1 n_1$ und in eine horizontale Komponente $m_1 m_2$. Die untere der Fig. 496 entspricht dem Arm US. Die Horizontalkomponente m_1 des resultierenden Momentes r_1 verdreht den Arm US, wir tragen m_1 an S an, Fig. 494, und erhalten das voll schraffierte Torsionsrechteck. Die Vertikalkomponente n_1 erzeugt eine Biegung des Armes US in der Ebene der Zeichnung, ausserdem biegt die Kraft IV, in U angreifend, den Arm senkrecht zur Bildfläche. Wir tragen somit n_1 in S an und gewinnen durch Projektion den Punkt u_1, ferner an n_1 die Länge μ_1 aus Fig. 495, die Diagonale aus n_1 und $n_1 + \mu_1$, $u_1 w$ tragen wir nach $S w_1$; dann ist $S w_1 u_1 U$ die Biegungsfläche, welche mit dem obigen Torsionsrechteck zu der Idealfläche $U S i_1$ verbunden wird.

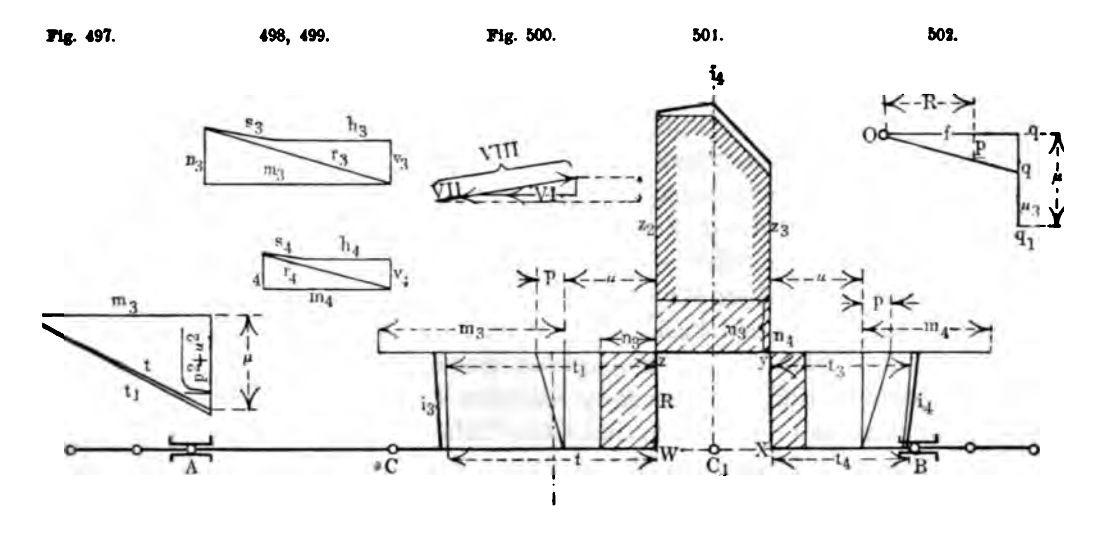
Die Verdrehungsfläche des Kurbelarmes VT liefert uns wieder die Horizontalkomponente m_2. Die Vertikalkomponente erzeugt eine Biegung in der Zeichenebene, m_2 und n_2 aus der oberen Fig. 496 werden an VT angetragen; ferner biegt die in ST angreifende Kraft P senkrecht zur Zeichenfläche, ihr zugehöriges Moment μ_2 entnehmen wir aus Fig. 495, in welcher es auf den Polabstand f reduziert wurde, und tragen es an n_2 in der Achse VC_1 an. Wir ziehen ferner die Diagonale $u_2 w$ und tragen sie nach $V w_2$, dann ist $T V w_2 u_2$ die Biegungsfläche, welche mit der voll schraffierten Torsionsfläche zu $V T o_2$, der in Rechnung zu ziehenden Idealfläche vereinigt wird.

Die letzten Fig. 497 bis 502 dienen zur graphischen Darstellung der idealen Biegungsmomentenflächen der rechten Kurbel WXyz. Wir tragen die Achsenlinie der Kurbel in derselben Weise wie in der vorigen Figur auf. Die Biegungsordinaten $z_2 z_3$ der Hilfsfigur 501 für den Halszapfen yz entnehmen wir aus der Biegungsfläche B, Fig. 493. Die nach der rechten Seite des Cylinders C_1 liegenden Kräfte wirken verdrehend, weil bei der Bewegung das rechte Triebrad (wie auch auf der linken Seite) an den Schienen einen Widerstand findet. Als resultierende Vertikalkraft wirkt hier aus Fig. 486 die in Fig. 500 mit V bezeichnete Kraft [(5) — (3) + (4)] (die Zahl V rechts neben VI in der kleinen Vertikalen ist zu ergänzen); im horizontalen Sinne rückwärts wirkt die Kraft VI = (2) — (3) aus dem Kräftepolygon Fig. 487; im gleichen Sinne

rückwärts schief unter $< \alpha$ wirkt die Kraft (7) mit VII in Fig. 500 bezeichnet aus Fig. 487 dem Kräftepolygon zu der Fläche S. Die Schlusslinie dieses Polygones ist VIII, ihre Vertikalkomponente p der verdrehend wirkenden Kräfte rechts von C_1 greift in X an (der Buchstabe p in Fig. 500 ist zwischen den Pfeilen zu ergänzen).

Es kann hier nur die Vertikalkomponente in Betracht gezogen werden, weil die Stellung der Kurbel bei C_1, wie aus Fig. 485 ersichtlich, eine horizontale ist. Das der Kraft p entsprechende Moment finden wir aus Fig. 502, es ist qq.

Fig. 497. 498, 499. Fig. 500. 501. 502.



Ausser diesen wirkt aber noch das mittlere Moment entgegengesetzt verdrehend, μ Fig. 493; die Differenz beider $qq_1 = \mu_3$ tragen wir in der Hauptfigur an yz an, Fig. 501. Beide Momentenflächen vereinigt, erhält man die ideale Biegungsfläche yzi_4 für den Zapfen yz.

Der Kurbelarm Wz ist auf Verdrehung beansprucht durch die Vertikalkomponente n_3. Man erhält diese, ebenso wie die noch benötigten m_3, m_4, n_4 aus den Fig. 498 und 499, die in derselben Weise wie die der linken Kurbel aus den Fig. 486 und 487 konstruiert werden. Auf Biegung ist Wz im vertikalen Sinne beansprucht durch das Moment μ, Fig. 502, welches wir in z antragen, ferner in derselben Weise durch die Vertikalkomponente p. An μ schliesst sich noch die Horizontalkomponente m_3 aus Fig. 498 an. Die Zusammensetzung dieser Biegungsmomente findet sich durch eine besondere Fig. 497. Man bildet die Diagonale von p und μ bezw. $\sqrt{p^2 + \mu^2}$, trägt rechtwinkelig an

diese m_3, dann ist die Hypothenuse t_1 der an Z anzutragende Momentenwert. Die Hypothenuse t aus μ und m_3 bildet den an W anzutragenden Momentenwert. Diese Biegungsmomentenfläche, deren Ordinaten t t_1 mit der Verdrehungsmomentenfläche deren Ordinate n_3 vereinigt, liefert die ideale Biegungsmomentenfläche WZi_3.

Die Torsionsmomentenfläche des Kurbelarmes Xy findet sich durch Auftragung der Vertikalkomponente n_4. Die Biegungsmomentenordinaten sind wieder μ, p und m_4, welche analog aufgetragen werden wie beim Arm Wz; die Zusammensetzungen erfolgen in einer besonderen, hier nicht gezeichneten Figur, wie Fig. 497, man erhält die Linien t_3 und t_4, die die Biegungsfläche bilden. Die letztere wird mit der Torsionsfläche, deren Ordinate n_4 ist, zu Xyi_4 vereinigt.

Man kann nun endlich die sämtlichen idealen Biegungsflächen in eine Hauptfigur übertragen, um eine Gesamtübersicht, namentlich um die Maximalordinaten zu erhalten, welche mit dem Polabstand f multipliziert die Zahlenwerte der in Rechnung zu führenden Momente liefern.

Man erkennt aber wohl leicht, dass auch die einzelnen Figuren, natürlich in gleichem Massstab ausgeführt, eine genügende Übersicht gewähren. In unseren Figuren waren wir an die Fläche des Buchformats gebunden, offenbar ist ein möglichst grosser Massstab, wie bei allen graphischen Kurbelberechnungen, besonders hier zu empfehlen; eine gute Übersicht wird auch durch besondere farbige Flächen erzielt, die für Biegung und Drehung natürlich konsequent durchzuführen ist.

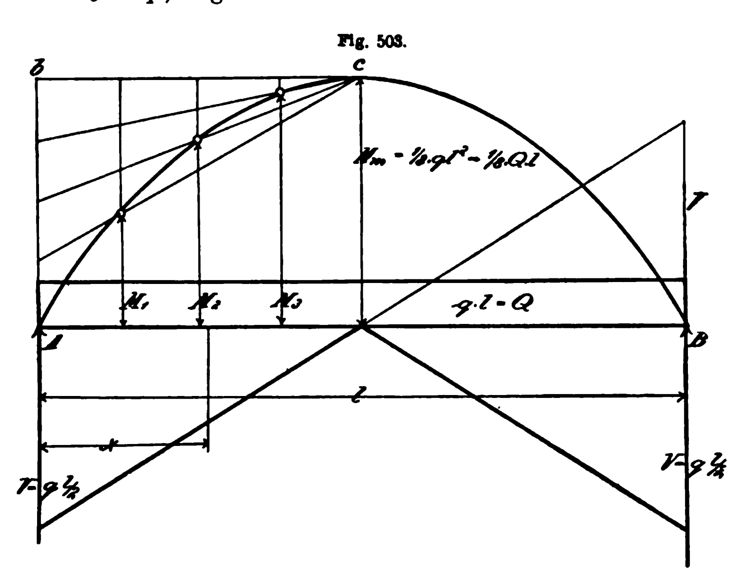
D. Verwertung der Schub-, Vertikal- oder Querkräfte.

1. Darstellung der Momente durch die Schubkräfte.

In den bisherigen Betrachtungen zur graphischen Bestimmung der Momente verwandten wir als Vertikal-, Schub- oder Querkräfte (Transversalkräfte) nur die Auflagerreaktionen. Wie uns aus dem I. Band bereits bekannt (S. 110), sind die Auflager die Maximalwerte der Vertikalkräfte; diese werden am kleinsten da, wo die Momente am grössten sind. In den graphischen Darstellungen des I. Bandes haben wir nun diese Vertikal- oder Schubkräfte einesteils durch einfache Linien angedeutet, andernteils durch in den Kräfteangriffspunkten abgesetzte Linien. Die Darstellung durch einfache gerade Linien ist in einem gewissen Sinne nur richtig für eine gleichmässig verteilte Last; wir erinnern

an die bereits mehrfach verwendeten Belastungskurven, Belastungslinien im I. Band. Die Gleichung der Momente ist für eine gleichmässig verteilte Last $Q = ql$, Fig. 503

Fig. 503.



$$M = Ax - q\frac{x^2}{2},$$

sie bedeutet eine Parabel; die Gleichung der Quer- oder Schubkräfte in der Entfernung x vom Auflager ist hingegen $V = A - qx$, eine gerade Linie.

Die Maximal- und Minimalwerte sind

$$A = \frac{ql}{2} = \frac{Q}{2}$$

eingesetzt, für $x = o$ und $x = l$

$$M_{min} = o \text{ und } V_{max} = \frac{ql}{2} = \frac{Q}{2} = A; \text{ für } x = \frac{l}{2},$$

$$M_{max} = \tfrac{1}{8} ql^2 = \tfrac{1}{8} Ql, \quad V_{min} = o;$$

sie sind in die Figur eingetragen und uns bereits bekannt.

Ist der Balken durch Einzellasten belastet (vergl. S. 114 I. Band, S. 336 III. Band), dann stellen die Momente Gleichungen gerader Linien dar. In der Entfernung x von A ist nach folgender Fig. 504

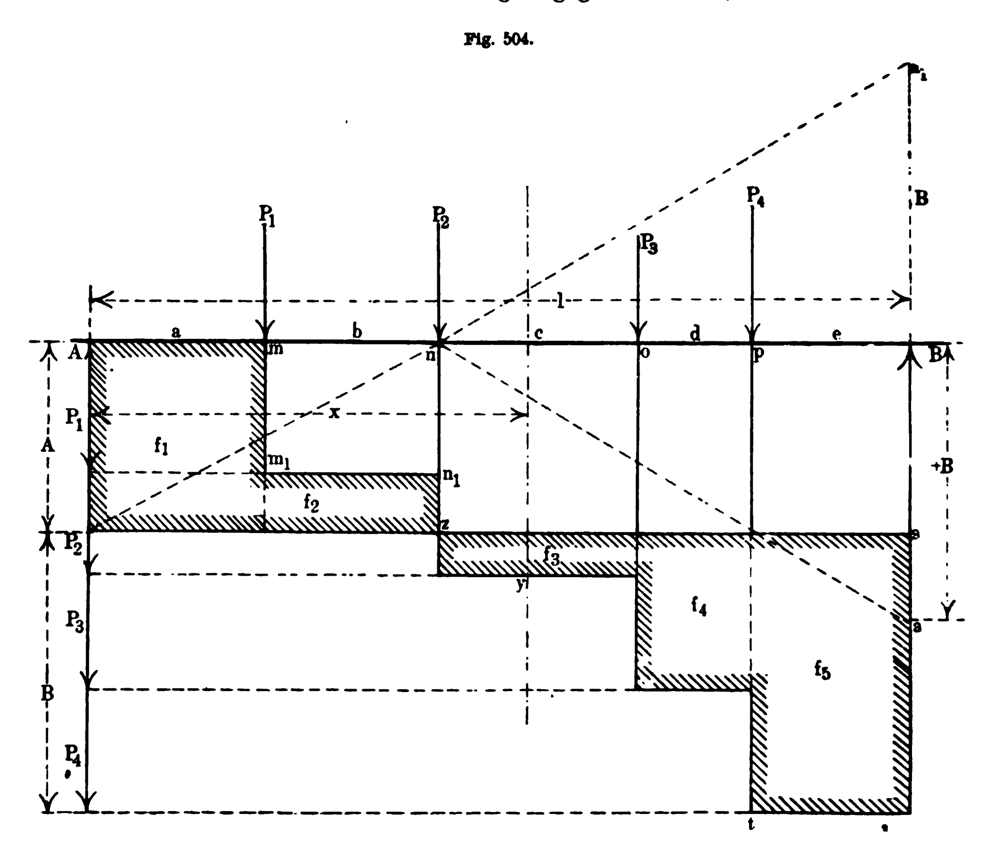
$$M = Ax - P_1 (x - a) - P_2 [x - (a + b)].$$

Die Schubkräfte lassen sich für jeden Angriffspunkt der gegebenen Kräfte berechnen durch die Formeln:

$$V_A = A,\ V_m = A - P_1,\ V_n = A - (P_1 + P_2),\ V_0 = A - (P_1 + P_2 + P_3),$$
$$V_p = B - P_4,\ V_B = B;$$

sie nehmen also staffelförmig von Angriffspunkt zu Angriffspunkt ab, wie wir schon mehrfach durch Zeichnung angegeben haben; denn innerhalb

Fig. 504.



A und m ist keine Schubkraft weiter vorhanden als A, diese sucht den Balken abzuschieben, abzuscheren, innerhalb An sind nur A und P_1 vorhanden, A wirkt nach oben, P_1 nach unten, in n wirken P_1 und P_2 A entgegen, daher $V_n = A - (P_1 + P_2)$, in m kann nur $V = A - P_1$ sein. Von der andern Seite wirkt in p die Schubkraft $B - P_4$ und zwar konstant innerhalb oB u. s. w. Da, wo die äusseren Kräfte grösser als die Auflager sind, werden V negativ. An der Übergangsstelle, hier in z, ist $V = o$, dort ist das Moment, wie uns bekannt, am grössten; tragen wir A und B als grösste Werte von V auf und verbinden die Endpunkte, z. B. a bei B mit n, so deuten uns im allgemeinen, ohne

Rücksicht auf die Staffelung, wie bei der gleichmässig verteilten Belastung, diese sich in n kreuzenden Linien die Schubkräfte an, der negative Teil derselben würde der Linie $n a_1$ entsprechen. Wir wollen nun in den nächsten Untersuchungen näher auf die Darstellung dieser Schub- oder Querkräfte eingehen und untersuchen, in welchem Zusammenhang sie mit den Momenten stehen.

Das Moment in m, Fig. 504, ist $M_m = A a$. Dieses Produkt haben wir in Wirklichkeit schon graphisch dargestellt, und zwar durch die Fläche $f_1 = A a$. Betrachten wir das Moment in n,

$$M_n = A\ (a + b) - P_1 b;$$

auch dieser Ausdruck ist bereits graphisch dargestellt, $P_1 b$ ist die Fläche $m n m_1 n_1$, die Fläche $A (a + b)$ wird rechts begrenzt durch die Linie $n z$, beide voneinander abgezogen, bleibt die Fläche $M_n = f_1 + f_2$.

Das Moment in p ist $M_p = B e$, die Fläche $s t = f_5$ liefert dieses Produkt unmittelbar, so dass $M_p = f_5$.

Das Moment in o ist $M_o = B (d + e) - P_4 d$, dasselbe wird durch die Summe der Flächen $f_4 + f_5$ dargestellt, $M_o = f_4 + f_5$.

Das Moment in n, vom Auflager B aus gerechnet, ist

$$M_n = B (c + d + e) - P_4 (c + d) - P_3 c;$$

graphisch ist dieses dargestellt durch die Flächensumme

$$M_n = f_3 + f_4 + f_5.$$

Hiernach entwickelt sich für uns noch eine Methode: der graphischen Darstellung der Momente durch die Flächen der Schubkräfte.

Schneiden wir den Träger in der Entfernung x von A durch, dann ist das Moment an dieser Stelle

$$M_x = A x - P_1 (x - a) - P_2 [x - (a + b)], \text{ bezw. } \quad (65)$$

$$M_x = B (l - x) - P_4 [l - (x + e)] - P_3 [l - x - (d + e)] \quad (65a)$$

Für $x = a + b$ wird

$$M_n = A (a + b) - P_1 b \quad (66)$$

$$\text{bezw. } M_n = B (c + d + e) - P_4 (c + d) - P_3 c \quad (66a)$$

Mit Bezug auf die Darstellung der Flächen durch die Schubkräfte ist

$$M_n = f_1 + f_2 = f_3 + f_4 + f_5 \quad (67)$$

Betrachtet man die Flächen des Ausdruckes Gl. 65, so übersieht man, dass diese um die Fläche zy kleiner sind als die der Gl. 66

$$M_n = A (a + b) - P_1 b.$$

Würde man x zwischen o und p verlegen, so würde die Fläche noch kleiner werden, weil noch mehr durch die unteren Flächen f_3 und f_4 in Abzug kommt, hieraus ist offenbar zu ersehen, dass für unseren Fall, in

welchem A zwischen P_1 und P_2 fällt, die Momentenflächensummen den grössten Wert erreichen müssen, da das grösste Moment im Angriffspunkt der Kraft P_2 liegt, hier muss auch $V = o$ werden, weil bei z der Übergang ist, da die Flächensummen $f_1 + f_2$ und $f_3 + f_4 + f_5$ beiderseitig weder grösser noch kleiner werden dürfen, bezw. können.

Beispiele. I. Die in den obigen Fig. 363, 396, 397, 400 konstruierten Schubkräfte können wir zunächst unmittelbar verwerten. Das Moment in p, Fig. 363, liefert die unterhalb e liegende Schubfläche zu $Be = 16,6 \cdot 0,65 = 10,8$ qm, bezw. $M_p = 10,8 \cdot 100 = 1080$ kgm. In Fig. 396 ist die mit F bezeichnete Fläche 17,8 qm, daher

$$M_{max} = 17,8 \cdot 100 = 1780 \text{ kgm}.$$

In Fig. 397 ist das Moment in der Kraftstelle für $V = o$ aus der Schubfläche $F = 55$ qm, $M_{max} = 55 \cdot 1000 = 55000$ kg; nach S. 362 ist $M_{max} = 55500$ kgm.

Die Momentenfläche für das Moment in B ist $F_2 = 10,4$ qm, daher das Moment $M = 10,4 \cdot 1000 = 10400$ kgm. Das Moment im Angriffspunkt der Kraft 2 lässt sich auch aus der Differenz der Schubflächen $F = F_1 - F_2$ darstellen, man findet $F_1 - F_2 = 65,6 - 10,4 = 55,2$ qm, also etwas mehr wie oben, daher $M_{max} = 55200$ kgm; die Differenz liegt in der Zeichnung.

In Fig. 400 S. 364 gelangt man durch Messung der Flächeninhalte der Schubflächen auch nahezu zu denselben Resultaten wie in Beispiel VIII S. 366. Die mit F bezeichnete Fläche für das Moment in B ist

$$0,25 \cdot 0,5 = 0,125, \text{ bezw. } M = 0,125 \cdot 1000 = 125,$$

da aber die Kräfte in halbem Massstabe aufgetragen sind, ist das Moment in B, $M_3 = 2 \cdot 125 = 250$ kgm.

II. Aus dem angeschlossenen Massstab in Fig. 505 sind die Belastungen des dort gezeichneten Balkens zu entnehmen, sowie auch die Belastungsentfernungen. Man konstruiert ein beliebiges Seilpolygon, welches man zur Bestimmung der Auflager $A = 138$ und $B = 238$ kg verwendet. Die Entfernungen sind meter, die Belastungen kg, sonach die Momente kgm.

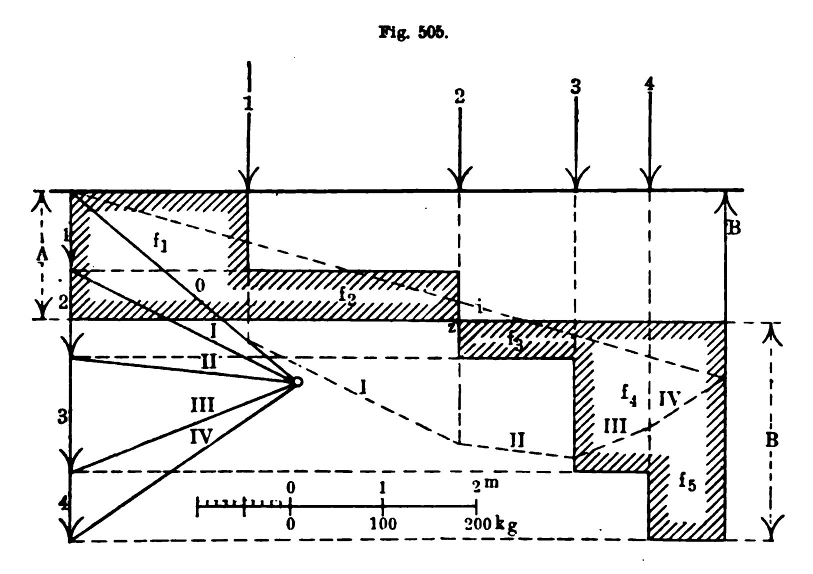
Aus den Schubkräftenflächen erhält man

$$f_1 = 1,90 \cdot 1,38 = 2,63 \text{ qm bezw. } 263 \text{ kgm}$$
$$f_2 = 2,28 \cdot 0,51 = 1,17 \text{ „ „ } 117 \text{ „}$$
$$f_3 = 1,23 \cdot 0,42 = 0,52 \text{ „ „ } 52 \text{ „}$$
$$f_4 = 0,81 \cdot 1,67 = 1,35 \text{ „ „ } 130 \text{ „}$$
$$f_5 = 0,83 \cdot 2,38 = 1,98 \text{ „ „ } 198 \text{ „}$$

Das grösste Moment bei z ist

$$f_1 + f_2 = 380 \text{ kgm, bezw. } f_3 + f_4 + f_5 = 380 \text{ kgm } (3,8 \text{ qm}).$$

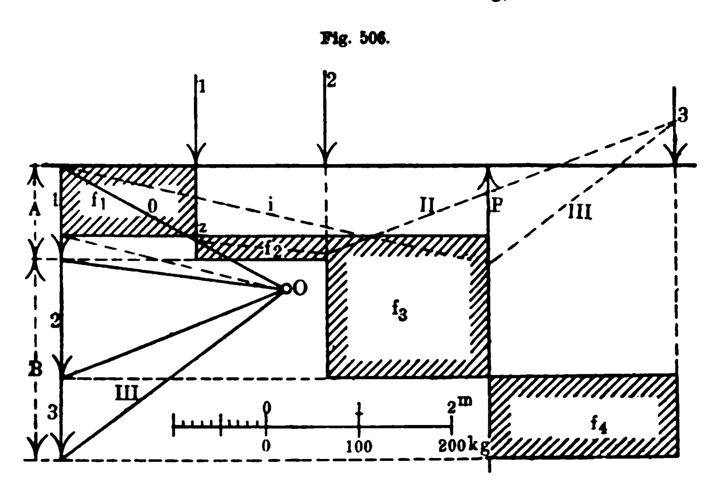
Fig. 505.



III. In Fig. 506 ist eine excentrische Belastung angenommen; die Konstruktion ist die gleiche; man findet zunächst

$$A = 76 \text{ und } B = 244 \text{ kg},$$

Fig. 506.



ferner die Flächen

$f_1 = 1{,}48 \cdot 0{,}76 = 1{,}13$ qm $\quad f_3 = 1{,}76 \cdot 1{,}54 = 2{,}71$ qm und

$f_2 = 1{,}40 \cdot 0{,}23 = 0{,}32$ „ $\quad f_1 = 2{,}05 \cdot 0{,}92 = 1{,}90$ „

Das Moment in z wird

$M_z = f_1 = 113$ kgm oder $M_z = f_2 + f_3 - f_4 = 113$ kgm,

das Moment im Auflager B ist

$$f_4 = 190 \text{ kgm } (1{,}900 \text{ qm}).$$

Der beliebig gewählte senkrechte Polabstand ist 2,43, die Momentenordinate in B ist 0,78, sonach nach der punktiert gezeichneten Momentenfläche ist das Moment im Auflager B

$$M = 2{,}43 \cdot 0{,}78 \cdot 100 \sim 190 \text{ kgm}.$$

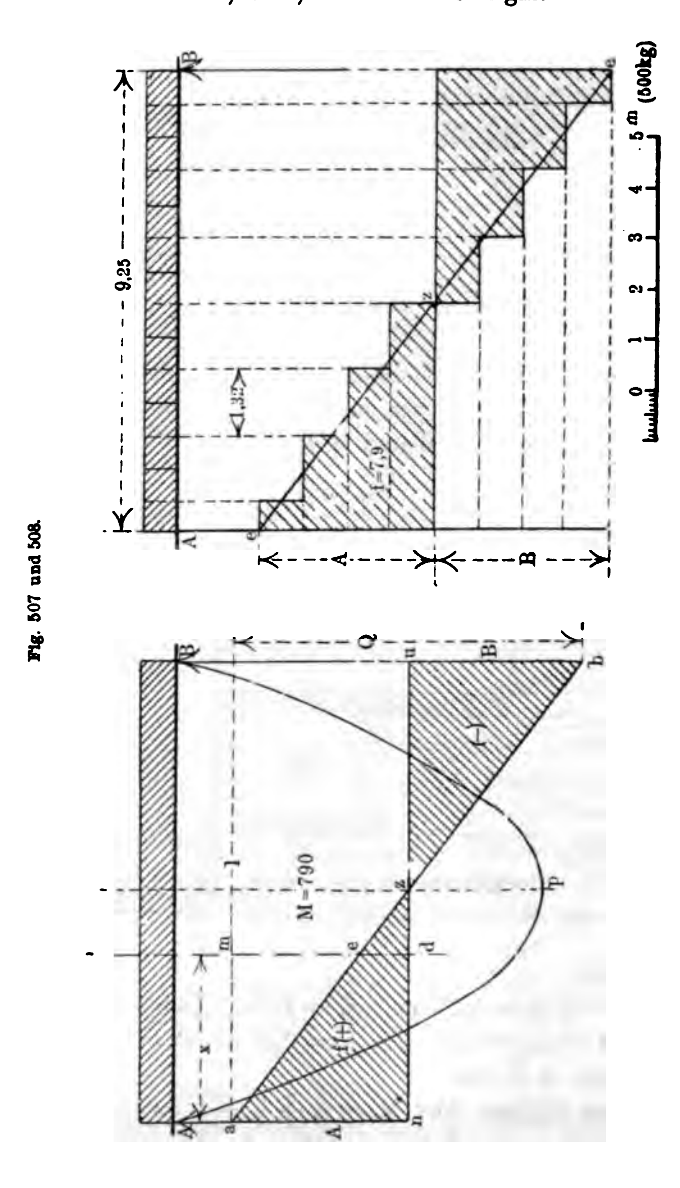


Fig. 507 und 508.

Vergleichen wir hiermit einen mit $Q = ql$ gleichmässig belasteten Balken, Fig. 507, 508, und stellen das Moment in der Entfernung x (Fig. 507) von A auf; die Auflager sind in diesem Fall

$$A = B = \frac{Q}{2} = \frac{ql}{2},$$

die Belastung bis x ist um das Verhältnis $\frac{x}{l}$ kleiner als Q, sonach $Q\frac{x}{l}$, das Moment, abhängig von Q, sonach

$$M = Ax - \left(Q\frac{x}{l}\right)\left(\frac{x}{2}\right) = Ax - \frac{Qx^2}{2l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (68)$$

Dasselbe lässt sich durch die Trapezfläche f = aedn darstellen; denn trägt man A = an und B = bu auf, und zieht die Verbindungslinie azb, so wird das Rechteck Ax durch die Seiten am und md begrenzt. Ferner stellt die Linie me das Produkt $Q\frac{x}{l}$ dar; denn es verhält sich graphomathematisch $\overline{me} : x = Q : l$, woraus $\overline{me} = \frac{xQ}{l}$.

Der Inhalt des △ ame ist $\overline{me} \cdot \frac{x}{2}$, das ist $\frac{Qx^2}{2l}$, sonach folgt durch Subtraktion des △ ame vom Rechteck ad das Trapez

$$f = M = \overline{aend}.$$

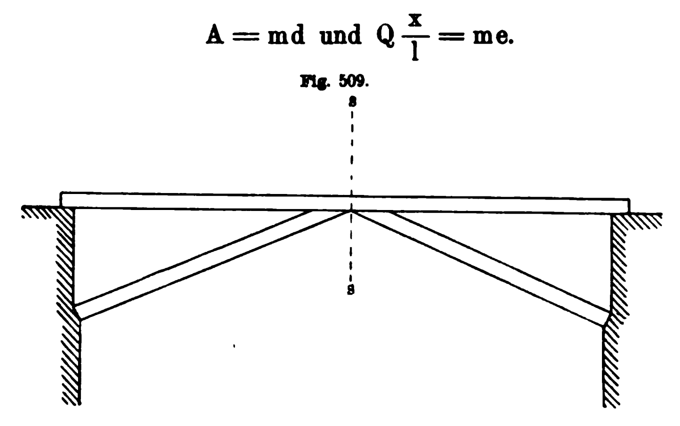
Die Schubkraft innerhalb x ist

$$V = A - Q\frac{x}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (69)$$

Diesem Ausdruck entspricht die Linie $\overline{ed}$; denn es ist

$$A = md \text{ und } Q\frac{x}{l} = me.$$

Fig. 509.



In Punkt z wird V = o, weil me die Grösse von A erreicht, an dieser Grenze ist, wie uns bekannt, das Moment am grössten, V wird

für $x > l/_2$ negativ, sonach tragen wir V = B im Auflager B nach unten, von der Nulllinie zu ausgehend, ist die Fläche f, die Schubkraft auf der rechten Seite als negativ zu betrachten, ihre Wirkung ist der auf der linken Seite entgegen. Schneiden wir beispielsweise ein einfaches Sprengwerk, Fig. 509, in der Mitte bei ss durch, so ist an dieser Stelle keine Schub- oder Vertikalkraft vorhanden, das gleichmässig belastet gedachte Sprengwerk wird an seiner Tragfähigkeit nichts einbüssen.

In Fig. 508 haben wir denselben gleichmässig belasteten Balken in 7 Teile geteilt und im Sinne der Fig. 504 staffelförmig die Vertikalkräfte konstruiert; je kleiner die Teilung wird, um so früher geht die Staffelung in eine gerade Linie über, um diese zu finden, haben wir nur nötig, die gleichmässig verteilte Last nach unten zu projizieren, die Auflager aufzutragen und deren Endpunkte ee zu verbinden, die Linie ee schneidet die Übergangslinie in z, in welchem Punkt V = o und das Moment den grössten Wert hat.

Nach dem beigefügten Massstab ist die Belastung Q = 680 kg, die Spannweite 9,25 m; das Moment in der Mitte

$$M = \frac{680 \cdot 9,25}{8} = 790 \text{ kgm}.$$

Der Inhalt des Dreiecks ist

$$f = \frac{3,4 \cdot 4,625}{2} \sim 7,90 \text{ qm}$$

bezw. mit 100 multipliziert, 790 kgm als Moment.

Während ab bezw. ee in den Fig. 507, 508 die Verteilung der Schubkräfte darstellen, liefert die auf AB konstruierte Parabel ApB die Momente in den verschiedenen Querschnitten des Trägers. —

Wenn, wie in Fig. 510, die gleichförmig verteilte Last den Balken nur teilweise bedeckt, so suchen wir auch zunächst die Auflager A und B. Wie uns bekannt, benötigen wir hierzu keine Teilung der Verkehrslast, sondern es genügt, die ganze Last Q aufzutragen und mit dem Polpunkt O das Seilpolygon O....V zu konstruieren. Die Schlusslinie i liefert A und B und der Schnittpunkt s die Schwerpunktslage; tragen wir noch die Endpunkte der gleichmässig verteilten Last nach unten, und verbinden die Punkte e, so schneidet diese Linie in z ein, die Lage des grössten Momentes. Die Grösse desselben liefern uns die Flächen f, bezw. die Momentenfläche usv in der Vertikalen des Schnittpunktes z, welche wir in der Figur nicht eingezeichnet haben, da sie mit der Schwerlinie durch s fast zusammenfällt. Die Momentenfläche wird um so genauer, je mehr wir Teile nehmen, um so richtiger geht das ge-

brochene Seilpolygon I II III IV in eine Kurve (Parabel) über. Da uns bekannt ist, dass das Moment einer gleichmässig verteilten Last halb so gross als das einer gleich grossen Einzellast ist (S. 109, 110, Band I),

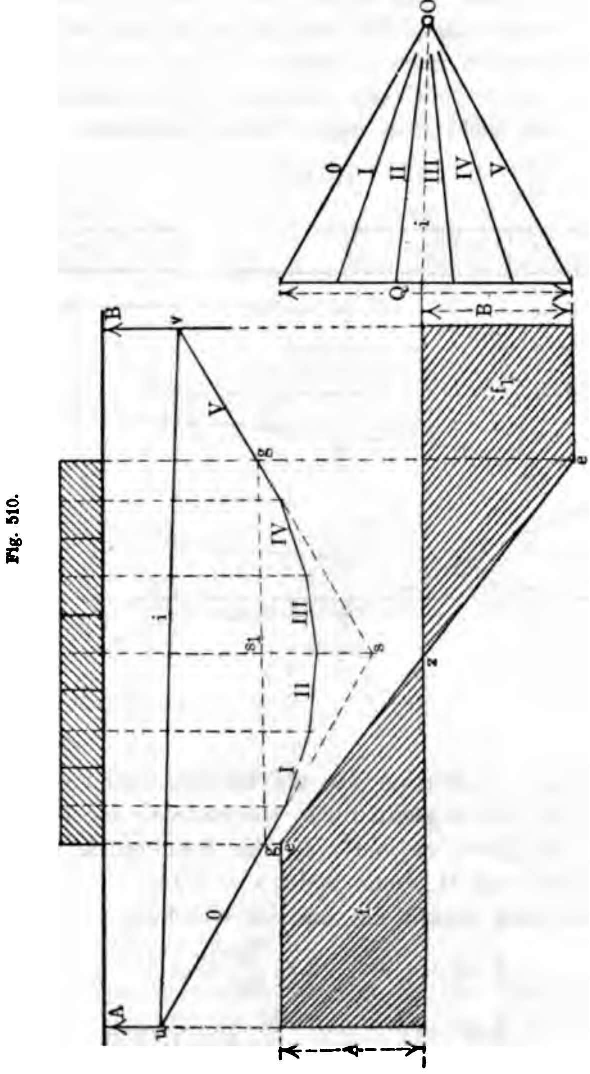


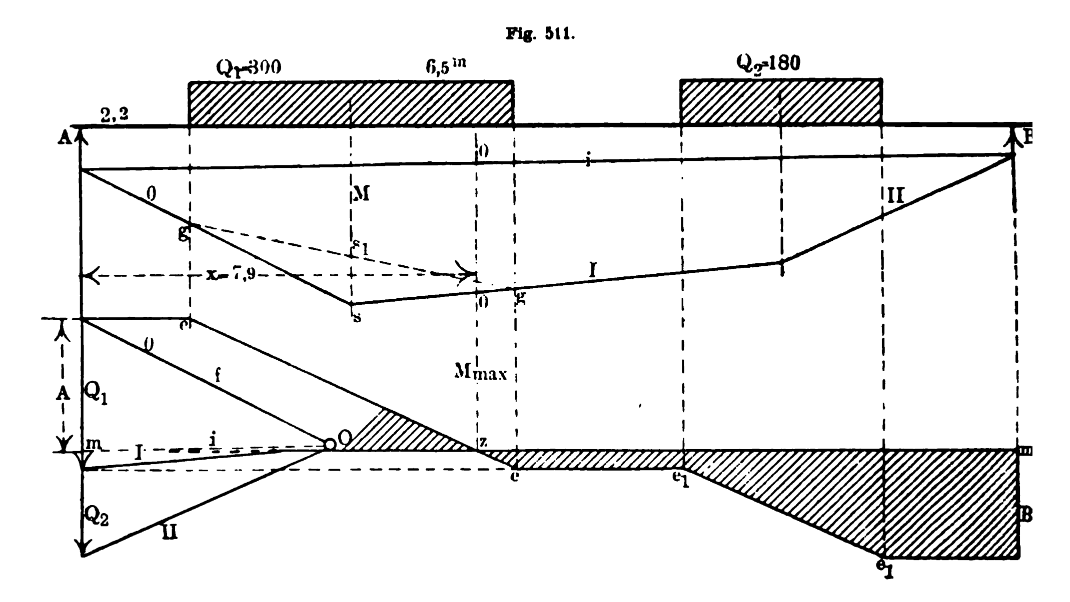
Fig. 510.

so haben wir nur nötig, die Linie gg zu ziehen und ss_1 zu halbieren; durch den Halbierungspunkt und durch die Punkte gg konstruieren wir die Belastungsparabel, in einigen der nächsten Figuren haben wir diese Konstruktion durchgeführt.

Verfolgt man den Verlauf der Schubkräfte, so übersieht man, dass diese bis e gleichmässig wirken, von e bis z abnehmen, von z bis B in derselben Weise wieder zunehmen, aber entgegengesetzt wirken.

Beispiele. I. Auf dem Träger AB, Fig. 511, wirken 2 gleichmässig verteilte Lasten $Q_1 = 300$ und $Q_2 = 180$ kg; es soll die Lage des grössten Momentes gesucht werden. Man trägt Q_1 und Q_2 auf und sucht mit einem beliebigen Polpunkt O die Auflager A = 260, B = 220 kg, nun zieht man durch m die horizontale Übergangslinie

Fig. 511.



$m m_1$, projiziert die Endpunkte der gleichmässig verteilten Lasten nach unten bis zu den Schnittpunkten der Horizontalen der Belastungen Q_1 und Q_2, zieht die Linien ee und $e_1 e_1$, der Schnittpunkt z durch $m m_1$ bestimmt die Lage von M_m; man findet x = 7,9 m.

Durch Rechnung ergiebt sich aus der Gleichung

$$V = A - (x - 2,2)\frac{Q_1}{6,5} = o,$$

$$260 = (x - 2,2)\frac{300}{6,5}, \quad x = 7,86 \text{ m}.$$

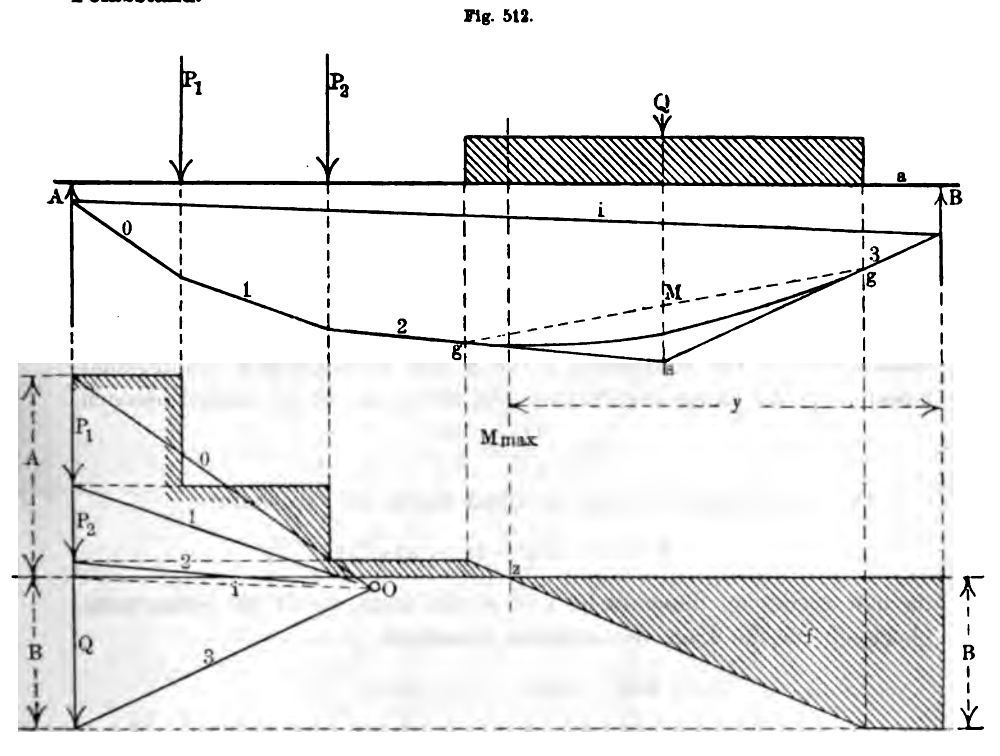
Die Grösse des Momentes kann man aus der Schubfläche f oder aus der betr. Ordinate oo der Momentenfläche entnehmen; man muss aber hier in Rücksicht ziehen, dass sich der Punkt s wieder auf Q_1 als Einzellast bezieht, um die wirkliche Grösse der Ordinate zu finden, muss die

Parabel konstruiert werden, die Ordinate M in s ergiebt sich dadurch, dass man die Linien g g zieht und s s_1 halbiert, wie oben schon angedeutet, die Kurve geht dann durch den Teilpunkt und durch die Punkte g g, in Wirklichkeit wird dann o o auch etwas kleiner; beide Momente aus der Ordinate und der Fläche müssen gleich werden. Die Fläche ergiebt

$$f = 2,6 \cdot 2,2 + \frac{5,7 \cdot 2,6}{2} \sim 13 \text{ qm},$$

das sind 1300 kgm. Die Ordinate $M = 260 \cdot 5 \sim 1300$ kgm, 5 ist der Polabstand.

Fig. 512.



II. Die Belastung des vorstehenden Trägers besteht aus 2 Einzellasten und einer gleichförmig verteilten Belastung P_1 P_2 und Q.

Wir suchen durch ein beliebiges Seilpolygon die Auflager, indem wir Q als Einzellast betrachten, konstruieren zunächst die Staffelung der Kräfte P_1 und P_2 und bestimmen den Durchschnittspunkt z in der Übergangslinie, indem wir die Länge der gleichmässig verteilten Last nach unten projizieren.

Die gleichmässig verteilte Belastung hat die Grösse $Q = 335$ kg, ihre Länge ist $l = 7,9$ m, das Auflager B ist 300 kg. Der Abstand der Belastung Q von B ist $a = 1,55$ m.

Bezeichnet man den Abstand z des Maximalmomentes von B mit y, so ist die Schubkraft in z Null, es ergiebt sich dann y durch Rechnung aus der Gleichung

$$V = B - (y - a)\, q = o, \text{ worin } q = \frac{Q}{7,9},$$

sonach wird

$$300 - (y - 1,55)\,\frac{335}{7,9} = 0$$

und hieraus $y = 8,63$, dieser Wert stimmt mit dem durch Konstruktion gefundenen überein. Das Maximalmoment selbst liefert die Fläche f der Schubkräfte oder die Ordinate der Momentenfläche.

III. In Fig. 513 findet eine andere Verteilung der Einzelkräfte $P_1 = 210$ kg und $P_2 = 250$ kg statt. Die verteilten Lasten sind $Q_1 = 250$ und $Q_2 = 160$ kg. Die Auflagerreaktionen ergeben sich zu

$$A = 450, \; B = 420.$$

Man trägt A und B und der Reihe nach die Belastungen auf, A und B ergiebt sich aus dem Seilpolygon, das grösste Moment liegt dann wieder in der Entfernung x von A und ist durch den Schnittpunkt z bestimmt; die Länge der Belastung Q_1 ist 4,7 m, auf die Einheit bezogen

$$q = \frac{Q}{4,7} = \frac{250}{4,7}.$$

Die Vertikalkraft in z ist bestimmt durch die Gleichung

$$V = A - P_1 - (x - a)\,\frac{Q_1}{4,7};$$

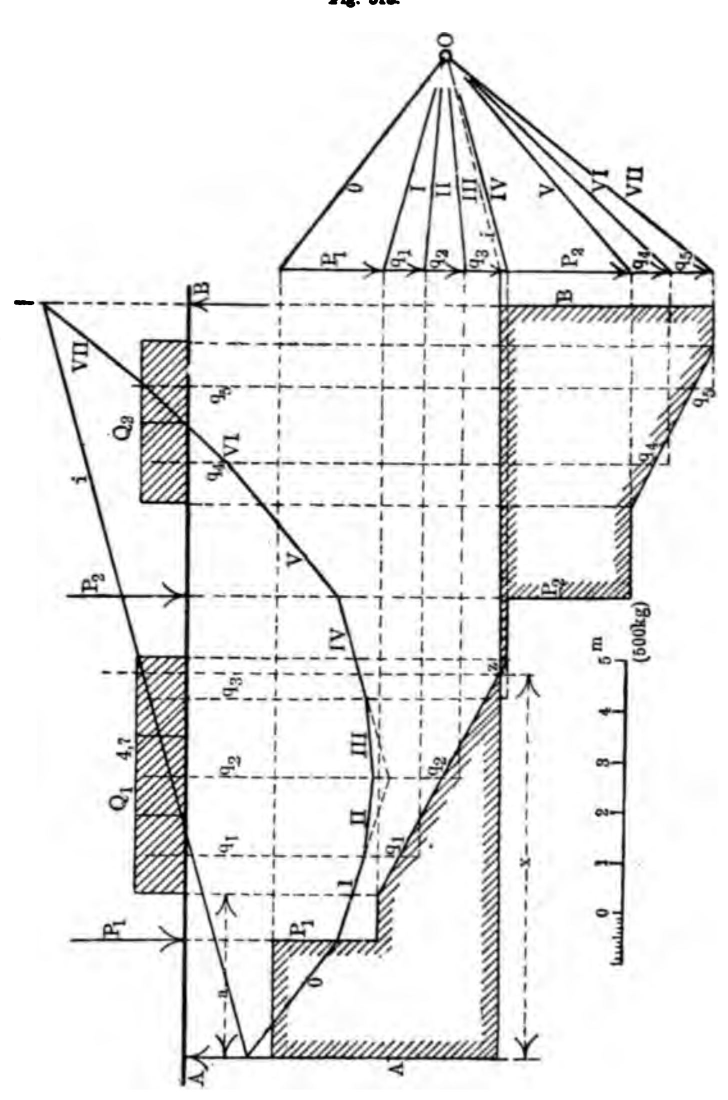
da nun wieder an dieser Stelle $V = o$ sein muss, so ist die Bedingungsgleichung für die Lage des grössten Momentes

$$o = 450 - 210 - (x - 3,25)\,\frac{250}{4,7},$$

woraus sich, wie in der Zeichnung, $x = 7,7$ m ergiebt.

IV. In den graphostatischen Zeichnungen, Fig. 514, 515, liegen verschieden grosse Einzellasten innerhalb der auf den ganzen Träger gleichmässig verteilten Belastung $Q = 900$ kg, die Konstruktion wird dadurch etwas abweichend von den früheren, soeben betrachteten. Aus den analytischen Berechnungen der Auflager und Momente im I. Band — unterstützte und belastete Träger — ist uns bekannt, dass, wenn Einzellasten mit gleichmässig verteilten Belastungen zusammenfallen, wir die Momente

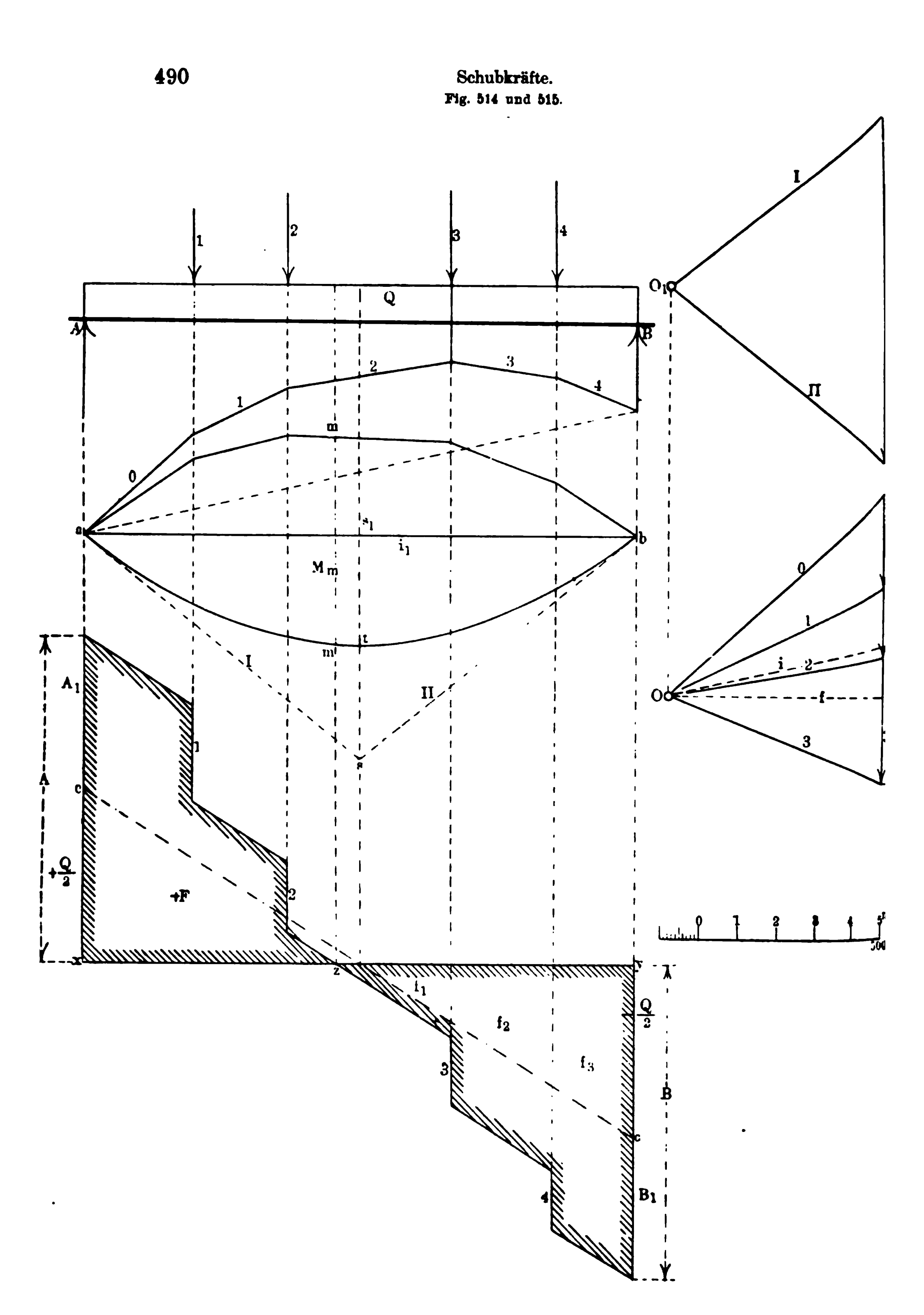
Fig. 513.



und Auflager jeder Belastungsart addieren können, um die Gesamtbeanspruchung des Balkens zu erhalten; das konstruktive Verfahren ist mit Rücksicht auf die Grundsätze der Graphostatik ganz dasselbe.

Wir tragen für einen bestimmten Polabstand f, Fig. 515, die Einzellasten auf und suchen durch das Seilpolygon 0, 1, 2, 3 die diesen

Fig. 514 und 515.



entsprechenden Auflager $A_1 B_1$. Mit demselben Polabstand, aber so, dass die Schlusslinie i_1 horizontal oder parallel der Trägerachse fällt, konstruieren wir das der verteilten Last Q entsprechende Seilpolygon O_1 I II. Ist t die Mitte von $s s_1$ und konstruiert man die Parabel atb, so bildet diese den Abschluss der Momentenfläche für die verteilte Belastung. Die Konstruktion der Schubflächen findet sich dann leicht durch die besonders gezeichnete Figur. Auf der Trennungslinie xy trägt man zunächst die Vertikalkräfte der verteilten Belastung auf, $\frac{Q}{2}$. Die Verbindungslinie cc, der Gleichung $V = A - q x$ entsprechend, schneidet die Horizontale xy hier in der Mitte; an c trägt man A_1 an, und staffelt nun, wie in den früheren Figuren, nur mit Rücksicht darauf, dass die Verbindungs- oder Konstruktionslinien der Kräfte P_1 P_2 ... parallel cc laufen müssen, bis zum andern Auflager B_1. In Wahrheit haben wir eine graphische Addition der Schubkräfte vorgenommen, es schneidet die mittlere Verbindungslinie die Übergangslinie xy in z, welcher Punkt die Lage des Maximalmomentes angiebt. Überträgt man das Seilpolygon 0, 1, 2, 3, 4 in die Horizontale ab, so liefert die Addition der Momentenordinaten die jeweiligen Momente, diese lassen sich natürlich auch aus den Schubflächen f_1 f_2 f_3 ... entnehmen. Das grösste Moment $mm = M_m$ bei z entspricht der Schubfläche F. Die Gesamtauflager sind $A = A_1 + \frac{1}{2}Q$, bezw. $B = B_1 + \frac{1}{2}Q$.

Man findet nach dem beigefügten Massstab F = 31 qm, sonach

$$M_m = 31 \cdot 100 = 3100 \text{ kgm},$$

aus der Momentenfläche

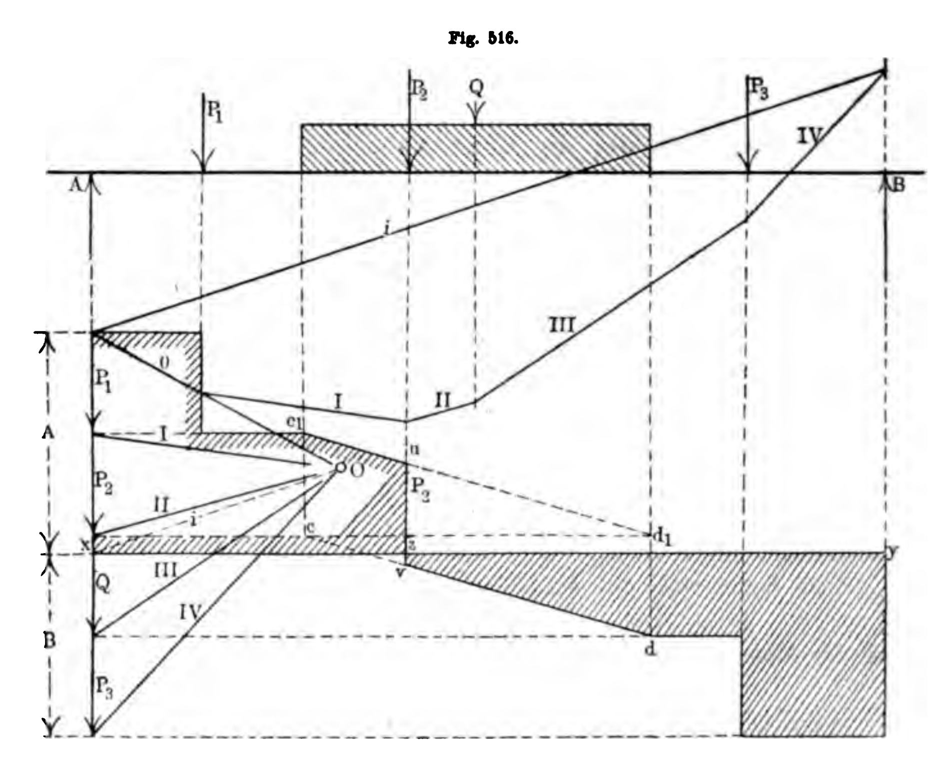
$$M_m = mm = 540 \cdot 5{,}7 \sim 3100 \text{ kgm}.$$

Vergleicht man beide Methoden zur Berechnung der Momente, so lässt sich die Momentenfläche für die Momente wohl viel bequemer verwerten als die Flächen der Schubkräfte, deren Inhalt zu bestimmen offenbar langwieriger ist, hingegen bestimmt man mit Hilfe der Schubkräfte die Lage des grössten Momentes wohl ebenso schnell und sicher wie mit Hilfe der Momentenfläche.

V. In Fig. 516 bedeckt die gleichmässige Last Q nur teilweise den Träger, ausserdem sind noch 3 Einzellasten $P_1 P_2 P_3$ vorhanden; es soll die Lage des Maximalmomentes gesucht werden. Wir tragen P_1, P_2 und Q als Einzellast vom Schwerpunkt, ebenso P_3 auf und suchen durch ein beliebiges Seilpolygon die Auflager A und B. Vom Endpunkt der Kraft P_1 ziehen wir horizontal bis zum Schnittpunkt c_1, die Schubkraftrichtung cd finden wir dadurch, dass wir die Kraft oder Last Q in die horizontalen

Linien der gleichmässig verteilten Last projizieren, wir ziehen dann $c_1 d_1$ parallel $c d$ bis zum Schnitt u, indem wir die gleichmässige Belastung bei P_2 uns getrennt denken und machen $u v = P_2$, dann schliessen wir P_3 an, um mit B das Gleichgewicht mit den Belastungen wieder herzustellen, das grösste Moment fällt in den Schnitt z mit xy.

Fig. 516.



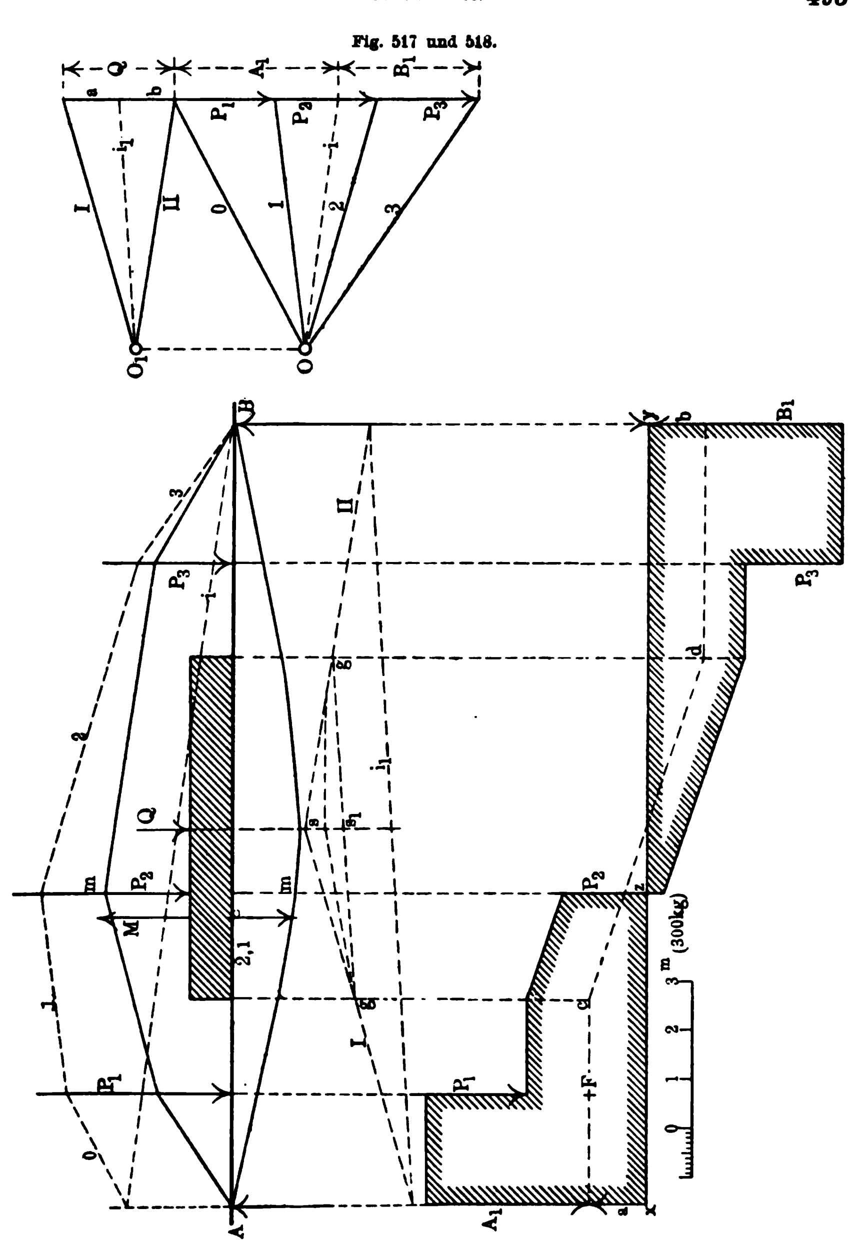
Diese Konstruktion ist etwas abweichend von der vorigen und von der nächstfolgenden, welche denselben Belastungsfall darstellt.

VI. Die Konstruktion und die Lage des Maximalmomentes ist in Fig. 517 und 518 entsprechend der S. 490 durchgeführt.

Man zeichnet zunächst mit den beliebigen Polpunkten $O O_1$, aber bei gleichem Polabstand, die beiden Seilpolygone I II und 0 1 2 3 auf und entnimmt die Auflagerreaktionen $A_1 B_1$ für die Einzelkräfte und und $a_1 b$ für die verteilte Last. Durch Halbierung des Abstandes $s s_1$ gewinnt man die Parabelhöhe der Belastungslinie der verteilten Last Q.

Man überträgt nun beide Seilpolygone in die Achse AB und kann für jede Abscisse die Momentensumme der beiden Belastungen abgreifen.

Fig. 517 und 518.



Wir tragen ferner senkrecht zu der der Achse AB parallelen Linie xy, a und b ab und erhalten die Schubkräfte durch die punktierte Linie cd. An ab setzen wir A_1 und B_1 an, das heisst, addieren A_1 und B_1 zu a und b

und staffeln mit Rücksicht auf die Einzellasten P_1 P_2 P_3 und auf die schiefe Abschlusslinie der verteilten Belastung bis zum Auflager B = b + B_1, so schneidet P_2 bei z die Übergangslinie xy, und die Lage des

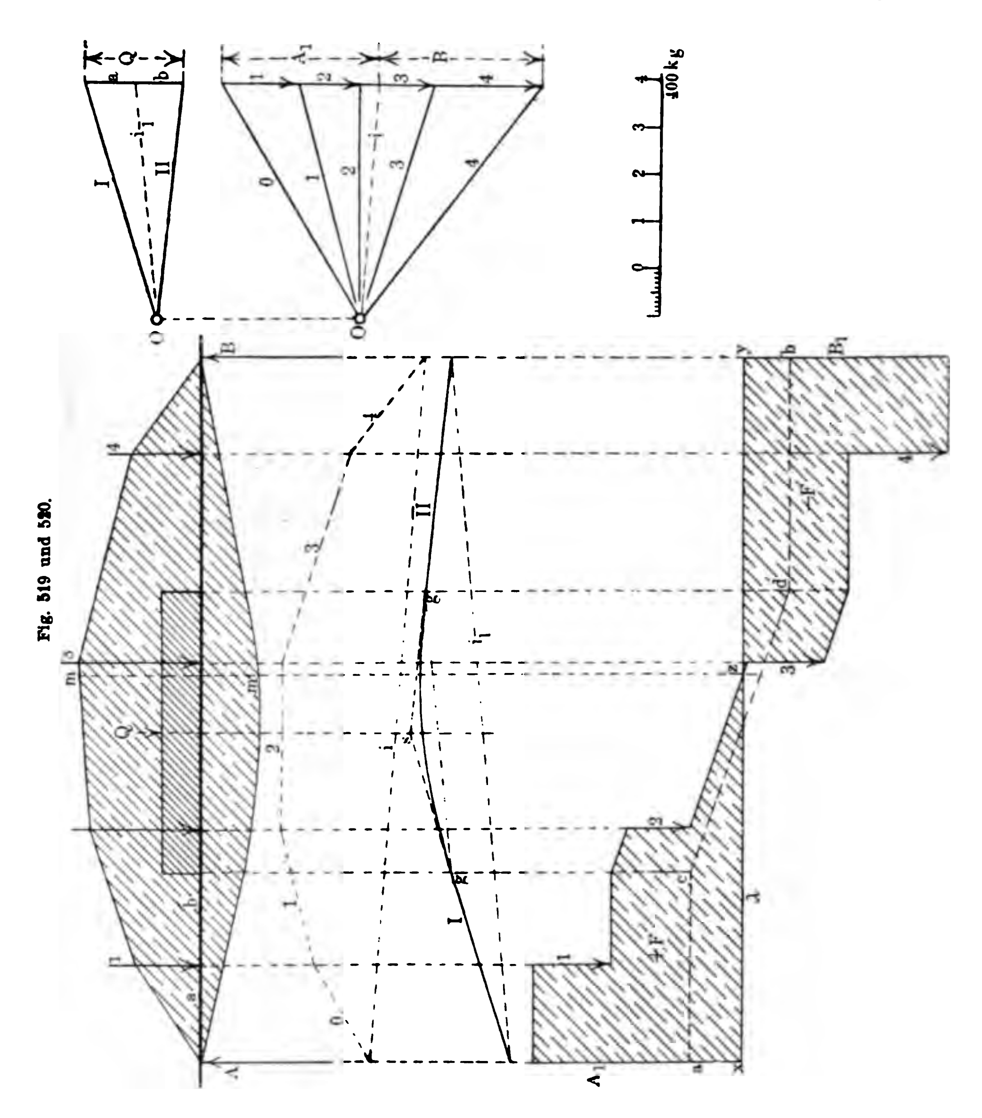


Fig. 519 und 520.

Maximalmomentes m m, bezw. die Schubmomentenfläche F ist durch die Entfernung x z bestimmt; die Grösse durch M = m m · f, wenn f der Polabstand, oder durch F · 100, wenn F in qm und jeder meter 100 kg entspricht.

Aus der Figur ergiebt sich mm = 3,8, der Polabstand ist 5, somit

$$M_{max} = 3{,}8 \cdot 100 \cdot 5 = 1900 \text{ kgm.}$$

Die Schubkraft bis z ist

$$V = (A_1 + a) - P_1 - P_2 - q, \text{ worin } q = \frac{Q}{7}\, 2{,}1;$$

7 m ist die Länge der verteilten Belastung, Q = 220 kg, somit

$$V = 460 - 200 - 200 - \frac{220}{7} \cdot 2{,}1,$$

dieser Wert muss Null ergeben, in der Zeichnung differiert derselbe um 60 kg. Die Schubfläche F ergiebt 19,2 qm, wonach

$$M_{max} = 19{,}2 \cdot 100 = 1920 \text{ kgm.}$$

VII. Die graphostatische Berechnung des in Fig. 519 belasteten Trägers ist in demselben Sinne der vorigen Figur durchgeführt. Mit der gleichmässig verteilten Last Q fallen die beiden Einzellasten 2 und 3 zusammen. Man konstruiert erst die Seilpolygone für jede Belastungsart I II und 0 1 2 3 4, und überträgt diese in die Balkenachse AB, bestimmt die schiefe Schubkraftlinie cd und staffelt der Reihe nach die Vertikalkräfte mit Rücksicht auf die Schrägung cd ab; z ist wieder der Kreuzungspunkt, mm das Maximalmoment. Die Entfernung desselben von A ist xz = 8,2 m; die Grösse bei dem Polabstand f = 5,

$$M_{max} = \overline{mm} \cdot f = 3{,}8 \cdot 100 \cdot 5 = 1900 \text{ kgm,}$$

es hat zutällig dieselbe Grösse wie das in Fig. 517.

Will man xz = λ die Entfernung des Maximalmomentes von A berechnen, dann muss man die Schubkraft an dieser Stelle Null setzen

$$V = (A_1 + a) - (1) - (2) - q\,[\lambda - (a + b)] = 0,$$

in dieser Gleichung ist $A_1 + a = A = 440$ kg, (1) = 160 kg, die Einzellast (2) = 130 kg; die verteilte Last auf die Einheit bezogen

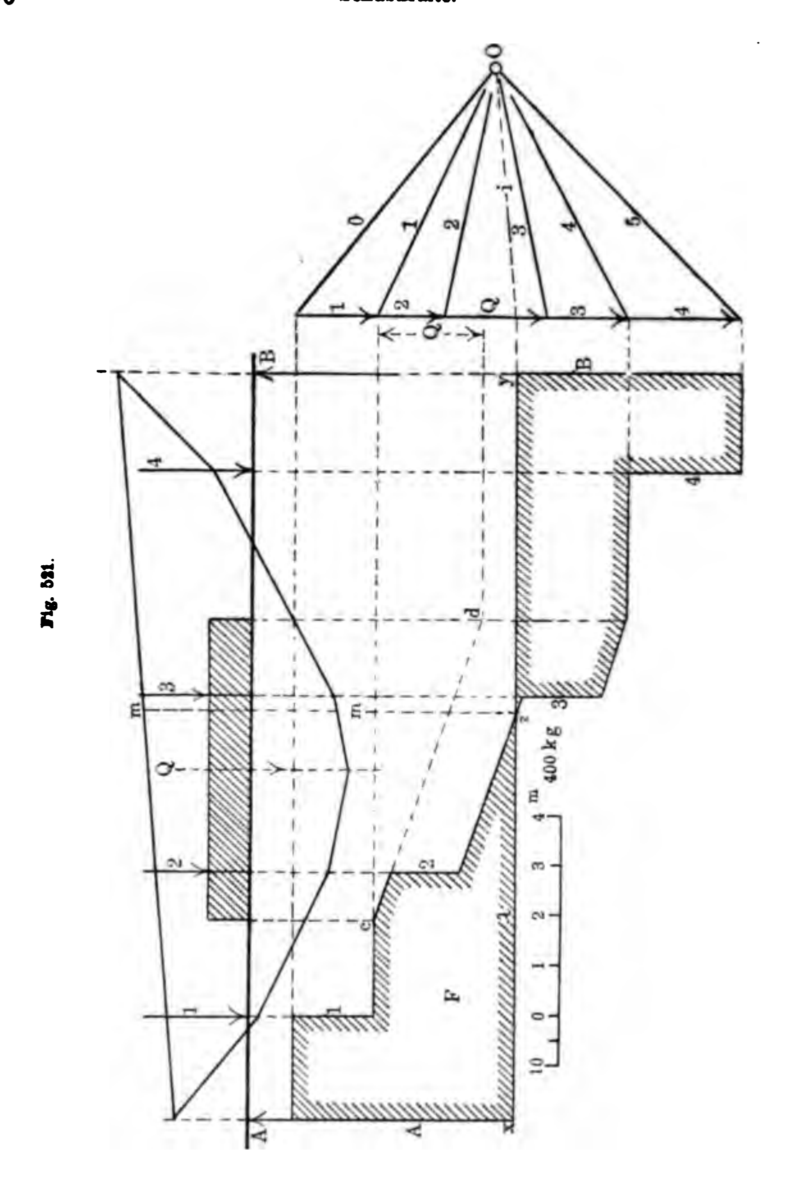
$$q = \frac{Q}{6} = \frac{210}{6} = 35 \text{ kg,}$$

die Entfernungen a + b = 4 m, folglich

$$V = 440 - 160 - 130 - 35\,(\lambda - 4) = 0,$$

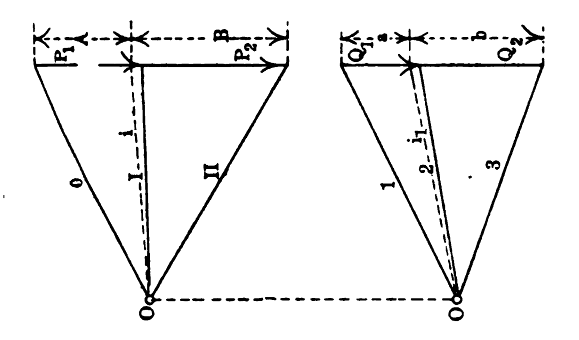
woraus λ = 8,28 m folgt.

VIII. In Fig. 521 haben wir denselben eben betrachteten Träger mit einem Polpunkt im Sinne der Fig. 516 graphisch auf sein Maximalmoment untersucht. Das Resultat ist nahezu das gleiche, insofern etwas differierend, als die gleichmässige Last als Einzellast im Schwerpunkt nur in Rücksicht gezogen wurde. Man bestimmt zunächst die Auflager A und B und sucht dann mit Hilfe der verteilten Last Q die Abschrägung cd, nach welcher sich die Staffelung richtet.


Fig. 521.

Die Lage des Maximalmomentes $\lambda = xz$, sowie $M_{max} = mm$ stimmen mit der vorigen Figur fast genau überein.

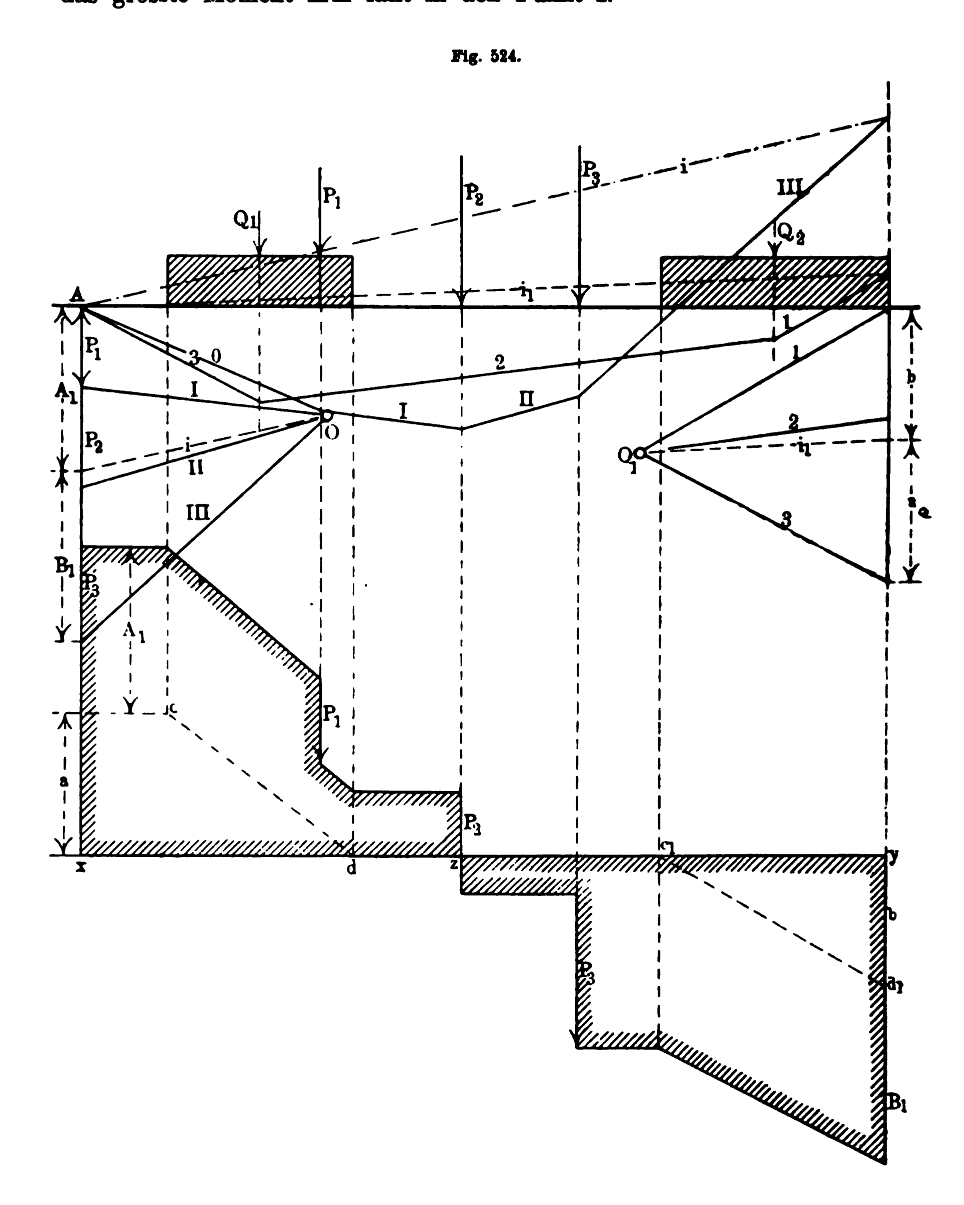
IX. In Fig. 522 liegen 2 Einzelbelastungen innerhalb zweier gleichmässig verteilten Lasten, Q_1 und Q_2. Wir suchen in (b) und (c) die Auflager a, b und A_1 B_1 und übertragen die Seilpolygone in die



Achse AB des Trägers. An die Übergangslinie xy tragen wir die aus den Kräfteplänen entnommenen Reaktionen, und zwar die der verteilten Lasten nach innen, um die schiefen Schubkraftlinien c d und $c_1 d_1$ zu

erhalten, und staffeln mit Rücksicht auf dieselben in bekannter Weise ab; das grösste Moment mm fällt in den Punkt z.

Fig. 524.

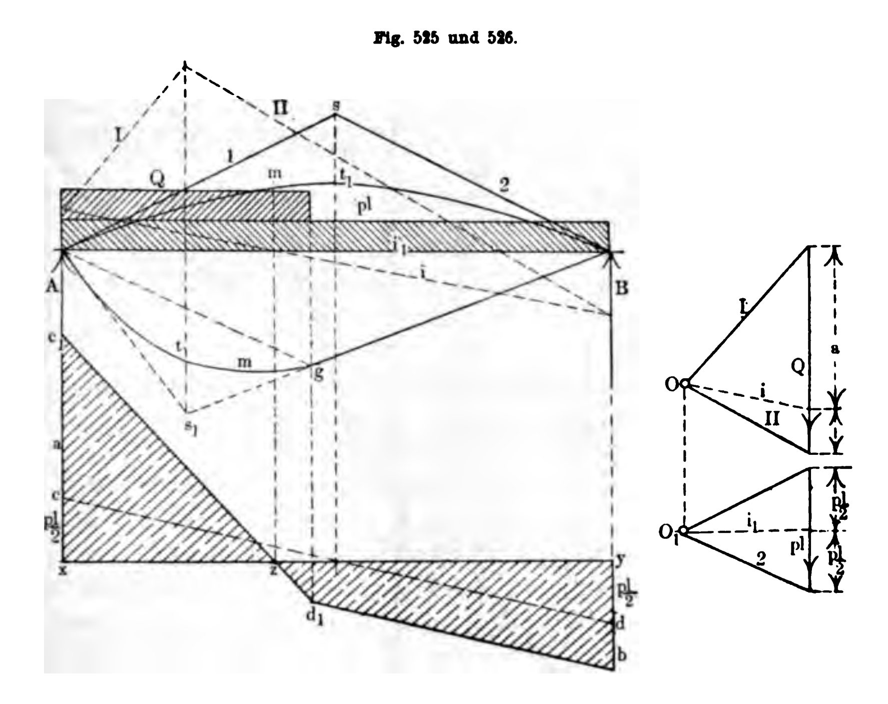


X. Der Träger, Fig. 524, ist ausser den zwischen Q_1 und Q_2 liegenden Einzellasten P_2 und P_3 noch mit einer mit Q_1 zusammenfallenden

Belastung P_1 in Anspruch genommen. Die allgemeine graphostatische Konstruktion ist im wesentlichen dieselbe, wie die bereits betrachteten; da die Bezeichnung der Buchstaben die gleiche wie in den früheren Figuren ist, so dürfte der zeichnerischen Ausführung wohl nichts im Wege stehen. In der rechten Hilfsfigur sind noch die Belastungsbuchstaben Q_2 neben b und Q_1 neben a zu ergänzen.

XI. Die Belastung des folgenden Trägers, Fig. 525, besteht aus einer gleichförmigen Belastung pl, p kg auf den lauf. m, ausserdem noch

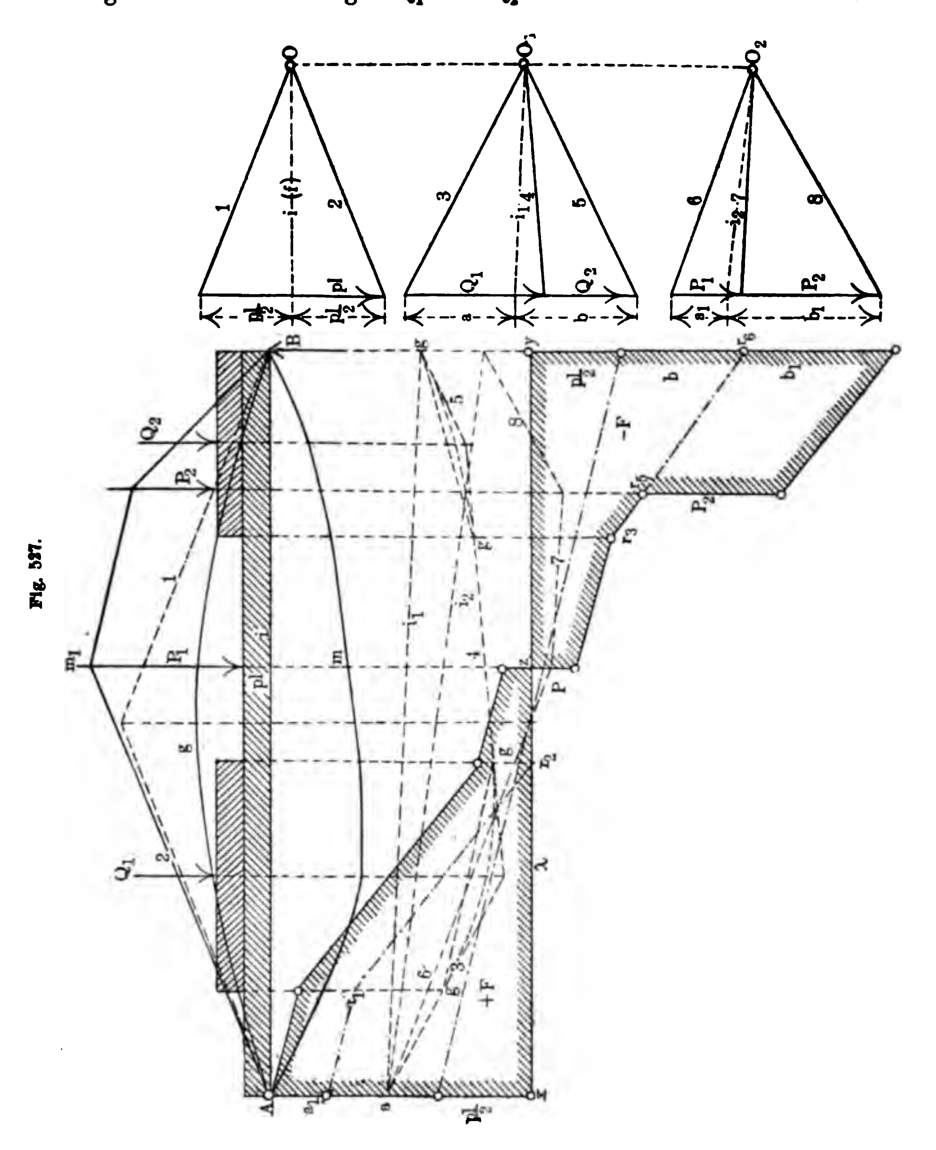
Fig. 525 und 526.



aus der Verteilungslast Q. Wir konstruieren für Q und pl die beiden Seilpolygone I, II und 1, 2, Fig. 526. Die Schlusslinie i für Q, Polpunkt 0, liefert die Auflager a und b und das in die Achse AB übertragene Seilpolygon AtgB. Die Parabel At_1B als Seilpolygon für die Belastung pl konnten wir mit in die Achse AB fallende Schlusslinie i_1 unmittelbar verwerten. Trägt man an die Schubkraftlinie cd der Belastung pl die Auflager a und b an, so liefert die Linie $c_1 d_1$ den Schnittpunkt z, somit die Lage des Maximalmomentes mm (vgl. II. Band S. 130, Beispiel XII).

XII. Wir haben in Fig. 527 noch ein Beispiel mit 3 Belastungsarten angeschlossen, und zwar ist der Träger erst gleichmässig, event.

mit Eigengewicht in kg auf d. lauf. m belastet, sodann mit 2 gleichförmig verteilten Belastungen Q_1 und Q_2 und endlich mit 2 Einzellasten


Fig. 527.

P_1 und P_2. Wir haben zunächst 3 Seilpolygone konstruiert, 1, 2 mit Pol O für die Last pl; 3, 4, 5 Pol O_1 für die Lasten Q_1 und Q_2, und 6, 7, 8 mit O_2 als Pol für P_1 P_2.

Die Schlusslinien $i\,i_1\,i_2$ liefern uns die jeweiligen Auflagerreaktionen $\frac{pl}{2}$; a, b und a_1, b_1. Durch die Projektionsschnittpunkte g g ... haben wir die Parabeln der verteilten Lasten festgelegt und schliesslich die sämtlichen Seilpolygone, bezw. die Momentenflächen in die Achse AB übertragen: 1, 2 bezw. AgB nach oben, 3, 4, 5 bezw. AmB nach unten und 6, 7, 8 bezw. Am_1B zu AgB addiert nach oben. Unter Annahme einer Grenzlinie xy tragen wir zunächst $\frac{pl}{2}$ an, anschliessend die Auflager a, a_1 und b, b_1. Um den Verlauf der Schubkräfte zu erhalten, ist auf die schiefen Richtungen der gleichmässig verteilten Lasten zu achten. Von A aus läuft die Richtung der gleichmässig verteilten Lastrichtung pl parallel, dann der Richtung $r_1\,r_2$, weil Q_1 hinzukommt, welche in xy einschneidet, dann bis P_1 wieder der Richtung von $\frac{pl}{2}$, ebenso von P_1 an bis zum Schnitt r_3, von hier bestimmt sich die Richtung $r_3\,r_6$ durch Q_2, bei r_5 wirkt P_2 bis zur Schlussrichtung des Endpunktes von $\frac{pl}{2} + b + b_1$.

Der Polabstand ist f = 5; die Auflagerreaktionen

$$A = \tfrac{1}{2}\,pl + a + a_1 = 560 \text{ kg},$$
$$B = \tfrac{1}{2}\,pl + b + b_1 = 800 \text{ kg}.$$

Das grösste Moment liegt in der Entfernung $\lambda = xz = 9{,}2$ m, die Spannweite ist $l = 16$ m, das Maximalmoment

$$M_m = m\,m_1\,f = 5{,}8 \cdot 100 \cdot 5 = 2900 \text{ kgm};$$

die Schubfläche F = 29,18 qm, daher M = 29,18 · 100 = 2918 kgm, nahezu gleich mit M_m, die Differenz liegt in der Zeichnung.

2. Mittelbare oder indirekte Belastungen.

Die Einzellast P, Fig. 528, ruht nicht unmittelbar auf dem Träger AB, wie früher angenommen wurde, sondern mittelbar, indem auf AB die beiden Träger tt liegen, welche unmittelbar durch P belastet sind. Die Bestimmung der Reaktionen ABCD geschieht in der folgenden Weise. Man trägt, Fig. 529, die bekannte Kraft P auf und sucht durch das Seilpolygon I II i die Auflager A und B, verbindet man jetzt die Schnittpunkte gg und zieht III parallel III im Kräfteplan, so schneidet diese die Druckkräfte CD auf P im Kräfteplan ab.

Das Moment $ss_1 = m$, welches in Betracht kommen würde, wenn

tt nicht vorhanden, wird geringer, das grösste der in Rechnung zu ziehenden Momente wäre in unserem Falle m_2 im Punkte D, bezw.

$$M = m_2 \cdot f.$$

Fig. 528 und 529.

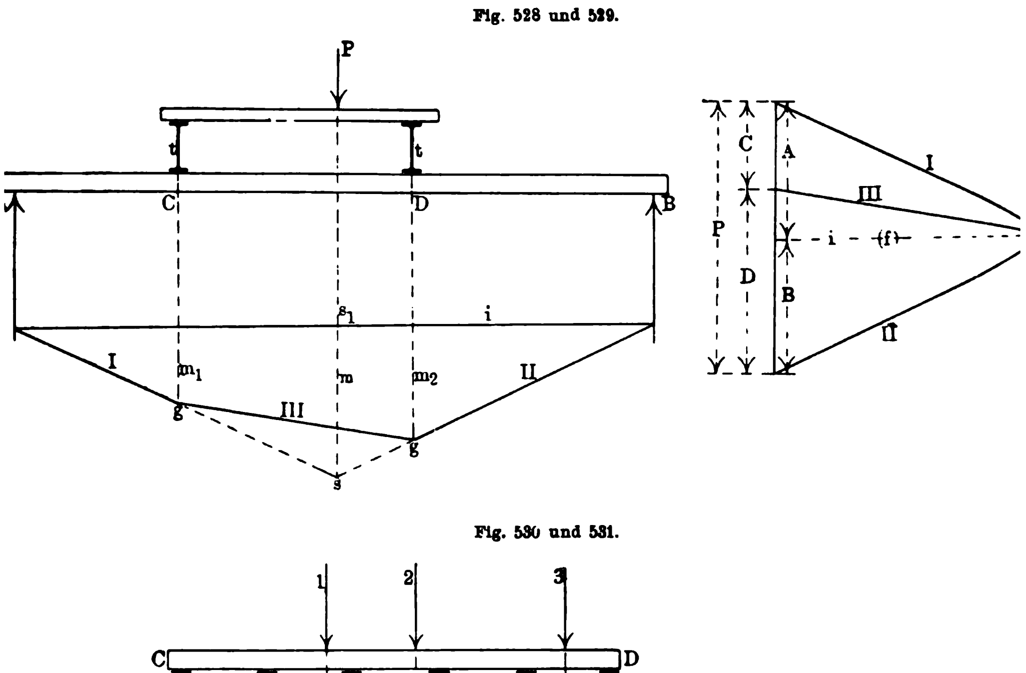


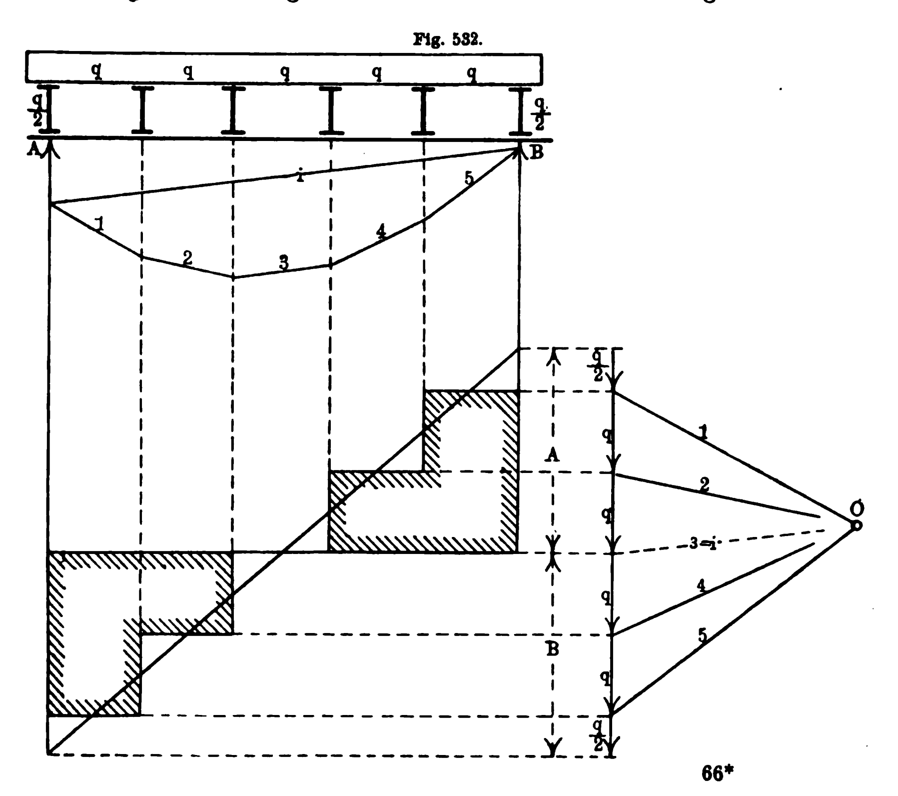
Fig. 530 und 531.

Auf einem Träger AB, Fig. 530, liegen eine Reihe, hier 6 I Träger, auf diesen liegen wieder in derselben Richtung wie AB die Träger CD, diese erst tragen die Einzellasten 1, 2, 3; die letzteren wirken also

mittelbar, indirekt durch die Träger t t . . . auf den Hauptbalken A B; es fragt sich, nach welchem grössten Moment der letztere zu berechnen ist und wohin, bezw. in welchen Zwischenträger t das grösste Moment fällt? Dieser Belastungsfall schliesst sich unmittelbar dem vorigen an. Wir tragen zunächst die gegebenen Einzelkräfte 1, 2, 3 auf, Fig. 531, wählen einen Pol O und konstruieren das Seilpolygon O I II III. Die Einzelkräfte übertragen durch CD bezw. t t . . den Druck nach unten, projizieren wir daher ihre Druckrichtungen in das soeben gezeichnete Seilpolygon, so erhalten wir bestimmte Schnittpunkte $s_1 s_2 s_3 s_4$, die wir miteinander verbinden; diese neuen Seillinien 4, 5, II ist schon vorhanden und 6 übertragen wir parallel in die Fig. 531, dadurch gewinnen wir die Druckkräfte a b c d, welche wir zur Konstruktion der Schubkräfteflächen, Fig. 530, verwenden. Wir ersehen aus dem Moment m m, welches uns der Durchschnitt z liefert, dass dieses kleiner ist, als wenn die Kräfte 1, 2, 3 unmittelbar auf A B einwirken; auch ist die Verteilung der Schubkräfte auf die Querträger eine andere, als bei direkter Belastung. —

Bei gleichmässig verteilter indirekter Belastung ist die Kon-

Fig. 532.



struktion der Momente bezw. Schubkräfte, wie Fig. 532 zeigt, in ähnlicher Weise durchzuführen.

Auf dem Balken AB ruhen 6 TTräger, auf diesen die gleichförmig verteilte Last 5 q, also q für jedes Feld. Die Auflagerstützkräfte sind sonach $A = B = \frac{5}{2}$ q, wobei wir eine gleichmässige Verteilung, auch der Träger, angenommen haben. Die Endträger sind also mit $\frac{1}{2}$ q, die Zwischenträger mit q belastet. Wir tragen diese Belastung auf und konstruieren das Seilpolygon 1, 2, 3, 4, 5, welches uns die Momente liefert. Bei den Schubkräften müssen wir in Rücksicht ziehen, dass dieselben in A und B um $\frac{q}{2}$ kleiner sind, als $\frac{5}{2}$ q und dass sie innerhalb der Zwischenträger jeweilig die gleiche Grösse haben, daher staffeln sich dieselben, wie in der Figur eingezeichnet, ab, die Schubkraft im mittleren Feld ist Null.

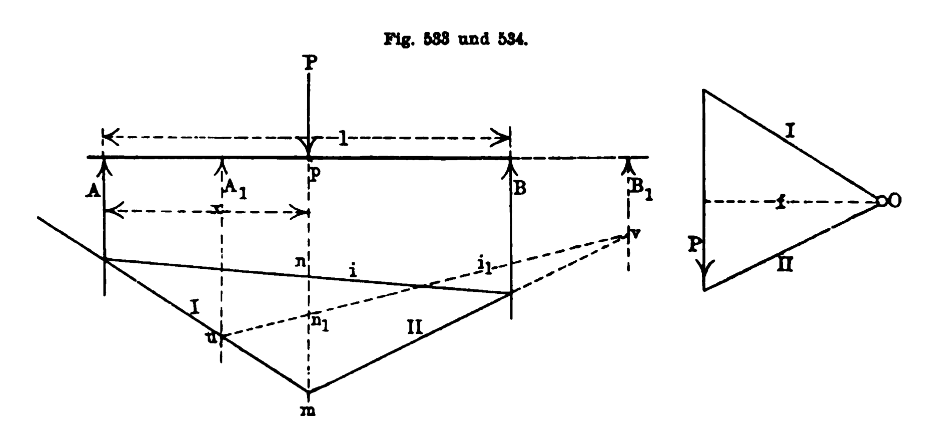
3. Veränderliche oder bewegliche Lasten, Einflusslinien.

In den sämtlichen bisherigen Betrachtungen, welche mit Trägerbelastungen in Zusammenhang stehen, haben wir stets stillschweigend vorausgesetzt, dass die Belastung des betreffenden Balkens, des Trägers oder der Brücke, ob Einzellast oder gleichmässig verteilte Belastung in der einmal angenommenen Stellung verharrt, in vielen Fällen ist dies aber nicht der Fall, keinenfalls bei Brückenträgern, die Last bewegt sich über den Träger, über die Brücke; ihre Grösse, ihr Druck, ihre Kraftwirkung auf den Träger bleibt hierbei unverändert, aber ihre Lage, ihre Stellung, die Entfernung ihres oder ihrer Kraftangriffspunkte von den Auflagern sind veränderlich, dadurch wird auch der Einfluss, den sie auf den Träger ausübt, ein veränderlicher werden und wird es eine stete Aufgabe der analytischen und graphischen Mechanik sein, den ungünstigsten Fall ins Auge zu fassen, welcher event. die grössten Dimensionen liefern würde, um für alle Fälle gesichert zu sein. In einigen unserer obigen Beispiele haben wir die Beweglichkeit der Last dadurch umgangen, dass wir für denselben Träger verschiedene Knotenpunktslasten annahmen, und diejenigen Spannungen in Rechnung zogen, welche die Maximalresultate liefern, dadurch ist aber offenbar nicht allen Belastungsarten Genüge geleistet, die Untersuchungen sind nicht erschöpfend durchgeführt. Das letztere wird nun aber der Fall, wenn wir gleich von Anfang an die Belastung als über eine Brücke oder über einen Träger hinwegschreitend, sich fortbewegend voraussetzen. Da

auf diese Weise immer ein anderer Einfluss auf den Träger ausgeübt wird, so entstehen im Sinne der graphischen Darstellung Liniensysteme, Liniengebilde, welche man rundweg Einflusslinien nennt. Die bisher konstruierten Linien, Belastungskurven, Durchbiegungslinien (s. II. Band) zeigen uns allerdings auch einen Einfluss an, er hat aber nur einen konstanten Charakter, er bezieht sich nur auf die momentane Belastung, auf die betr. vorliegende Belastungsart, der Ausdruck Einflusslinie ist für diese Fälle nicht üblich. —

Die Kraft P, Fig. 533, sei bei ihrer Bewegung von B nach A in einem beliebigen Punkte p, dessen Abscisse x ist, angelangt, das dieser Lage entsprechende Seilpolygon I II O liefert das Moment m n.

Fig. 533 und 534.



Anstatt P nun in der Richtung nach A zu weiter zu bewegen, denken wir uns den Balken AB in entgegengesetzter Richtung nach B_1 zu bewegt, die Wirkung ist dieselbe, nur erreichen wir dadurch, dass wir dasselbe Seilpolygon I II O, Fig. 534, bezw. I II m, Fig. 533, verwerten können, wir haben nur nötig, die veränderte Schlusslinie $uv = i_1$ einzuzeichnen, das Moment ist jetzt mn_1, also $< mn$. Diejenige Lage der Schlusslinie, oder die Stellung von P ist nun die ungünstigste, welche das grösste Moment, die grösste Momentenordinate liefert.

Betrachtet man B als Drehpunkt, so folgt für A die Gleichung $Al = P(l - x)$, woraus

$$A = \frac{P(l - x)}{l} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (70)$$

sonach ist das Moment im Angriffspunkt der Kraft P

$$M_p = Ax = \frac{P}{l}(l - x)x \quad \ldots \ldots \quad (71)$$

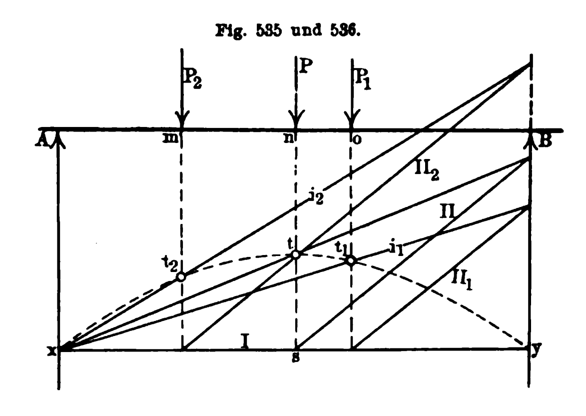
In dieser Gleichung ist wieder das Gesetz einer Parabel enthalten. Es ist uns bekannt, dass M_p am grössten wird für $x = \frac{l}{2}$,

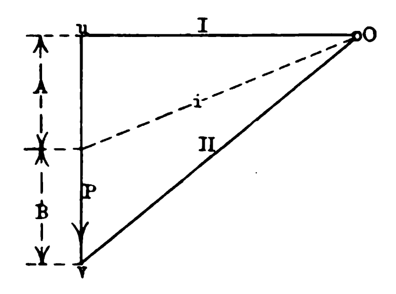
$$M = \frac{Pl}{4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (71\,a)$$

Das ist für $l - x = x$*), für welchen Wert Gl. 71 das grösste Moment liefert; der Nachweis kann übrigens auch graphomathematisch durchgeführt werden.

In Fig. 535 haben wir die Konstruktion obiger Parabel als Einflusslinie angedeutet. Es sei AB der durch P als Einzellast belastete Balken,

Fig. 535 und 536.





welche Last zunächst in der Mitte n des Balkens wirkt. Man wählt zur Konstruktion eines Seilpolygones zu $uv = P$, Fig. 536, einen Polpunkt O, aber senkrecht auf P im Punkte u, die Schlusslinie i schneidet die Kraftlinie durch n in t und liefert natürlich im Kräfteplan

*) Setzt man in $M_p = \frac{P}{l}(lx - x^2)$, $\frac{dM}{dx} = 0$, das ist $l - 2x = 0$, so folgt $x = \frac{l}{2}$.

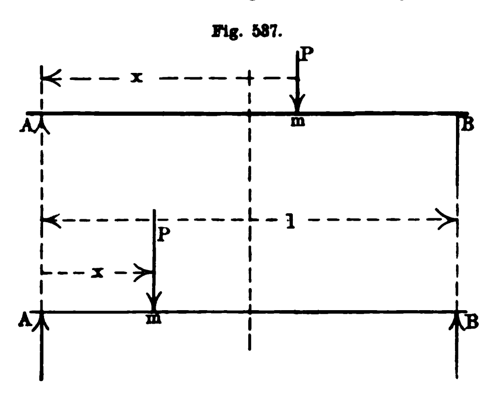
$$A = B = \frac{P}{2}.$$

Jetzt nimmt man P in m, o u. s. w. an und konstruiert wieder das Seilpolygon, indem man nur nötig hat, in der Hauptfigur eine Parallele II_1 II_2 u. s. w. zu II zu ziehen, die jeweiligen Schlusslinien i_1 i_2 schneiden die Kräftelinien P_1 und $P_2 \ldots$ in t_1 $t_2 \ldots$; die Verbindungslinie $x t_2 t t_1 y \ldots$ liefert die uns bekannte Parabel, deren grösste Ordinate ts das Maximalmoment ist.

Die jeder Stellung entsprechende Schubkraft findet sich dadurch, dass man die Schlusslinien i parallel in die Kräfteplanzeichnung überträgt, i schneidet dann auf uv die jedesmal entsprechenden Reaktionen ab.

Die Schubkräfte lassen sich aber auch noch in andere graphostatische Beziehungen bringen*).

Fig. 537.



In Fig. 537 greift P rechts von der Mitte des Trägers an, die Schubkraft innerhalb Am erhält den Wert V = A, das ist nach Gl. 70

$$V = P\frac{l-x}{l} = P\left(1 - \frac{x}{l}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (72)$$

Greift P links von der Mitte an, so wird die Schubkraft in der Mitte

$$V = A - P = P\frac{l-x}{l} - P = -\frac{Px}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (72a)$$

In beiden Fällen lassen sich diese Gleichungen, wie uns bekannt, durch gerade Linien darstellen.

In Gl. 72 kann V nie negativ werden, weil für x = o, V = P, und für x = l, V = o wird. Gl. 72a wird stets negative Resultate liefern; für x = o wird hier auch V = o.

In dem Abschnitt über belastete Träger, I. Band S. 108 u. f., haben wir bereits auf die positiven und negativen Werte der Vertikalkräfte hingewiesen.

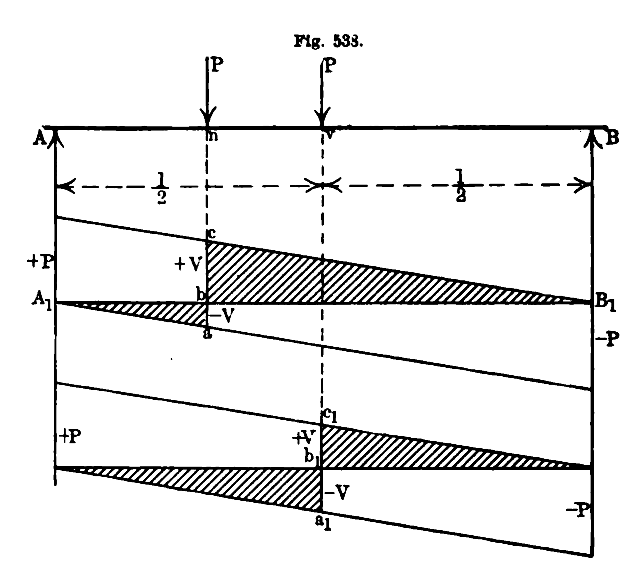
Um diese geraden Linien darzustellen, genügt es die vorstehenden Grenzwerte aufzutragen, man erhält dann die auf $A_1 B_1$, Fig. 538, ge-

*) Vgl. Müller-Breslau, Graphostatik. Leipzig, Baumgärtner's Buchhandlung.

zeichneten Werte. Wirkt die Kraft P in n, so stellen die Ordinaten bc und ab die Schubkräfte in A_1 und B_1 bezw. in A und B dar. Wirkt P in der Mitte v, so stellen die in der unteren Figur mit $a_1 b_1$ und $b_1 c_1$ bezeichneten Ordinaten die Maximalwerte von A und B dar,

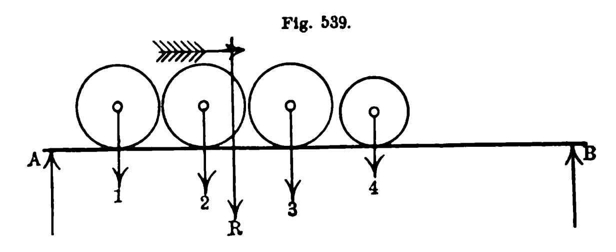
$$A = B = \frac{P}{2} \cdot = \pm V.$$

Fig. 538.



In Fig. 539 liegen eine Reihe von Einzellasten in gleichbleibender Entfernung auf dem Träger. Ersetzen wir dieselben durch ihre Mittelkraft R, so haben wir bereits im I. Band Andeutungen gemacht, dass die Lage derselben sich meist in der Nähe des gefährlichen Querschnittes

Fig. 539.

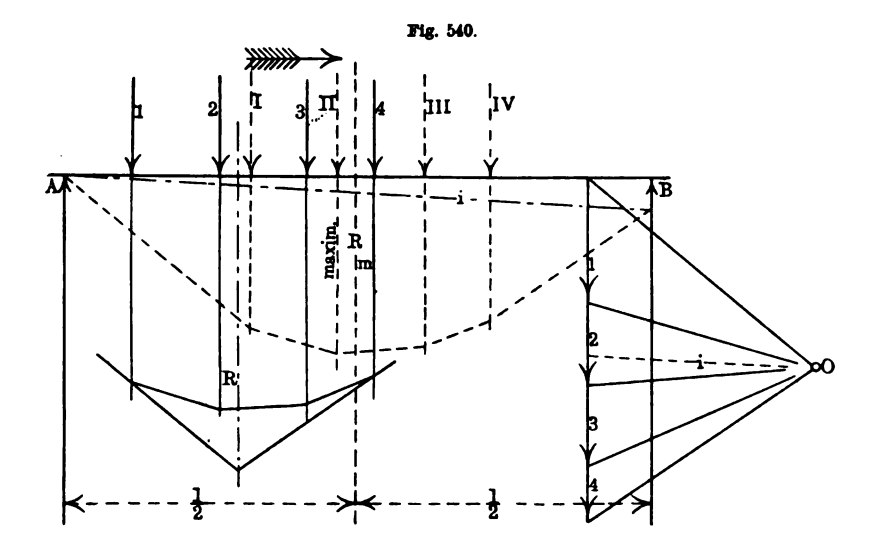


bewegt, bei den in den Fig. 139, 140, S. 118 Band I, belasteten Balken fällt die Mittelkraft mit der Lage des gefährlichen Querschnittes zusammen. Bewegen wir nun die obige Gruppe von Kräften in Richtung des Pfeiles über den Träger — beispielsweise eine Lokomotive, deren Trieb-

räder beliebig belastet sind — so können wir die Gruppe durch ihre Mittelkraft ersetzen, diese als Einzelkraft wird offenbar in der Mitte des Trägers das grösste Moment erzielen; von der Mitte aus haben wir die einzelnen Kräfte dann nur in den gegebenen Entfernungen wieder zu verteilen.

In Fig. 540 ist dieser Grundgedanke durchgeführt. Die Resultierende R der gegebenen Kräfte 1, 2, 3, 4 suchen wir zunächst durch ein

Fig. 540.



Seilpolygon mit dem Pol O, übertragen R nach der Mitte, nach R_m und finden für den Träger AB als ungünstigste Lage beim Überschreiten die Verteilung I II III IV; der gefährliche Querschnitt des Trägers liegt sonach in II, wo das Moment ein Maximum wird, die Schlusslinie i des parallel übertragenen Seilpolygons liefert schliesslich die der ungünstigsten Lage entsprechenden Auflagerwerte.

Es sei, Fig. 541, eine beliebige Gruppe über den Träger schreitende Kräfte angenommen, ihre Resultierende sei R, diese fällt zwischen 2 und 3. Das Maximalmoment kann sonach nur in den Angriffspunkt der Kräfte 2 oder 3 fallen, nach n oder o.

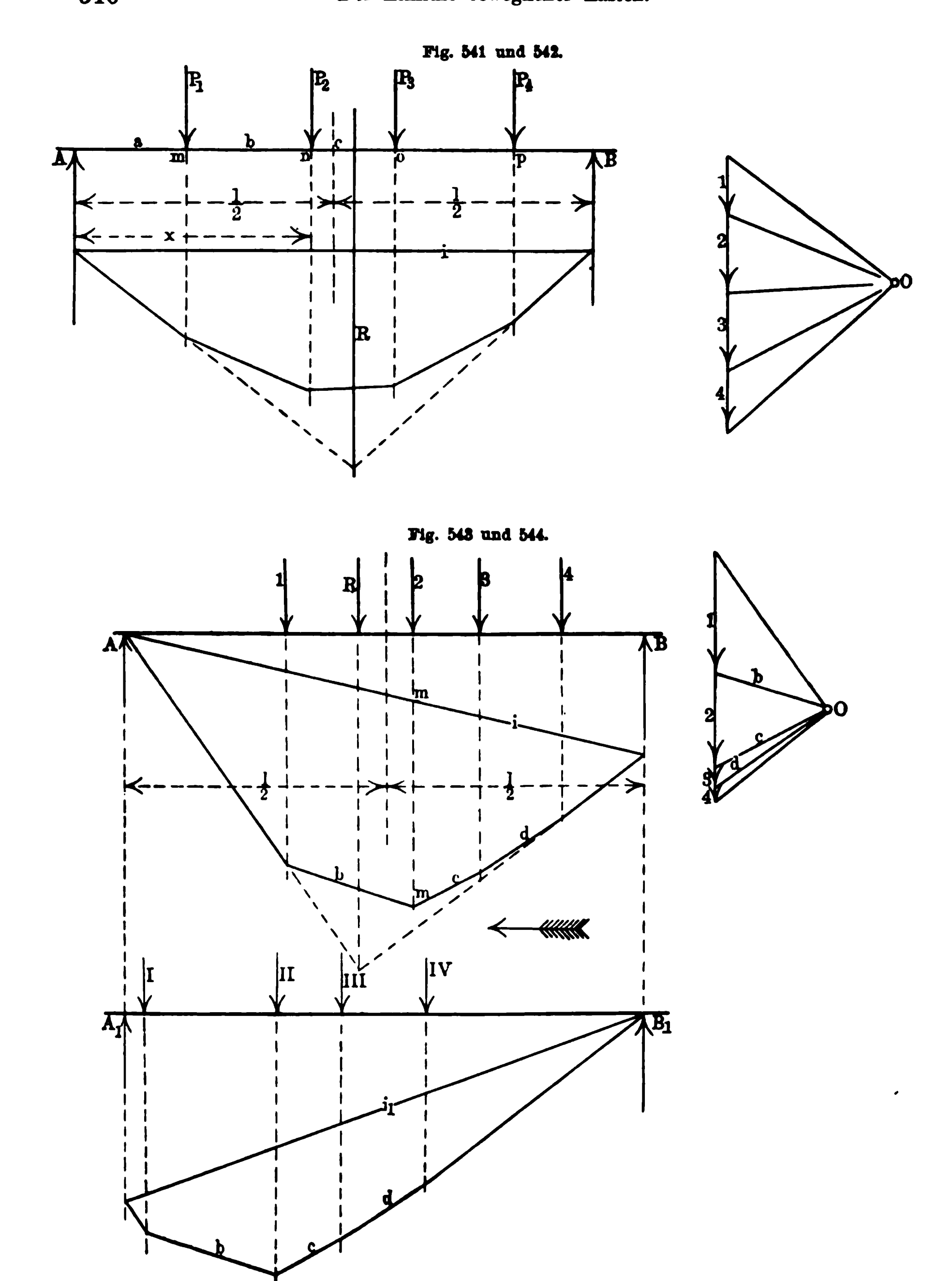
Das Moment in n ist $M_n = Ax - P_1 b$.

Da nun aus $Al = R[l - (x + c)]$ der Auflagerdruck

$$A = \frac{R}{l}(l - x - c)$$

folgt, so erhält die obige Momentengleichung den Ausdruck

Fig. 541 und 542.



$$M_n = \frac{R}{l}(l - x - c)\,x - P_1 b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (73)$$

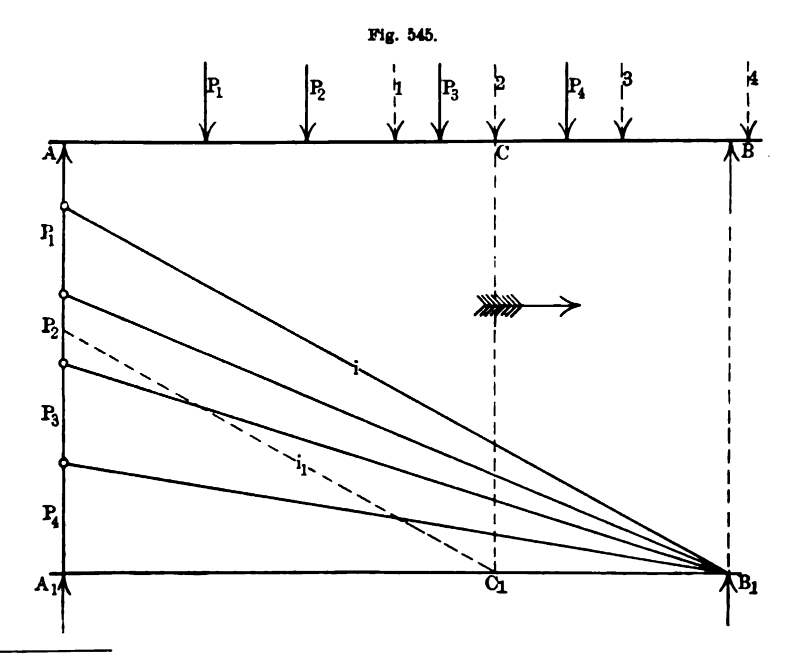
Diese Gleichung liefert den grössten Wert für M, wenn*)

$$x = \frac{l - c}{2} = \frac{l}{2} - \frac{c}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74)$$

Die Trägermitte muss also zwischen P_2 und R liegen; in dieser Lage: wenn also eine bestimmte Last aus der Gruppe von der Trägermitte so weit entfernt liegt als die Mittelkraft der sämtlichen Lasten, so wird das Moment an dieser Laststelle den grössten Wert erhalten.

Die Kräftegruppe, Fig. 543, schreitet in Richtung des Pfeiles über den Träger, ihre Resultierende R liegt zwischen der ersten und zweiten Kraft; die für den Träger ungünstigste Stellung ist in der oberen Figur gezeichnet, sie liefert das Moment m m, welches zugleich das ungünstigste des Trägers ist. In der unteren Figur ist die Gruppe weiter fortgeschritten

Fig. 545.



*) Die Gl. $\frac{d}{dx}\left\{\frac{R}{l}(l - x - c)\,x - P_1 b\right\} = o$ liefert zunächst $\frac{d}{dx}[lx - x^2 - cx] = o$, diese Gl. ergiebt $l - 2x - c = o$, woraus $x = \frac{1}{2}(l - c)$.

und ist die erste Kraft $P_1 = I$ nahe im Auflager A angelangt; durch parallele Übertragung des Seilpolygones übersieht man, dass die Momente viel kleiner werden, als in der ungünstigsten obigen Stellung.

Die folgende Konstruktion von Weyrauch zeigt ein Verfahren, um das grösste Moment festzustellen, welches durch eine bestimmte Stellung erzeugt wird.

Die Lasten $P_1\,P_2\,P_3\,P_4$, Fig. 545, bewegen sich in Richtung des Pfeiles auf AB. Um nun zu bestimmen, welche von diesen Lasten über dem bestimmten Punkt C stehen muss, um das grösste Moment in C zu erzeugen, trägt man senkrecht in A_1 auf $A_1\,B_1$ in umgekehrter Reihenfolge die gegebenen Belastungen $P_4 \ldots P_1$ an und verbindet die Endpunkte mit B_1. Projiziert man C auf die Linie $A_1 B_1$ und zieht i_1 parallel i durch C_1, so trifft i_1 die Kraftlinie P_2. Wird das Lastsystem nun so verschoben, dass P_2 über C steht, so erreicht das Moment in C sein Maximum, welches dann in bekannter Weise konstruiert werden kann.

Eine Konstruktion der Schub- oder Querkräfte V beim Überschreiten einer Gruppe von Lasten über einen Träger ist in der folgenden Fig. 546 ausgeführt*). Es sollen die grössten Schubkräfte der Lastengruppe $P_1 \ldots P_4$ beim Überschreiten über AB für die verschiedenen Trägerquerschnitte festgestellt werden. Wir setzen hierbei voraus, dass von den ursprünglich gegebenen Lasten nur die Lasten $P_1 \ldots P_4$ auf den Trägern Platz finden. Man trägt dieselben in A_1 senkrecht auf $A_1\,B_1$ auf, benutzt B_1 als Polpunkt, und konstruiert das Seilpolygon 0 I II III IV, indem man ab als erste Seite horizontal annimmt; die Kräftelage $P_1 \ldots P_4$, von B_1 an beginnend, ist hierbei die umgekehrte wie auf AB. Jede Ordinate des Seilpolygones in der Begrenzung ab und bc liefert die grösste positive Schubkraft, $+V$ für den darüber liegenden Trägerquerschnitt. Die grösste Schubkraft des Querschnittes in P_1 ist $+V$. Trägt man die Trägerentfernung $\lambda = AC$ von der Kraft P_1 bis A von B aus ab, so stellt die unter diesem Punkt d liegende Ordinate, $-V$, die negative Schubkraft dar, welche dem Querschnitt in P_1 entspricht.

Die Konstruktion in Fig. 547 zur Bestimmung der grössten positiven Schubkraft in C schliesst sich den früheren an.

Man lagert die Lastengruppe $P_1 \ldots P_4$, welche auf dem Träger AB noch Platz hat, so, dass P_1 auf C liegt und die linke Seite AC un-

*) Nach Müller-Breslau, Graphostatik.

Fig. 546.

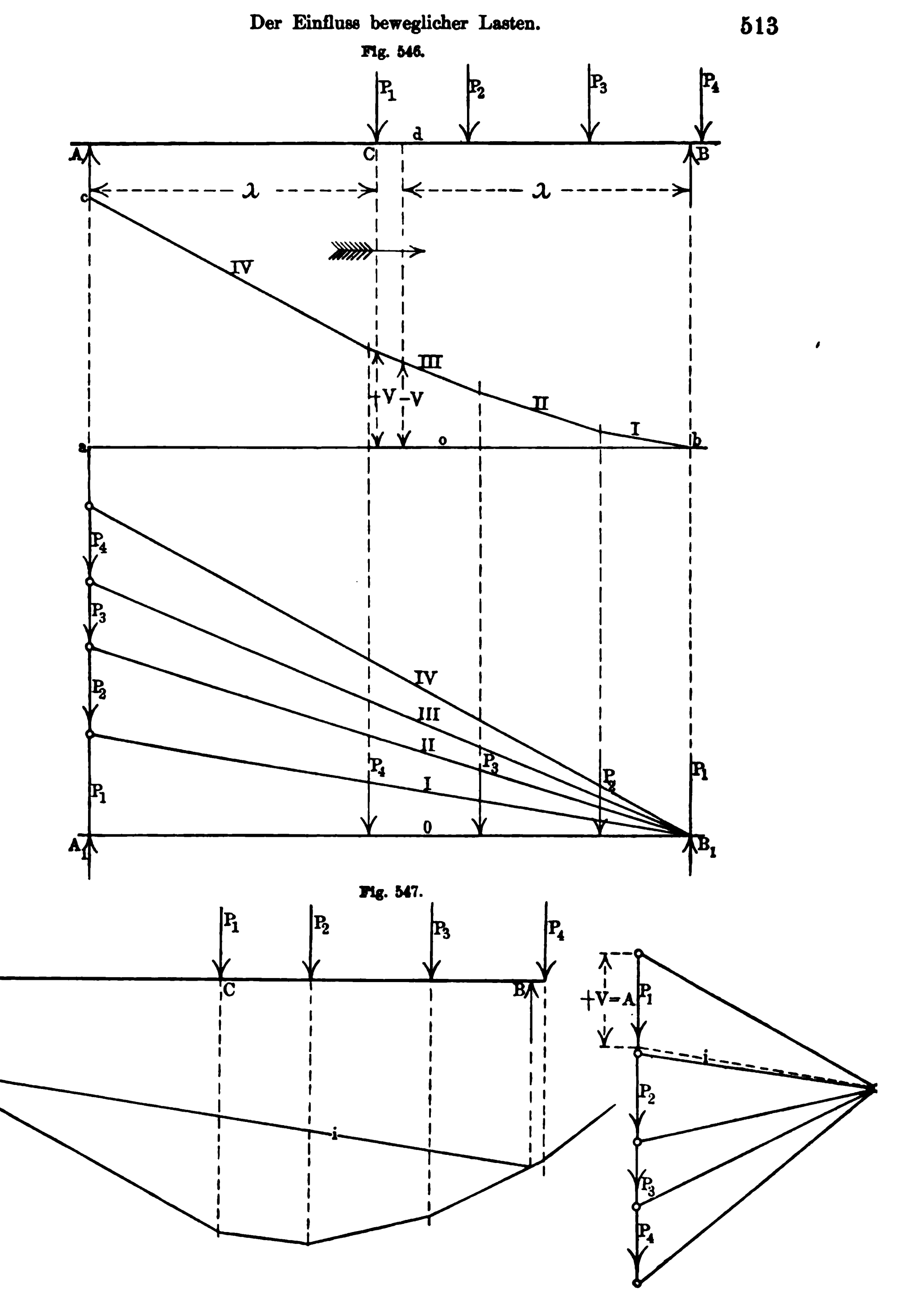


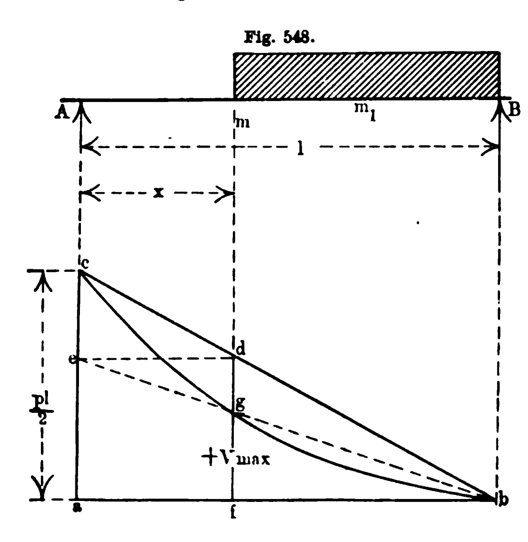
Fig. 547.

belastet ist. Man konstruiert ferner ein Seilpolygon, überträgt die Schlusslinie i parallel durch O, so schneidet diese $A = + V$ die grösste Schubkraft, welche dem Querschnitt in C entspricht, ab.

Die Fig. 546 und 547 liefern das gleiche Resultat, weil die Annahmen dieselben sind.

Bei einer gleichmässig verteilten Belastung ist die Bestimmung der Schubkräfte gleichbedeutend mit der Konstruktion des Auflagerdruckes.

Fig. 548.



In Fig. 548 ist die Last bis m vorgeschoben, die Spannweite ist l, die veränderliche Entfernung des Auflagers A von m ist x.

Aus der dem Punkt m entsprechenden Auflagergleichung

$$A l = q(l - x)\frac{l - x}{2}$$

folgt

$$A = \frac{q(l - x)^2}{2l} = V_{max} \quad (75)$$

A stellt uns zugleich die grösste Schubkraft im Querschnitt m dar.

Diese Gleichung bedeutet wieder eine Parabel, für

$$x = l \text{ folgt } A = V = o, \text{ für } x = o, A = V = \frac{ql}{2}.$$

Die Konstruktion kann in dem Sinne der Fig. 299 durchgeführt werden, da die Gl. 31 S. 263 nur die umgekehrte Lage der Belastung obiger Figur darstellt.

Die Bogenpunkte der Parabel findet man aber auch durch die in Fig. 548 angedeutete Konstruktion.

Man trägt $ac = \frac{ql}{2}$ auf, zieht cb, schneidet durch die Senkrechte md in d ein, zieht de parallel ab und verbindet e mit b, welche Linie in g einen Bogenpunkt liefert.

In den $\triangle$ abe und fgb verhält sich

$$fg : ae = (l - x) : l \text{ und weil } ae = fd$$

$$fg : fd = (l - x) : l, \text{ woraus}$$

$$\frac{fg}{fd} = \frac{l - x}{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Ferner verhält sich $fd : ac = (l - x) : l$, sonach folgt

$$\frac{fd}{ac} = \frac{l - x}{l} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (b)$$

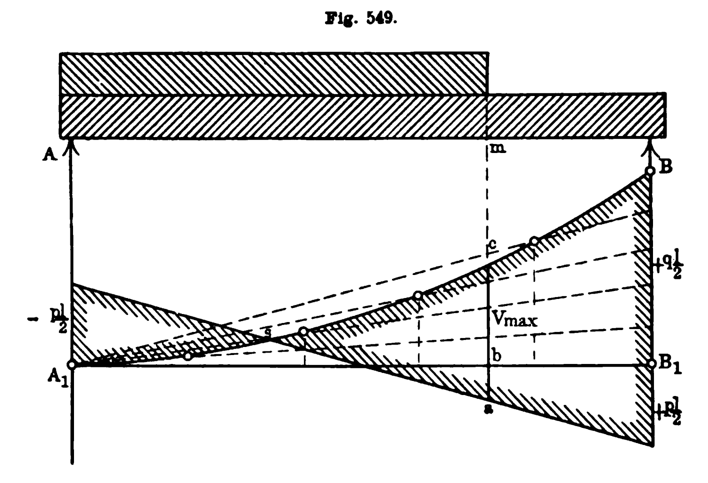
beide Gleichungen miteinander multipliziert, erhält man

$$\frac{fg}{ac} = \left(\frac{l - x}{l}\right)^2; \text{ da nun } ac = \frac{ql}{2}, \text{ so wird}$$

$$fg = \frac{ql}{2}\left(\frac{l - x}{l}\right)^2 = \frac{q(l - x)^2}{2l} = V_{max}.$$

Trägt man $Am = x$ nach Bm_1, so ist die unter m_1 liegende Ordinate V_{min}, bezw. Fig. 299, die Auflagerreaktion in B, wenn die Last von B bis m vorgeschritten ist.

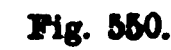
Fig. 549.

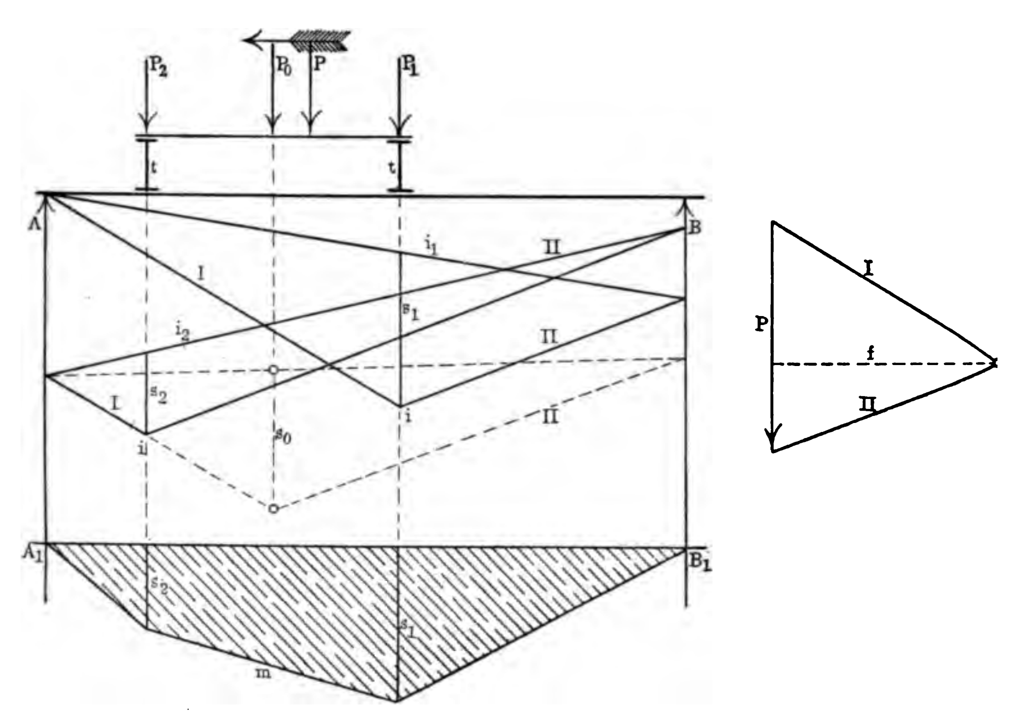


In Fig. 549 wirken eine gleichmässig verteilte Last p, das Eigengewicht des Trägers mit einer Verkehrslast q kg auf d. lauf. m zusammen auf den Träger AB ein.

Die Vertikalkraft der gleichmässig verteilten Last auf den ganzen Träger tragen wir, da ihre Verteilung einer geraden Linie entspricht, als $\pm \frac{pl}{2}$ beiderseitig in A_1 und B_1 an; hierzu die Abschlusslinie der oberen Verkehrslast $A_1 s c B$ als Parabel (Fig. 299 und 548), so ergeben sich durch die Ordinatenzusammensetzungen die Schubkräfte. Die Schubkraft in der Lage m ist $ab + bc = V_{max}$, diejenige Vertikalkraft, welche als positiv gedacht in B wirkt. Die Vertikalkräfte von s aus nach links werden negativ. (In der Figur ist der Buchstabe c in dem Parabelschnittpunkt etwas tiefer zu setzen.) —

Der Träger AB, Fig. 550, ist unmittelbar durch die beiden T Träger tt mit P belastet, P bewegt sich in Richtung des Pfeiles auf den oberen Träger, es sollen die Momente festgestellt werden. Wie uns aus Fig. 528 bekannt ist, erhalten wir die grössten Momente, wenn P in die Stellungen P_1 und P_2 gelangt; aus dem Seilpolygon ergeben sich hierfür die Werte s_1 und s_2. Trägt man diese Ordinaten an $A_1 B_1$ in der betreffenden


Fig. 550.



Stelle an, so erhält man die Begrenzung $A_1 m B_1$, aus welcher man alle anderen Ordinaten entnehmen kann.

Wenn P ohne Rücksicht auf die T Träger in der Mitte derselben unmittelbar auf AB steht, so hat das zugehörige Moment die Grösse s_0, welches in unserem Falle kleiner als s_1 ist. Der Einfluss der beweglichen Last ist durch die Träger t somit leicht zu übersehen. Mit Rücksicht auf den Polabstand f lassen sich die Momente wie in den früheren Beispielen berechnen.

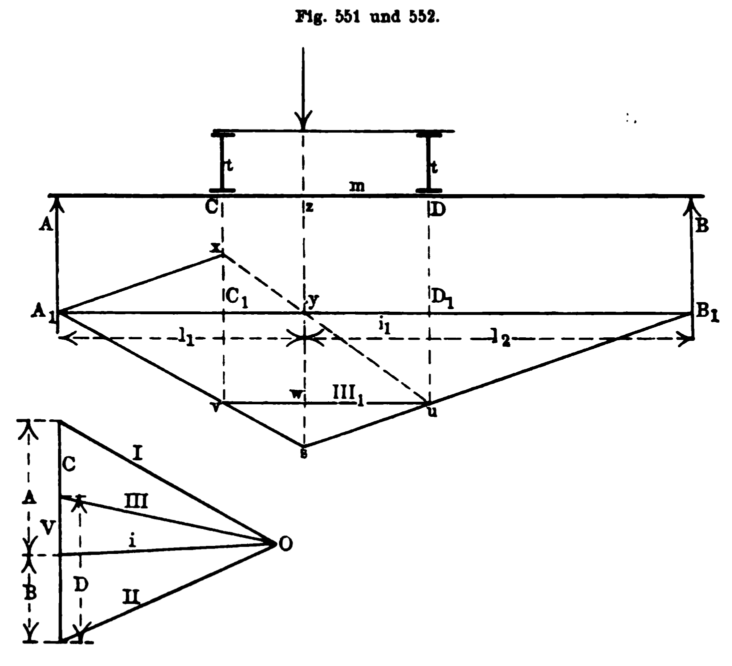
Die ungünstigste Stellung ist überhaupt die Mittelstellung, sowohl

die der T Träger als die der Last P auf dem oberen kleinen Träger, diese Mittelstellung dürfte den grössten Einfluss auf den Balken AB ausüben.

Die Bestimmung der Schubkräfte bei der indirekten Belastung durch eine bewegliche Einzellast erfordert wieder eine besondere Betrachtung.

Bei der ruhenden Einzellast P, Fig. 528, haben wir durch Vermittelung der Seilpolygonlinie III die durch das Seilpolygon gefundenen Auflager A und B in die beiden Trägerreaktionen C und D geteilt.

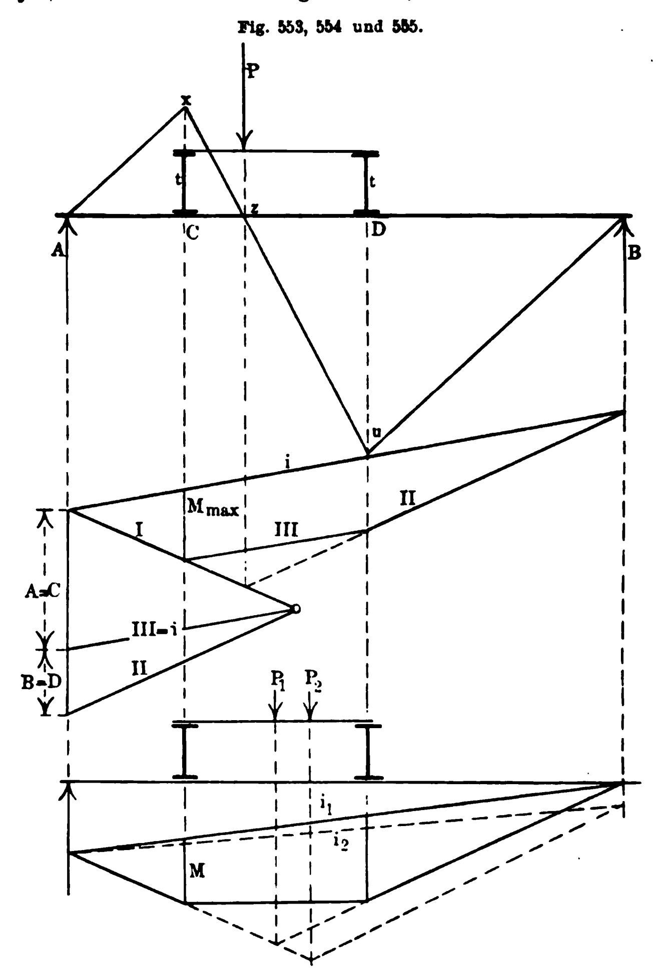
Fig. 551 und 552.



Die Schubkraft im linken Träger t ist V = A — C, sie ist in Fig. 552 eingetragen, und liegt zwischen den Linien i und III. Die Schubkraft in C, also auch die innerhalb CD, wird nun Null, wenn die Linien III und i zusammenfallen, wenn also, wie in Fig. 551, III_1 parallel i_1. Es kommt nun wesentlich darauf an, die Stellung von P innerhalb CD zu finden, bei welcher die Schubkraft in C Null wird, bei welcher also in C ein grösstes Moment vorhanden ist; es ist dies offenbar von Belang, sowohl für einfache als auch für Fachwerksträger, da im letzteren Falle die Verteilung der Zug- und Druckstreben in Betracht kommt (s. die folgenden Beispiele); man kann dann sofort diejenige Lage der beweglichen Last feststellen, bei welcher das grösste Moment vorhanden ist.

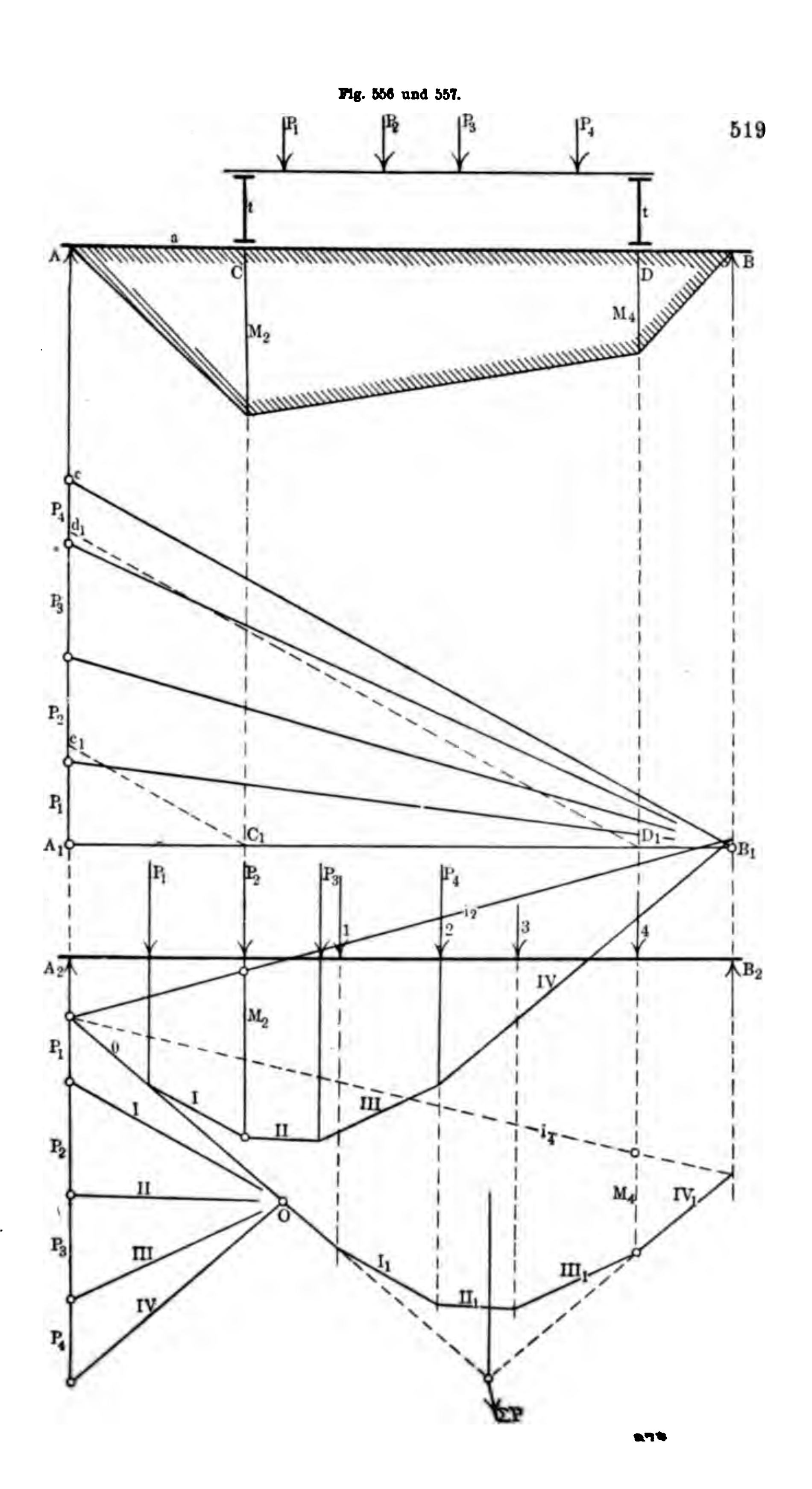
Zieht man, Fig. 551, $A_1 B_1$ oder i_1 parallel AB und durch C und D zwei senkrechte Linien; zieht man ferner die Linie $A_1 v s$ unter einem beliebigen Winkel, vu oder III_1 parallel $A_1 B_1$, so ist der Schnittpunkt u in der Geraden $s B_1$ bestimmt. Durch s zieht man dann die Senkrechte swyz, diese liefert die Lage von P, für welche die Vertikalkraft

Fig. 553, 554 und 555.



in CD Null wird. Man nennt diese Lage, bezw. den Punkt z die Belastungsscheide. Die Vertikal- oder Schubkraft wechselt in derselben ihr Vorzeichen, eine Belastung rechts von sz erzeugt eine positive, eine links von z eine negative Schubkraft. Die Konstruktion der Belastungsscheide lässt sich durch die folgende Betrachtung vereinfachen.

Fig. 556 und 557.



Zieht man durch die Schnittpunkte u und y die Linie uyx, Fig. 551, und verbindet x mit A_1, so sind zunächst die Dreiecke C_1yx und D_1yu ähnlich; es verhält sich

$$C_1x : D_1u = C_1y : D_1y$$

und wegen III_1 parallel i_1,

$$C_1x : D_1u = vw : uw.$$

In dem $\triangle A_1ys$ und B_1ys verhalten sich ferner

$$vw : l_1 = uw : l_2 \text{ oder } vw : uw = l_1 : l_2,$$

sonach ergiebt sich die Proportion $C_1x : D_1u = l_1 : l_2$.

Ferner verhält sich $C_1x : D_1u = xy : yu$, sonach auch

$$l_1 : l_2 = xy : yu,$$

das ist aber nur möglich, wenn A_1x parallel su ist.

Hiernach ergiebt sich die folgende einfache Konstruktion der Belastungsscheide*).

Man zieht, Fig. 553, durch die Auflager A und B die beliebigen parallelen Linien Ax und Bu. Die Verbindungslinie xu der Schnittpunkte der Senkrechten auf C und D kreuzen den Hauptträger AB in z, welcher Punkt die Lage der Belastungsscheide ist.

Wir haben in Fig. 554 das Moment in C für diese Lage konstruiert, in Fig. 555 die Kraft P nach P_1 in die Mitte des Nebenträgers und nach P_2 gerückt, in beiden Fällen wird M kleiner. Die Schubkräfte in C und innerhalb CD werden in Fig. 553 und 554 Null, während sie für Fig. 555 durch Übertragung der Schlusslinie i_1 bezw. i_2 in den Kräfteplan Fig. 554 aus der Zeichnung entnommen werden können. —

Lassen wir ferner eine Gruppe von Einzelkräften, bezw. Einzellasten, z. B. einen Eisenbahnzug über einen Träger sich bewegen, $P_1 P_2 P_3 P_4$, Fig. 556, welcher durch Querträger t auf einem Hauptträger AB ruht, es ist dies also eine mittelbare oder indirekte Belastung einer Gruppe Einzelkräfte, so handelt es sich zunächst um die Bestimmung der Momente, nach welchen der Hauptträger zu berechnen ist.

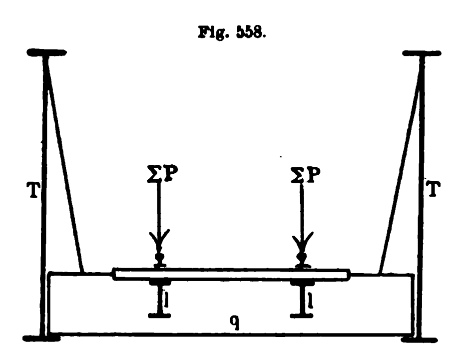
Eine derartige Belastungsart tritt bei allen Brückenkonstruktionen ein, über welche sich Verkehrslasten bewegen; wie dies aus Fig. 558 zu ersehen ist.

Die beiden Hauptträger T_1 werden durch Querträger q in 2 bis 4 m Entfernung verbunden, zwischen diesen sind Längsträger l eingenietet, auf diesen ruhen unmittelbar durch Langschwellen oder mittelbar durch Querschwellen die Eisenbahnschienen, welche die Verkehrs-

*) S. u. a. auch: Lauenstein, Graphische Statik. Stuttgart, Bergsträsser.

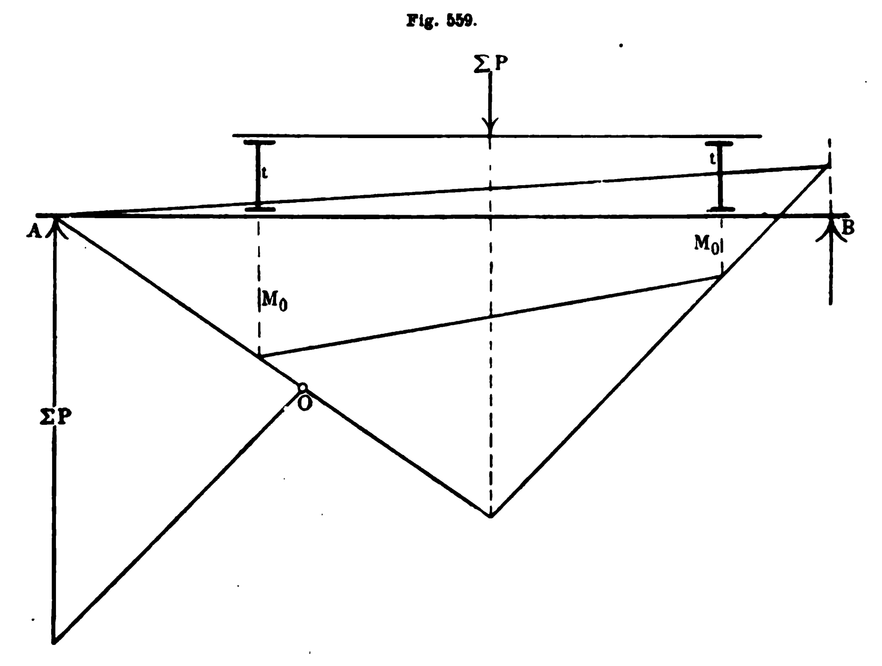
lasten aufnehmen. Die Belastung der Querträger und Längsträger ist also eine mittelbare, in demselben Sinne sind auch die Hauptträger belastet, die Belastung der Längsträger ist event. eine unmittelbare.

Fig. 558.



Zur Konstruktion der Momente, Fig. 557, haben wir das in Fig. 545 angegebene Verfahren verwendet.

Fig. 559.



Wir tragen die gegebene Kräftegruppe $P_1 \ldots P_4$ auf die Trägerhilfslinie $A_1 B_1$ auf und ziehen die Verbindungslinien der Endpunkte mit B_1; wesentlich ist die letzte Verbindungslinie $B_1 c$. Wir projizie-

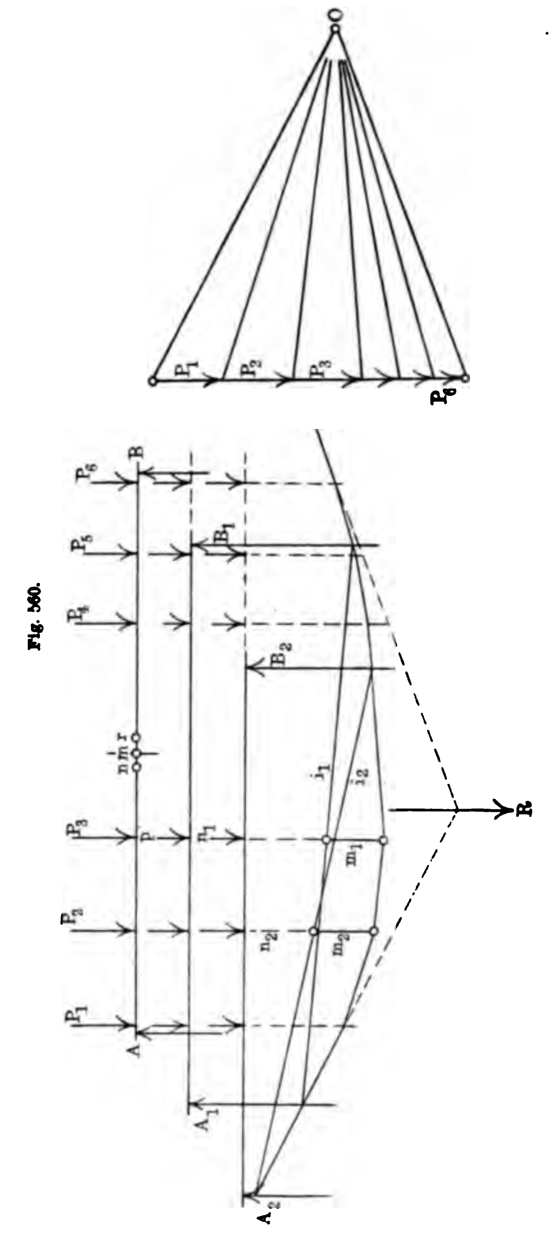


Fig. 560.

ren ferner die Angriffspunkte C und D der Träger t t nach C_1 und D_1 und ziehen die Linien $C_1\,c_1$ und $D_1\,d_1$ parallel der Linie $B_1\,c$. Die erstere $C_1\,c_1$ trifft die Kraft P_2, $D_1\,d_1$ die Kraft P_4. Stellen wir die Gruppe $P_1 \ldots P_4$ nun so über AB, dass P_2 in die Lage C kommt, wie in Fig. 557 ausgeführt ist, und konstruieren das zugehörige Seilpolygon 0 I II III IV, so liefert uns die Schlusslinie durch die Momentenordinate das Moment M_2 an dieser Stelle.

Stellen wir ferner die Gruppe so auf AB, dass P_4 auf D zu stehen kommt, so liefert das zugehörige Seilpolygon 0, I, II, III, IV das grösste Moment für t in D.

Beide haben wir in den Hauptträger AB übertragen und erhalten somit die Maximalmomentenfläche, auf welche der Hauptträger zu berechnen ist; die Momente selbst finden sich durch den zu Grunde gelegten Polabstand.

Zur Vergleichung haben wir in Fig. 559 die Summe der Kräfte

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = \Sigma P$$

unter Beibehaltung desselben Polabstandes in der Mitte des Nebenträgers

zwischen tt angreifen lassen, und die Momente im Sinne der unbeweglichen mittelbaren Last, Fig. 528, konstruiert; es ergiebt sich, da die gleichen Längenverhältnisse zu Grunde gelegt sind, dass die Momente M_0 in C und D kleiner werden als bei der beweglichen Lastengruppe, wie dies vorauszusehen war, da die Konstruktion in Fig. 556 die Maximalmomente liefert.

Beispiele. I. Ein Träger von 12 m Spannweite ist mit 6 Druckkräften belastet, Fig. 560, etwa eine Lokomotive mit

$$P_1 = P_2 = P_3 = 15 \text{ tons und } P_4 = P_5 = P_6 = 7{,}5 \text{ tons}$$

Belastung. Es haben alle 6 Lasten Raum auf dem Träger. Man sucht zunächst mit Hilfe eines Seilpolygones die Resultierende R, ihren kleinsten Abstand von P_3 der zunächst liegenden Kraft ergiebt die Zeichnung. Mit Rücksicht auf die Mitte m des Trägers (vgl. S. 511) tritt das grösste Moment ein, wenn P_3 nach n verlegt wird, so dass P_3 von m in derselben Entfernung wie R von m zu liegen kommt; die Resultierende R würde dann nach r fallen. Verschiebt man nun die Lastgruppe um pn oder richtiger den Träger um pn nach links in die Lage $A_1 B_1$, so kommt P_6 nicht mehr auf den Träger zu liegen, das in Betracht kommende Moment mit der Schlusslinie i_1 ist dann m_1. In derselben Weise kann man die Betrachtung für 4 Lasten auf den Träger durchführen; wir haben sie in der Figur für 3 Lasten durchgeführt, und zwar haben wir angenommen, dass die 3 grössten Lasten $P_1 P_2 P_3$ auf dem Träger stehen, und zwar P_2 in der Mitte. Eine Resultierende zu suchen, ist dann nicht erforderlich; man erhält das Moment m_2; das ist allerdings grösser als m_1, daraus ergiebt sich, unter der Voraussetzung, dass 4 Lasten $P_1 P_2 P_3 P_4$ kein grösseres Moment liefern, welche Untersuchung wir nicht durchgeführt haben, dass die Stellung von $P_1 P_2 P_3$ in der Trägermitte den Träger am meisten beansprucht. Bei dem gewählten Polabstand $f = 7{,}5$ findet man

$$M_{max} = m_2 f = 125000 \cdot 7{,}5 = 93750 \text{ kgm.}$$

Hat die Gruppe der Kräfte eine geringe Ausdehnung im Verhältnis zur Spannweite des Trägers, um so mehr kann man die Resultierende derselben in der Mitte des Trägers angreifen lassen und deren Moment als Maximalmoment verwerten. Je grösser die Ausdehnung der Gruppe, um so vielseitigere Stellungen auf dem Träger sind denkbar, jede dieser Stellungen ist dann in Bezug auf ihr Maximalmoment zu untersuchen; da man immer wieder dasselbe Seilpolygon, bezw. denselben Kräfteplan verwenden kann; indem nicht die Gruppe, sondern der Träger selbst verschoben wird, so ist die Ausführung der Konstruktion nicht so verwickelt.

II. In Fig. 561 liegt derselbe Träger zunächst auf Querträgern und diese ruhen auf dem Hauptträger A B. Die Kräftegruppe 1 6

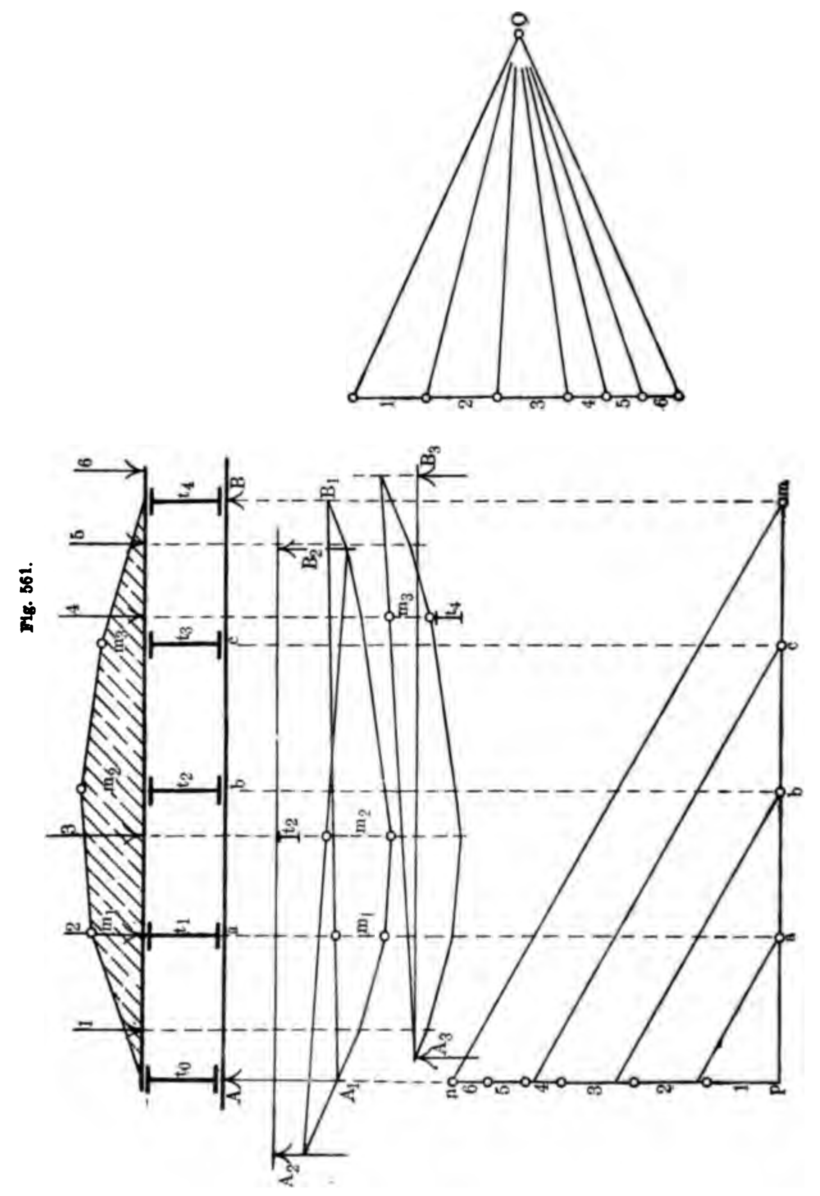


Fig. 561.

belastet also den Hauptträger mittelbar, indirekt. Um beim Überschreiten der Lastengruppe die grösste Momentenfläche zu ermitteln, tragen wir

die Kräftegruppe $pn = 1 \ldots 6$ senkrecht an die Horizontale pm, welche der Trägerlänge entspricht, an. Da nur die Schlusslinie mn massgebend ist, so haben wir nicht nötig, die einzelnen Kräfteendpunkte mit m zu verbinden, wie z. B. in Fig. 556, sondern projizieren die Querträgerlagen $t_1 t_2 t_3$ nach unten, und ziehen von den Punkten a, b, c aus Parallele zu mn, welche die Kräfte 2, 3 und 4 schneiden; das heisst, wenn wir die Last 2 auf t_1 verschieben, so erhalten wir für den Querträger t_1 das grösste Moment, wenn wir Last 3 auf t_2 und Last 4 auf t_3 verschieben, so finden wir für t_2, bezw. t_3 die grössten Momente.

Das der ersten Verschiebung entsprechende Seilpolygon ist mit $A_1 B_1$ bezeichnet, es liefert für t_1 das Moment m_1; die zweite Verschiebung, Last 3 auf t_2, entspricht dem Träger $A_2 B_2$ und dem grössten Moment m_2 für t_2. Die dritte Verschiebung Last 4 auf t_3, durch den Träger $A_3 B_3$ dargestellt, ergiebt das Moment m_3. Diese 3 Momente sind in die Hauptfigur übertragen, die Verbindungslinien der Endpunkte. Die Einflusslinien bilden die Begrenzung der Maximalmomentenfläche, richtiger, der Einflussfläche.

Als grösstes Moment m_2 im Trägerangriffspunkt b erhält man mit Rücksicht auf den Polabstand

$$m_2 = 130000 \cdot 7{,}5 = 97500 \text{ kgm}.$$

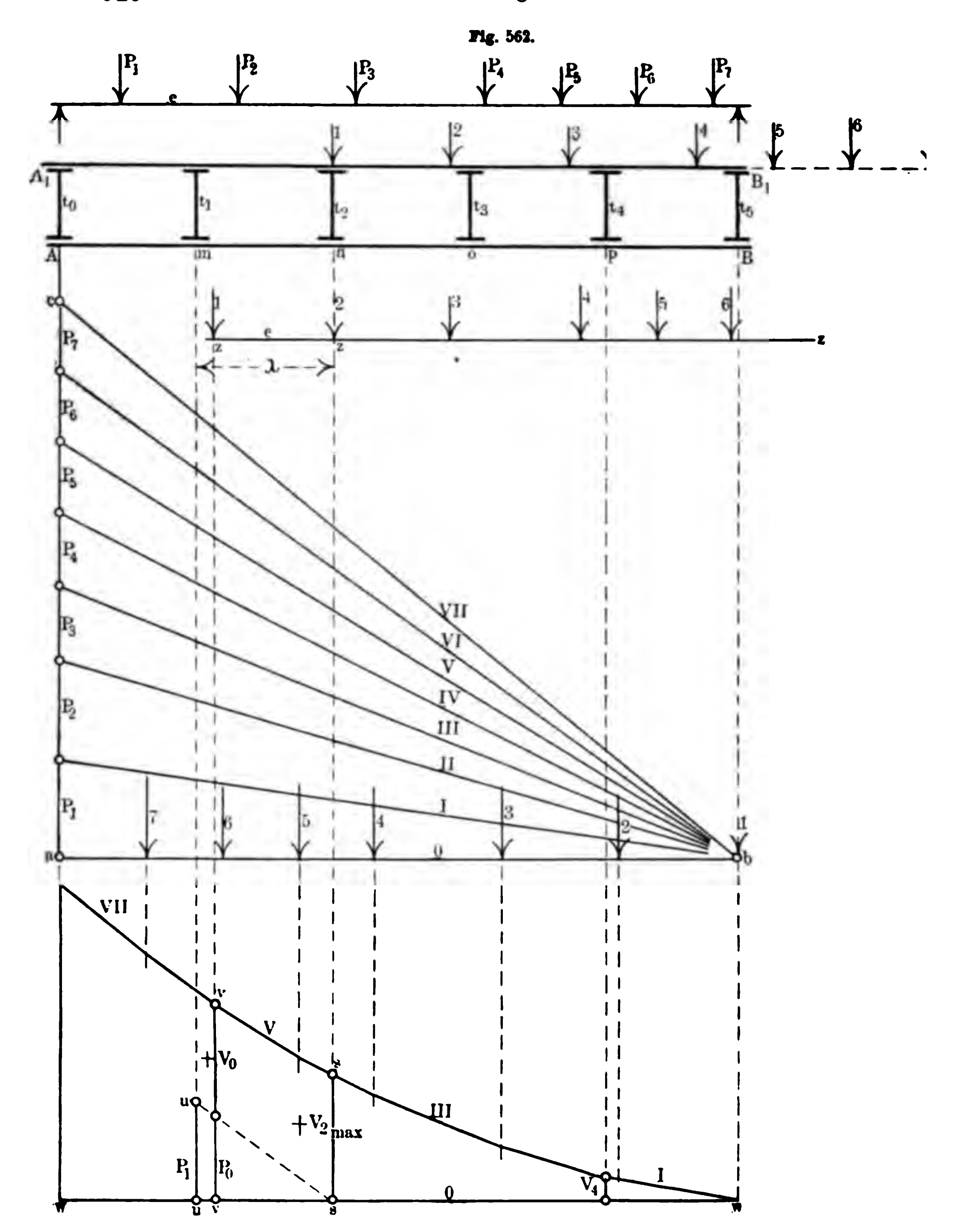
Bei der ersten Verschiebung kommt 6 nicht in Betracht, bei der zweiten sind die beiden Lasten 5 und 6 wirkungslos, bei der dritten wirkt 6 auf das Auflager B_3. —

Die graphische Konstruktion der Schub- oder Vertikalkräfte bei Gruppenlasten und mittelbarer Belastung lässt sich in der folgenden Weise ausführen.

Es sei, Fig. 562, AB der gegebene Hauptträger, $t_0 \ldots t_5$ die Querträger, auf welchen durch Vermittelung eines Nebenträgers die Gruppenlast $P_1 \ldots P_7$ sich bewegt. Die Lastengruppe behält immer die gleichen Abstände von den einzelnen Lasten und hat, wie aus der obersten Zeichnung des Trägers zu ersehen, die ganze Gruppe Raum innerhalb der Auflager AB.

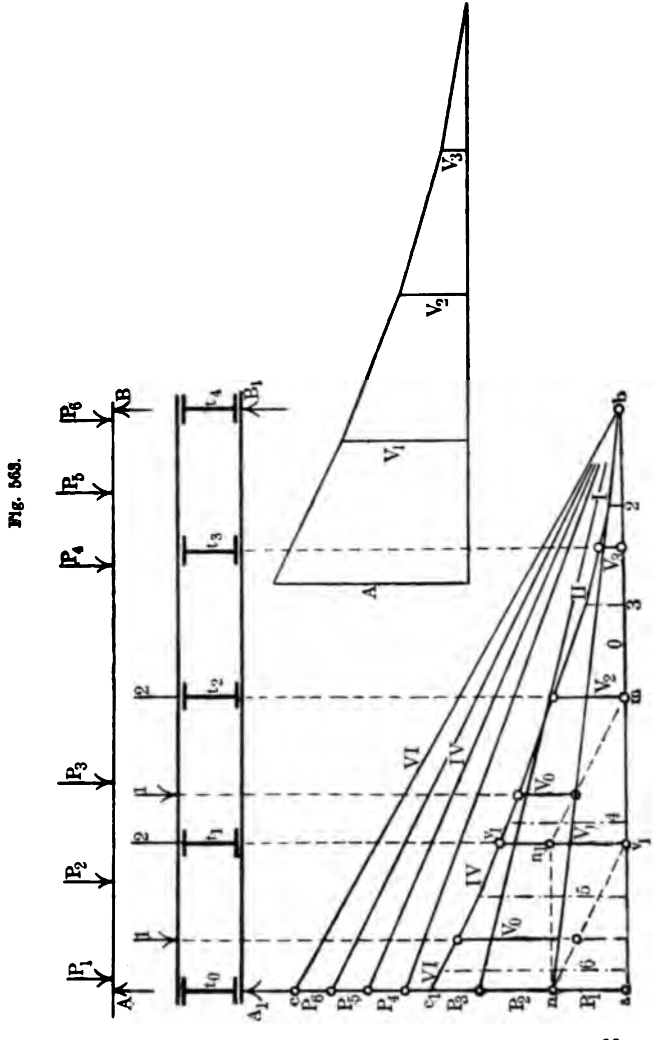
Nach der in Fig. 546 angegebenen Konstruktion tragen wir zunächst auf die Linie ab die gegebenen Kräfte, in b von 1 beginnend, namentlich in Rücksicht auf ihre Abstände auf, auf die Linie ac hingegen von a beginnend, die Kräfte in Rücksicht ihrer Stärke; b wird als Polpunkt betrachtet und es werden mit ab als Nulllinie die Seillinien I bis VII gezeichnet. Das Seilpolygon trägt man dann in dieselbe Figur innerhalb der Kräfte ein, oder, wie wir es gethan, auf eine besondere Linie

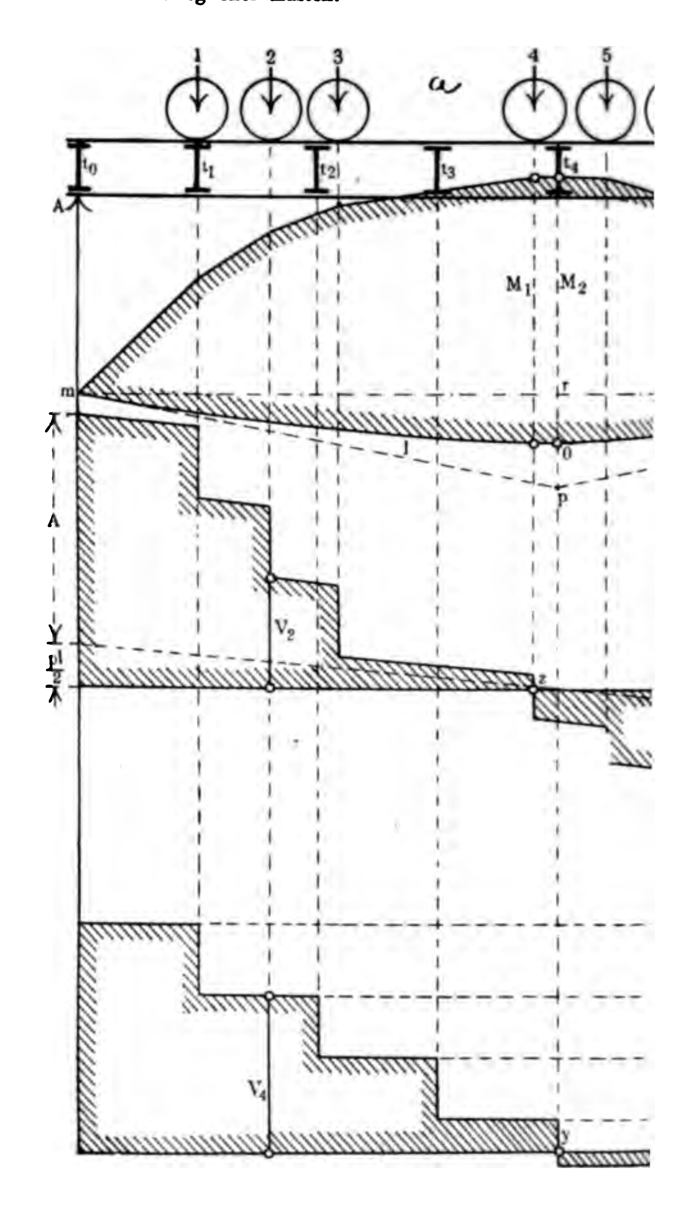
Fig. 562.


P1
P2
P3
P4
P5
P6
P7
A1
B1
t0
t1
t2
t3
t4
t5
A
m
n
o
p
B
λ
VII
VI
V
IV
III
II
I
0
+V0
+V2 max
V4
u
v
s
w
a
b
c

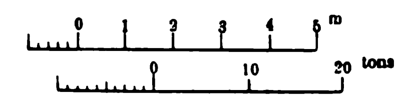
ww. Die grössten Schub- oder Vertikalkräfte für die Querträger fallen in deren Stützpunkte m, n, o, p, und zwar indem man sich die Gruppe rechts von dem betreffenden Stützpunkt mit der ersten Kraft im Stützpunkt ausgebreitet denkt. Man nennt dies die **Normalstellung.** Links von diesem Punkt ist keine Belastung vorhanden. In Wirklichkeit erhalten wir also im Stützpunkt die Auflagerreaktion, welche der Schubkraft $+ V_{max}$, wie aus dem Früheren bekannt, gleich sein muss. Die grösste Schubkraft in n für den Träger t_2 ergiebt sich dadurch, dass

Fig. 563.

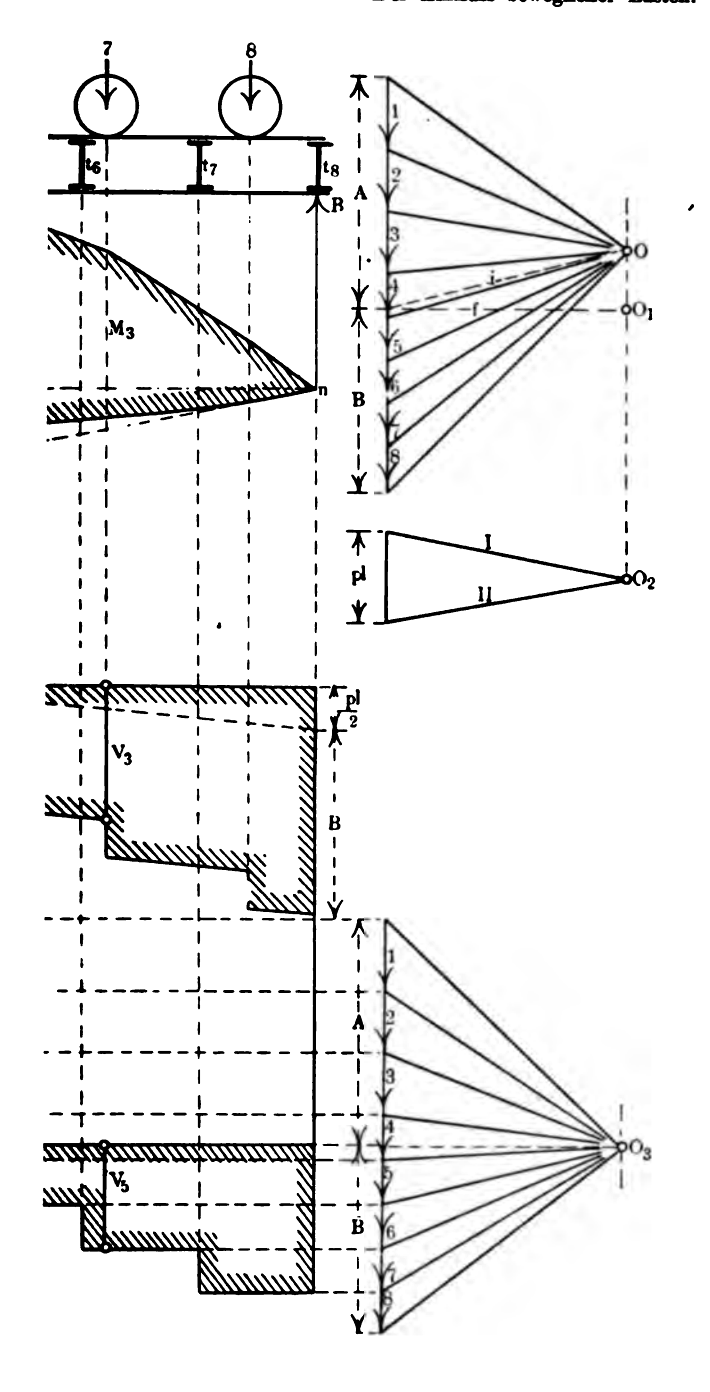




1
2
3
a
4
5
t_0
t_1
t_2
t_3
t_4
A
M_1
M_2
m
r
l
0
p
A
V_2
$\frac{p\,l}{2}$
z
V_4
y



0 1 2 3 4 5 m
0 10 20 tons


7
8
t_6
t_7
t_8
B
A
O
O_1
M_3
n
B
I
pl
II
O_2
pl
2
V_3
B
A
O_3
V_5
B

wir die Last 1, bezw. P_1, in t_2 aufstellen und uns die anschliessende Gruppe 2, 3 . . . 7 rechts verbreitet denken.

Die Schubordinate ss liefert dann $+V_{max}$. Für den Querträger t_4 würden wir seiner Normalstellung entsprechend V_4 erhalten. Um nun aber sicher zu sein, dass bei der Bewegung der Gruppe von rechts nach links, von B nach A, die Lastenstellung P_2 oder 2 auf n, bezw. auf t_2, keine grössere Schubkraft erzeugt, denkt man sich, wie in zz angedeutet, 2 auf t_2 gestellt, dadurch wird 1 um die Entfernung e weiter nach links fallen.

Bezeichnet man die Schubkraft, welche 1 auf t_1 ausübt, mit P_0, die Entfernung zwischen t_1 und t_2 mit λ, so lässt sich P_0 berechnen aus der Gleichung $P_0 \lambda = P_1 e$, es folgt

$$\frac{P_0}{P_1} = \frac{e}{\lambda} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (76)$$

Diese Gleichung lässt sich graphomathematisch ausführen, wenn man P_1 nach uu unterhalb t_1 aufträgt, die Linie us zieht und die Lage der Last 1 nach unten projiziert. P_0 ergiebt sich dann aus dem Dreieck uus.

Die senkrecht unter 1 liegende Schubkraft V_0 ist nun

$$V_0 = A_0 - P_0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (77)$$

Die Ordinate von A_0 ist aber vv, sonach lässt sich auch V_0, die Schubkraft von 1, bei der Lastenstellung 2 auf t_2 aus der Zeichnung entnehmen. Ist nun

$$V_0 > V_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (78)$$

so ist die Gruppenstellung 2 auf t_2 die für t_2 gefährlichere; andernfalls bleibt 1 auf t_2 als Normalstellung massgebend.

III. In Fig. 563 ist der Hauptträger $A_1 B_1$ durch Vermittelung der Querträger $t_0 \ldots t_4$ mit der Gruppe (eine Lokomotive)

$$P_1 = P_2 = P_3 = 15000 \text{ und } P_4 = P_5 = P_6 = 7500 \text{ kg}$$

belastet. Die Lasten haben, wie aus AB ersichtlich, Raum auf dem Träger. Wir tragen auf ac von a an die Grössen, auf ab, von b beginnend, die Lagen der Lasten auf, und konstruieren, wie in Fig. 562, das Seilpolygon o . . . VI. Das letztere haben wir hier mit in die Figur abc eingezeichnet.

Die Normalstellung 1 auf t_1 ergiebt aus der Ordinate des Seilpolygones $v_1 v_1 = V_1$ als grösste Schubkraft. Um festzustellen, ob, wenn 2 auf t_1 steht, keine grössere Schubkraft erzielt wird, tragen wir die Last 1 links an 2 an, verbinden v_1 mit n, dem Endpunkt von P_1, und ent-

nehmen die Schubkraft für 1, das ist V_0, senkrecht unter 1 aus der Zeichnung.

Die Normalstellung der Gruppe 1 auf t_2 ergiebt $+V_2$ als max; die Stellung 1 auf t_3 die Maximalschubkraft V_3. Die Untersuchung, ob 1, wenn 2 auf t_2 steht, eine grössere Schubkraft liefert, haben wir auch durchgeführt; man überträgt P_1 nach n_1 unter t_1, indem man die Linie $n n_1$ zieht, und verbindet m mit n_1, so wird V_0, die Schubkraft unter 1, für das Feld $t_1 t_2$ abgeschnitten.

Die Zeichnung liefert $V_0 < V_1$ und $V_1 = 2600$ kg; V_0 für die zweite Stellung $< V_2$ und $V_2 = 1450$ kg; $V_3 = 500$ kg und $V_4 = 0$.

In der Nebenfigur sind die Schubkräfte für die bewegliche Lastengruppe eingetragen, und zwar für die Bewegung von rechts nach links.

IV. Auf 2 Hauptträgern AB, Fig. 564, liegen 9 Querträger, auf diesen durch Längsträger die Lasten

$$P_1 = 15,\ P_2 = P_3 = 13,\ P_4 \ldots P_8 = 9 \text{ Tons},$$

welche in der Zeichnung mit 1 bis 8 bezeichnet sind. Die Spannweite sei $l = 20$ m.

1. Wir denken zunächst die Quer- und Längsträger als nicht vorhanden und die gesamte Belastung von $\Sigma P = 86000$ kg ruhend und gleichmässig verteilt mit

$$\frac{86000}{2} = 43000 \text{ kg}$$

auf einem der Träger AB liegen; dann ist das Maximalmoment

$$\frac{43000 \cdot 20}{8} = 107500 \text{ kgm};$$

die Maximalschubkraft

$$V = \frac{43000}{2} = 21500 \text{ kg}.$$

Die Trägerhöhe sei $h = 2$ m; die zulässige Spannung $k_b = 400$ kg auf den qcm soll nicht überschritten werden.

Das Eigengewicht eines Trägers ist sodann nach S. 160, Band II

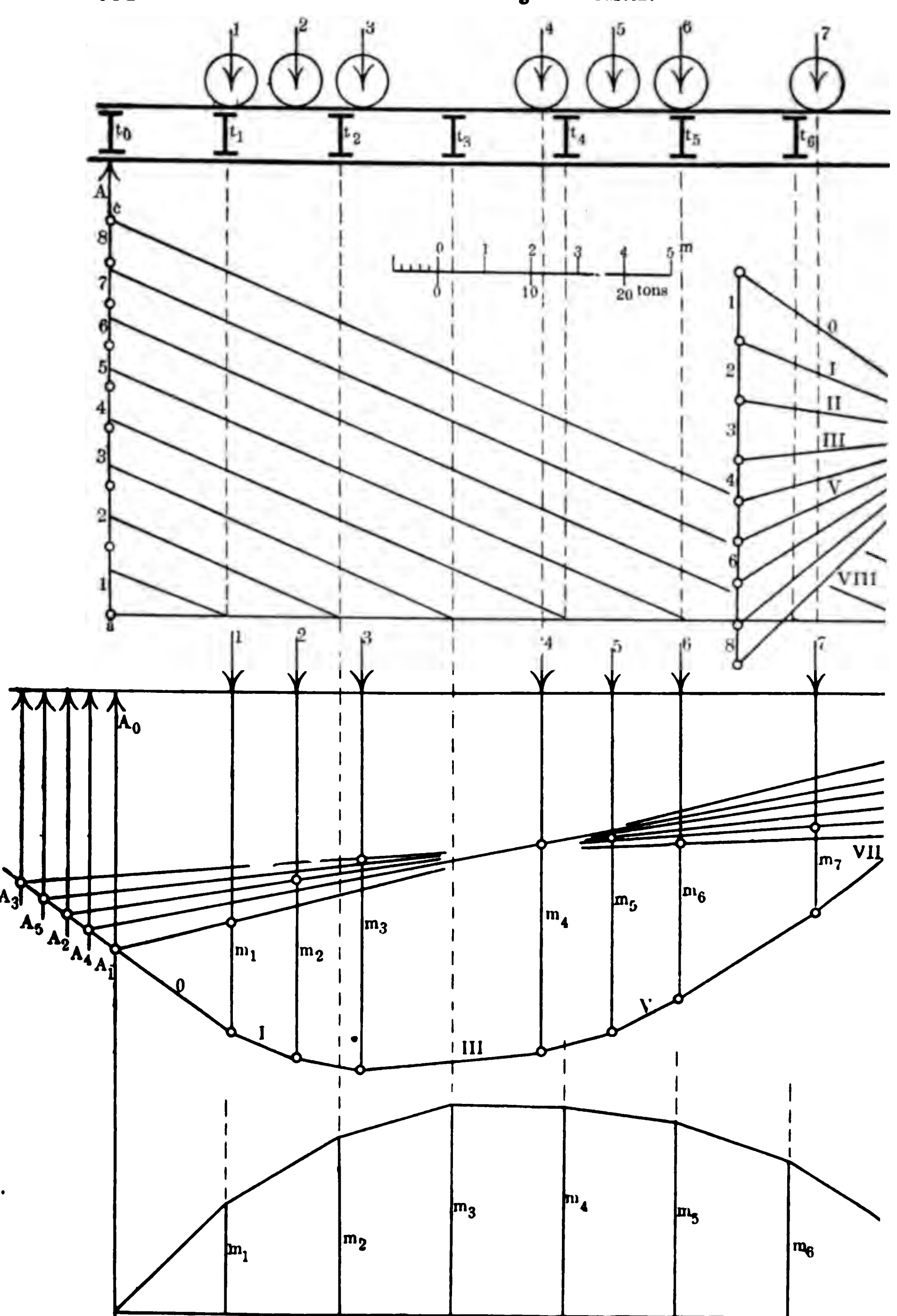
$$p = 8\left[5h + \frac{M + hV}{ah - l(4h + l)}\right],$$

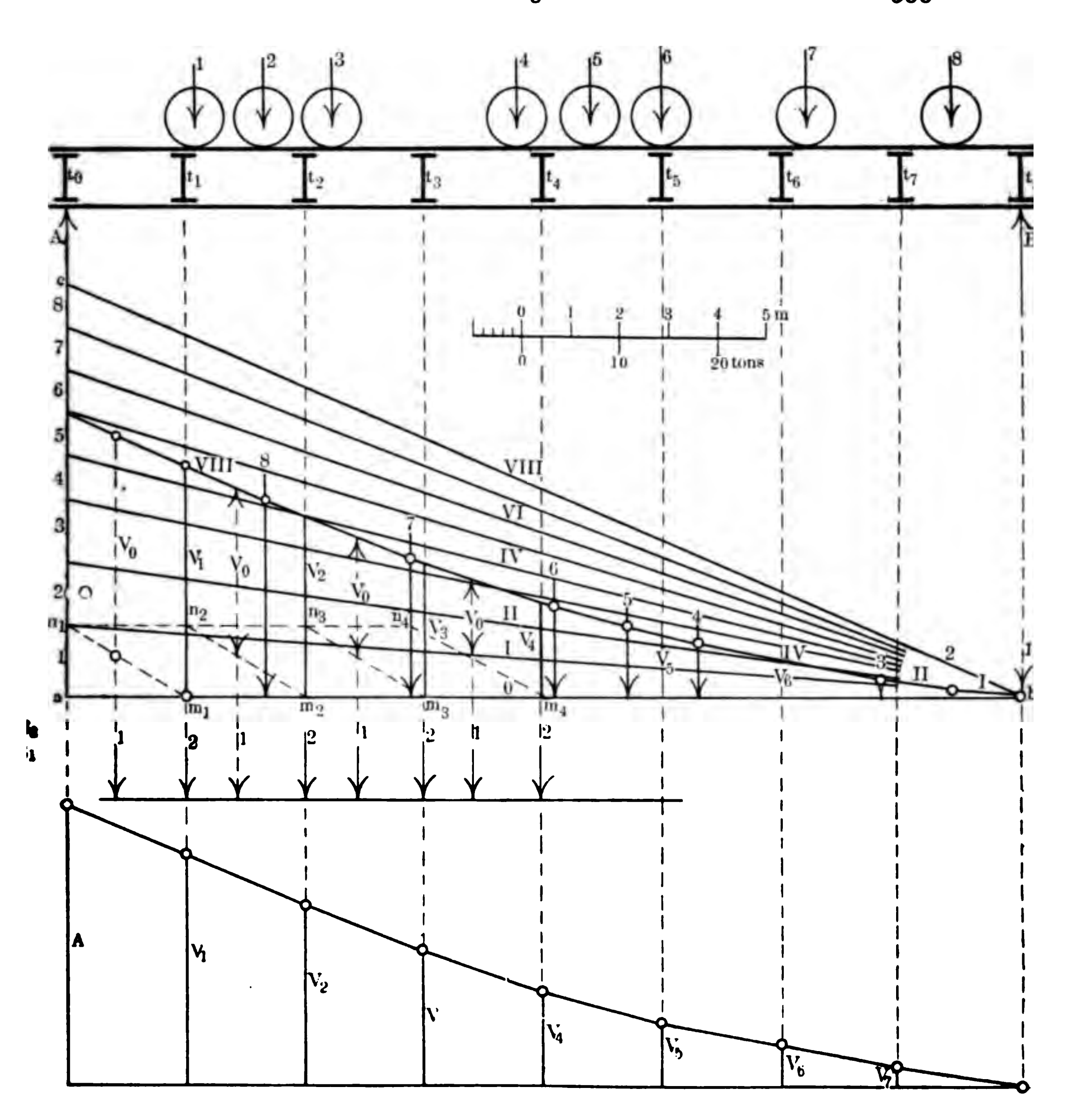
der Koefficient a hängt von der Spannung k_b ab und ist

$$a = \frac{k_b}{2000},$$

wenn k_b in kg auf d. qm gerechnet wird; man erhält

$$a = \frac{4000000}{2000} = 2000, \text{ somit}$$


1
2
3
4
5
6
7
t0
t1
t2
t3
t4
t5
t6
A
c
8
7
6
5
4
3
2
1
a
0
1
2
3
4
5 m
0
10
20 tons
0
I
II
III
V
VIII
A0
A3
A5
A2
A4
A1
m1
m2
m3
m4
m5
m6
m7
VII
0
I
III
V
m1
m2
m3
m4
m5
m6


1
2
3
4
5
6
7
8
0 1 2 3 4 5 m
0 10 20 tons
VIII
VI
IV
II
I
0
V0
V1
V2
V3
V4
V5
V6
V7
A
B
m1
m2
m3
m4
n1
n2
n3
n4

$$p = 8\left[5 \cdot 2 + \frac{107500 + 2 \cdot 21500}{2000 \cdot 2 - 20\,(4 \cdot 2 + 20)}\right] = 480 \text{ kg}$$

auf d. lauf. m.

Mit Rücksicht auf das Eigengewicht ist das Maximalmoment hiernach, gleichmässige Verteilung der Last angenommen,

$$M = 107500 + \frac{480 \cdot 20^2}{8} = 131500 \text{ kgm} \quad . \quad . \quad . \quad \text{(a)}$$

Wir haben nun in der Figur die Einzellasten $P_1 \ldots P_8$ zu einem beliebigen Polpunkte O vereinigt, ein hier nicht gezeichnetes Seilpolygon konstruiert, durch die Schlusslinie i die Auflager A und B festgestellt und mit demselben Polabstand für den Polpunkt O_1 die Momentenfläche konstruiert, welcher jetzt die horizontale Schlusslinie mn entspricht. Ferner haben wir ebenso die gleichmässig verteilte Last pl in einer Figur aufgetragen und mit dem Polpunkt O_2 das Seilpolygon mnp konstruiert, die grösste Ordinate pr in der Mitte entspricht der Einzellast pl in r, der gleichmässig verteilten Last entspricht die Ordinate $ro = \frac{1}{2} pr$; durch die Punkte mon haben wir dann die Parabel der gleichmässig verteilten Last gezeichnet und geben die Summen der Momentenordinaten, $M_1 M_2 M_3 \ldots$ die Momente in den Trägerquerschnitten, ohne Rücksicht auf eine mittelbare und auf eine bewegliche Belastung.

Um die genaue Lage des Maximalmomentes festzustellen, haben wir die Schubkräfte V im Sinne der Fig. 524 u. a. festgestellt, im Punkt z wird V = o. Das grösste Moment für diese konstante Belastungsart ist aus der Zeichnung

$$M_1 = 22740 \cdot f + 4760 \cdot f = 22740 \cdot 5 + 4760 \cdot 5 = 137500 \text{ kgm}$$

ersichtlich, wenn f = 5 und die Ordinaten aus den beigezeichneten Massstäben entnommen werden. Durch die Annahme der Einzellasten erhalten wir also ein grösseres Moment als oben in (a) M = 131500 kgm.

2. Wir nehmen ferner an, die Einzellasten $P_1 \ldots P_8$ liegen **ruhend** mittelbar auf AB, das heisst durch Vermittelung der Querträger $t_0 \ldots t_8$. Die Konstruktion der Momente erfolgt jetzt im Sinne der Fig. 530. Die Momente können aus den Ordinaten unterhalb der Querträger entnommen werden, die Schubkräfte V aus der untersten Figur, welche mit dem Polpunkt O_3, konstruiert wurde.

Das grösste Moment M_2 unterhalb t_4 ist

$$M_2 = 22400 \cdot 5 + 4800 \cdot 5 = 112000 + 24000 = 136000 \text{ kg},$$

also etwas kleiner als M_1.

Die Vertikalkraft unterhalb P_2, bei unmittelbarer Belastung, innerhalb $t_1\, t_2$ ist aus der mittleren Figur $V_2 = 21500$ kg, aus der unteren

Figur also im Felde $t_1 t_2$, $V_4 = 26500$ kg. Das grösste Moment für die ruhende mittelbare Last liegt im Träger t_4, im Punkte y, wo $V = o$.

3. Die gesamte Lastgruppe $P_1 \ldots P_8$ bewegt sich über den Träger, mittelbare Belastung angenommen. Die Konstruktion der Momente Fig. 565 ist nach Fig. 561, die der Vertikalkräfte nach Fig. 562, 563 ausgeführt.

Bei unmittelbarer Belastung der Einzellastgruppe $P_1 \ldots P_8$, also ohne Anwendung der Querträger, würde die Konstruktion der Momente und Vertikalkräfte im Sinne der Fig. 545, 546 durchzuführen sein.

Zur Berechnung der Momente, ohne Rücksicht auf das Eigengewicht, haben wir in Fig. 565, senkrecht auf ab in a die Einzelkräfte aufgetragen, das Seilpolygon o I . . . VIII mit Polpunkt O im Abstand $f = 5$ für die Normalstellung der Einzellasten (Fig. 564) konstruiert. Aus der Verteilungsfigur abc ist zu entnehmen, dass, um für die Querträger die grössten Momente zu erhalten, man P_1 auf t_1, P_2 auf t_2, P_3 auf t_3, P_4 auf t_4, P_5 auf t_5 u. s. w. stellen muss. Man erreicht dies, wie in $A_0 B_0$ geschehen, wenn man AB bezw. $A_0 B_0$ im betreffenden Sinne verschiebt. Die Seilpolygonseiten o und VIII schneiden dann in den verschiedenen Punkten $A_1 A_2 A_3$ — $B_1 B_2 B_3 \ldots$ ein, welche jedesmal eine besondere Schlusslinie liefern, diese ergeben dann die jeweiligen unter $t_1 t_2 \ldots$ liegenden Momente; die letzteren sind unterhalb der Figur zusammen zu einer Momentenfläche vereinigt.

Das grösste Moment ist m_3 unterhalb t_3. Der Träger AB wäre also bei konstantem Querschnitt nach diesem zu berechnen; es ist

$$m_3 = 23500 \cdot 5 = 117500 \text{ kgm.}$$

Hierzu noch das grösste Moment des Eigengewichtes 24000 kgm gezählt, erhält man 141500 kgm. Hiernach erkennen wir, dass die Bewegung der Last im Vergleich zur ruhenden von grösserem Einfluss ist, die Differenz ist 141500 — 137500 = 40000 kgm, den geringsten Einfluss hat die als gleichmässig verteilt gedachte Last der sämtlichen Einzellasten, $M = 131500$ kgm.

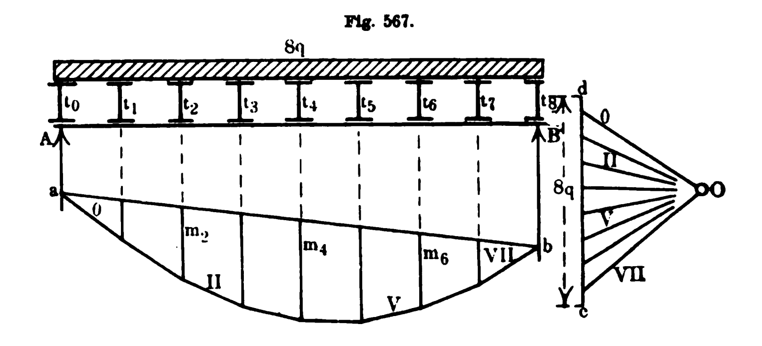
Die Schubkräfte V_1 bis V_7, welche bei der Bewegung der Lastgruppe auf einen mittelbar belasteten Träger AB in den Querträgern vorhanden sind, haben wir, Fig. 566, konstruiert. Wir tragen die Einzellasten $P_1 \ldots P_8$ senkrecht an ab in a auf, betrachten b als Polpunkt, ab als Nulllinie und konstruieren das Seilpolygon o, I, II . . . VIII innerhalb der Einzellasten $P_1 \ldots P_8$, welche in b von rechts nach links aufgetragen werden. Um die Schubkraft in t_1 zu erhalten, denken wir uns P_1 über t_1 gestellt, dann ergiebt sich V_1 unterhalb t_1, ebenso $V_2 V_3 V_4 \ldots$

unterhalb der gleichbezeichneten Querträger. Die Untersuchung, ob, wenn P_2 auf $t_1\,t_2\,t_3\,t_4$ steht, P_1 eine grössere Schubkraft erzeugt, haben wir in diesen 4 Fällen ausgeführt. Denkt man die Kräfte P_2 und P_1 jedesmal in $m_1\,m_2\,m_3\,m_4$ aufgetragen und diese Punkte mit $n_1\,n_2\,n_3\,n_4$ verbunden, so ergiebt die jedesmalige Schnittlinie die Schubkräfte V_0, welche sämtlich kleiner als die zugehörigen $V_1\;V_2\;V_3\;V_4$ sind. Die dem Träger t_1 entsprechende Schubkraft ist $V_{1\,max} = 34200$ kg u. s. w.

Die Werte für V_{min} erhalten wir, wenn wir im Sinne der Fig. 546 die Entfernung des Trägers t_1 von A an B nach links abtragen, wir erhalten hier $V_{7\,min} = 2200$ kg für den Träger t_1 u. s. w.

V. Wir wollen noch die Aufgabe stellen, P_1 bis $P_8 = 43000$ kg für einen Träger gleichmässig verteilt, wie in Beispiel IV unter 1.,

Fig. 567.



aber mittelbar und in Bewegung auf AB zu betrachten, um den Einfluss auf den Träger, bezw. auf die Querträger zu untersuchen.

Die grössten Momente entstehen, wenn bei der Bewegung die ganze Last auf dem Träger steht, wenn also der Träger voll belastet ist; die Momentenordinaten liegen dann im Sinne der Fig. 532 unterhalb der Querträger, denn bei voller Belastung tritt zugleich ruhende Belastung ein. Die sich hierauf beziehende Konstruktion ist in Fig. 567 in halber Grösse, dem Längen- und Kräftemassstab der Fig. 564 bis 566 entsprechend, ausgeführt. Die Belastung auf d. lauf. meter ist

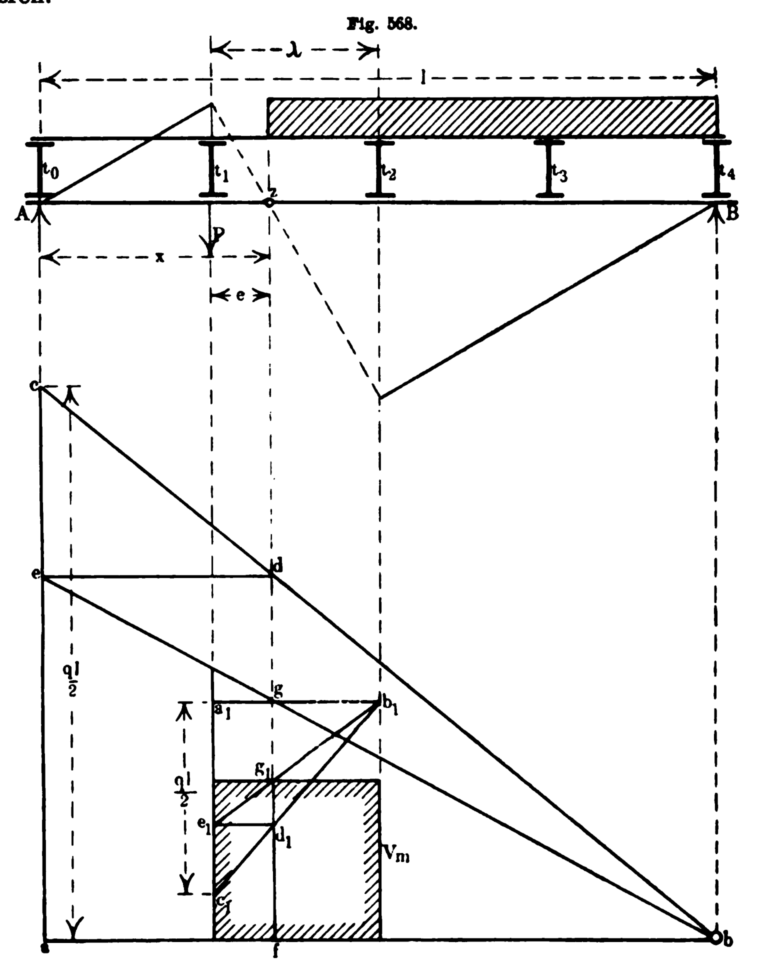
$$\frac{43000}{20} = 2150 \text{ kg},$$

also für ein Feld von 2,5 m Länge $q = 2150 \cdot 2{,}5 = 5375$ kg. Wir tragen auf cd, Fig. 567, 8q auf, auf die äussersten Querträger t_0 und t_8 kommt dann die Belastung $\frac{1}{2}$q. Das Seilpolygon liefert unterhalb t_4 das grösste Moment $m_4 = 21000 \cdot 5 = 105000$ kgm. Lassen wir die

gleichmässig verteilte Last von 43000 kg unmittelbar an AB angreifen, so hatten wir schon in Beispiel IV unter 1. M = 107500 kgm gefunden; durch die Vermittelung der Querträger wird also das Moment selbst auch für eine bewegte gleichmässig verteilte Last geringer. —

Um die Schubkräfte einer mittelbaren gleichmässig verteilten bewegten Last zu untersuchen, sind wir genötigt, die Grundgedanken, wie sie die Konstruktionen in Fig. 548 und 553 enthalten, zu kombinieren.

Fig. 568.



Wir haben zunächst in Fig. 568 den Fall allgemein dargestellt. Auf dem Träger AB liegen die Querträger $t_0 \ldots t_4$, auf diesen bewegt

sich gleichmässig verteilt durch Vermittelung von Längsträgern die Last q kg auf d. lauf. m. Für das Feld $t_1 t_2$ wird die Schubkraft V am grössten, wenn die Last (Fig. 553) bis zur Belastungsscheide z vorgerückt ist. Man zieht demnach durch A und B zwei parallele Linien, deren Schnittpunkte mit den Senkrechten durch die Querträger verbunden werden, diese Linie schneidet in z die Achse AB; z ist die Belastungsscheide, bis zu der die gleichmässig verteilte Belastung vorgeschritten ist; z mag in der Entfernung x von A liegen, die Entfernung von t_1 sei e, die Belastung bis z ist hiernach q (l — x).

Die Auflagerreaktion in A für die Belastung Bz ergiebt sich aus der Gleichung

$$A l = q \frac{(l - x)^2}{2},$$

$$A = \frac{q}{2 l} (l - x)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (a)$$

Bezeichnet man den Druck, welchen der Querträger t_1 auf AB ausübt, mit P, so ergiebt sich derselbe aus

$$P \lambda = q \frac{(\lambda - e)^2}{2},$$

wenn λ die Entfernung der Querträger ist,

$$P = \frac{q}{2 \lambda} (\lambda - e)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (b)$$

Innerhalb des Feldes $t_1 t_2$ ist nun die Schub- oder Vertikalkraft $V_m = A - P$, mit Rücksicht auf die Gl. (a) und (b),

$$V_{max} = \frac{q (l - x)^2}{2 l} - \frac{q (\lambda - e)^2}{2 \lambda} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (79)$$

Dieser Ausdruck bedeutet, mit Gl. 75 verglichen, die Differenz zweier Parabelordinaten. Die Konstruktion lässt sich im Sinne der Fig. 548 ausführen, und dürfte keine Schwierigkeiten bereiten. Man trägt auf ab die Senkrechte in a, $ac = \frac{q l}{2}$ auf und bestimmt zunächst den Schnittpunkt d, de parallel ab gezogen, und e mit b verbunden, erhält man den Parabelpunkt g; es ist nämlich

$$fg = A = \frac{q (l - x)^2}{2 l}.$$

Durch g zieht man die Horizontale $a_1 b_1$ und trägt in a_1

$$a_1 c_1 = \frac{q \lambda}{2}$$

an (in der Figur ist $\frac{q l}{2}$ in $q \frac{\lambda}{2}$ zu verändern); verbindet man wieder c_1

Fig. 569.

mit b_1, zieht $d_1 e_1$ parallel mit ab, die Verbindungslinie $e_1 b_1$ schneidet auf gf den Punkt g_1 a b, dann ist

$$g g_1 = P = \frac{q(\lambda - e)^2}{2\lambda}, \text{ sonach für das Feld } t_1 t_2$$

$$f g_1 = V_{max} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (90)$$

Wenden wir nun diese Konstruktion auf unser Zahlenbeispiel an, indem wir, Fig. 569, die mittelbar wirkende Last von 43000 kg durch das Rechteck s s andeuten und für jedes Querträgerfeld V_{max} suchen. Durch die beiden Parallelen An und Bm ergeben sich die Belastungsscheiden $z_1 z_2 \dots$ Wir tragen ferner

$$ac = \frac{ql}{2} = \frac{2150 \cdot 20}{2} = 21500 \text{ kg}$$

senkrecht an ab an, ziehen ac und bilden die Schnittpunkte d der Belastungsscheiden mit bc, ziehen die sämtlichen Parallelen ed zu ab, durch die Verbindungslinien eb finden wir die Schnittpunkte g, die, miteinander verbunden, die in Fig. 548 konstruierte Parabel liefern würden. An die durch g gezeichneten Horizontalen tragen wir

$$\frac{q\lambda}{2} = \frac{2150 \cdot 2{,}5}{2} = 2688 \text{ kg} = 2{,}688 \text{ tons*)},$$

und ziehen die Horizontalen $e_1 d_1$, die Verbindungslinien von e_1 aus mit den durch g gehenden Horizontalen kreuzen die Senkrechten durch die Belastungsscheiden in den endgültigen Parabelpunkten $g_1 g_2 g_3 \dots$ In der untersten Zeichnung der Fig. 569 sind die Maximalschubkräfte für jedes Feld nochmals übertragen. Die Werte derselben lassen sich aus dem beigefügten Massstab entnehmen. Aus den endgültigen Momenten und Schubkräften ergeben sich dann nach den im II. Band entwickelten Gesetzen die Dimensionen.

Wir wollen noch nachträglich bemerken, dass in der obigen Eigengewichtsberechnung S. 531 die Spannung k_b aus Versehen statt zu 700 zu 400 kg angenommen wurde.

VI. Anwendung der beweglichen Lasten auf Brückenfachwerke. Um den Einfluss der beweglichen Lasten auf Fachwerkträger kennen zu lernen, haben wir nur nötig, die Momente auf die Gurtungsspannungen zu übertragen und die Schub- oder Vertikalkräfte auf die Strebespannungen in den Wandungen zu beziehen.

Bereits in Band I S. 275, Gl. 99, aber auch in den vorstehenden

*) In der Figur sind aus Versehen 5375, das Doppelte der obigen angetragen; die sämtlichen Schnittpunkte $g_1 g_2$ .. fallen in Wirklichkeit etwas höher.

Abschnitten (S. 204 u. f.) haben wir die Zug- und Druckspannungen in den Gurtungen festgestellt, graphisch Zug und Druck durch Pfeile angedeutet, rechnerisch durch die Formel

$$\pm S = \frac{M}{h} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (91)$$

wenn M das Moment in irgend einem Querschnitt, in welchem die Trägerhöhe H ist. H liegt innerhalb der Grenzen $H = \frac{l}{7}$ bis $\frac{l}{14}$ für Brücken- und H bis $\frac{l}{20}$ für Deckenträger (vgl. S. 159 u. f., Band II). Die obere Gurtung ist stets auf Druck, die untere auf Zug beansprucht. In Fachwerken muss aber h in Gl. 91, weil die Kräfte stets rechtwinkelig auf die Hebelarme wirken, senkrecht zur Gurtrichtung gemessen werden.

Die Wandspannungen ergeben sich aus den Schub- oder Querkräften, deren graphische Konstruktion für bewegliche Lasten wir soeben besprochen haben; damit wir aber hierbei nach den in den ersten Abschnitten kennen gelernten Kräfteplänen, unter Zugrundelegung des Kräftepolygones, die einzelnen Spannungen in dem Strebennetzwerk ermitteln können, müssen wir die Auflagerreaktionen für die einzelnen Lastengruppenstellungen verwerten, von diesen aus sind die Kräftepläne zu konstruieren. Die Konstruktionen dieser verschiedenen Kräftepläne reduziert man und erleichtert sich auch das Abgreifen der Stabspannungen (nach Müller-Breslau) dadurch, dass man in einem Kräfteplan von $A = 1$ ausgeht, und mit Rücksicht auf die Belastungsmasse die Spannungen in dem Netzwerk entsprechend verändert.

1. Es soll ein einfacher Fachwerkträger, Parabel-Brückenträger (vgl. S. 205 Fig. 236 und I. Band S. 289) ausgeführt werden. Die Träger sollen für eine eingeleisige Eisenbahn verwendet werden; die Spannweite sei 20 m. Das Eigengewicht der Brücke ist (s. Anhang I)

$$p = 35\,l + 550 = 35 \cdot 20 + 550 = 1250 \text{ kg}$$

auf d. lauf. m und für 1 Geleis. Für die Brücke soll als Maximallast eine Lokomotive und ein Güterwagen angenommen werden, die erstere mit $P_1 = P_2 = P_3 = 13$ t, Tender mit $P_4 = P_5 = P_6 = 9$ tons, der Wagen mit $P_7 = P_8 = 9$ t Lastdruck.

Die Verteilung der Last in einer beliebigen Mittelstellung zeigt Fig. 570; in dieser Figur ist auch die Resultierende der gesamten Lastengruppe R graphisch konstruiert und ihre Lage festgelegt. Die Brücke besteht nun aus 2 Hauptträgern; jeder ist sonach belastet mit

$$(1) = (2) = (3) = \frac{13}{2}\,t = 6500\ \text{kg},$$

$$(4) = (5) \ldots\ldots = (8) = \frac{9}{2}\,t = 4500\ \text{kg},$$

diese Belastung ist auch für das Seilpolygon in Fig. 570 verwertet.

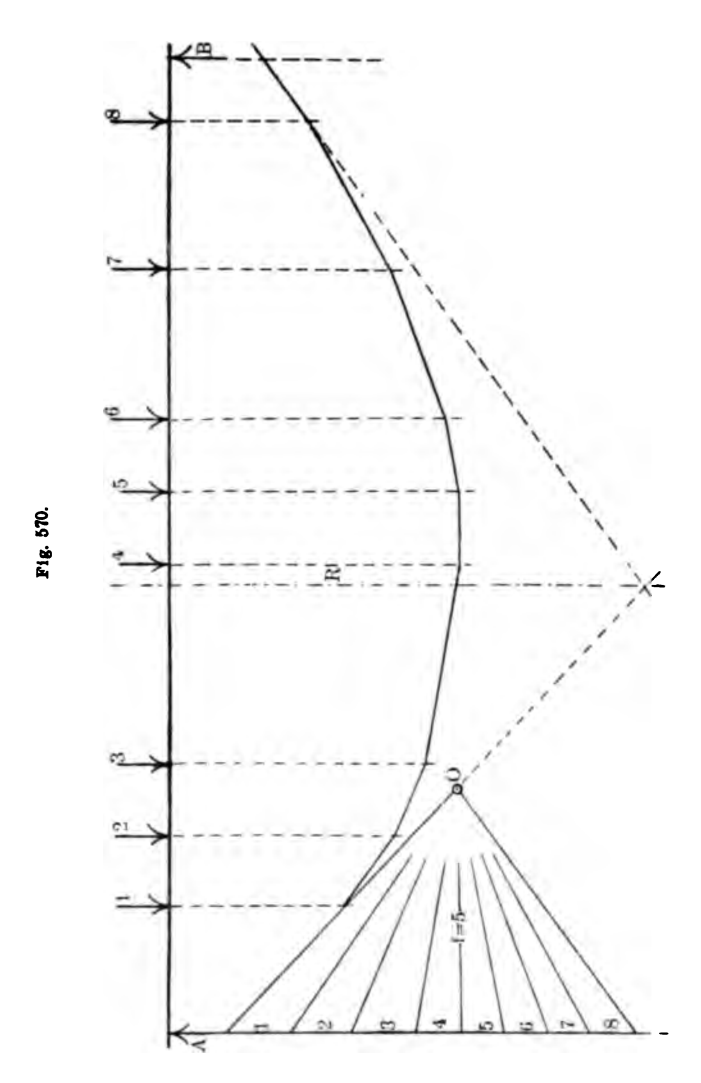


Fig. 570.

Um die Gurtungen berechnen zu können, sind zunächst die Spannungen in denselben erforderlich, und zwar für die über die Brücke sich

bewegende Lastengruppe und für das ruhende Eigengewicht. Die hierzu erforderlichen Momente, Gl. 91, haben wir, Fig. 571, konstruiert. Nach S. 511, Fig. 541, liegt die Last 4 der R am nächsten, wir stellen die Gruppe daher so auf den Träger, dass die Trägermitte zwischen 4 und R zu liegen kommt und konstruieren nach den Kräften 1 . . . . 8 die Mo-

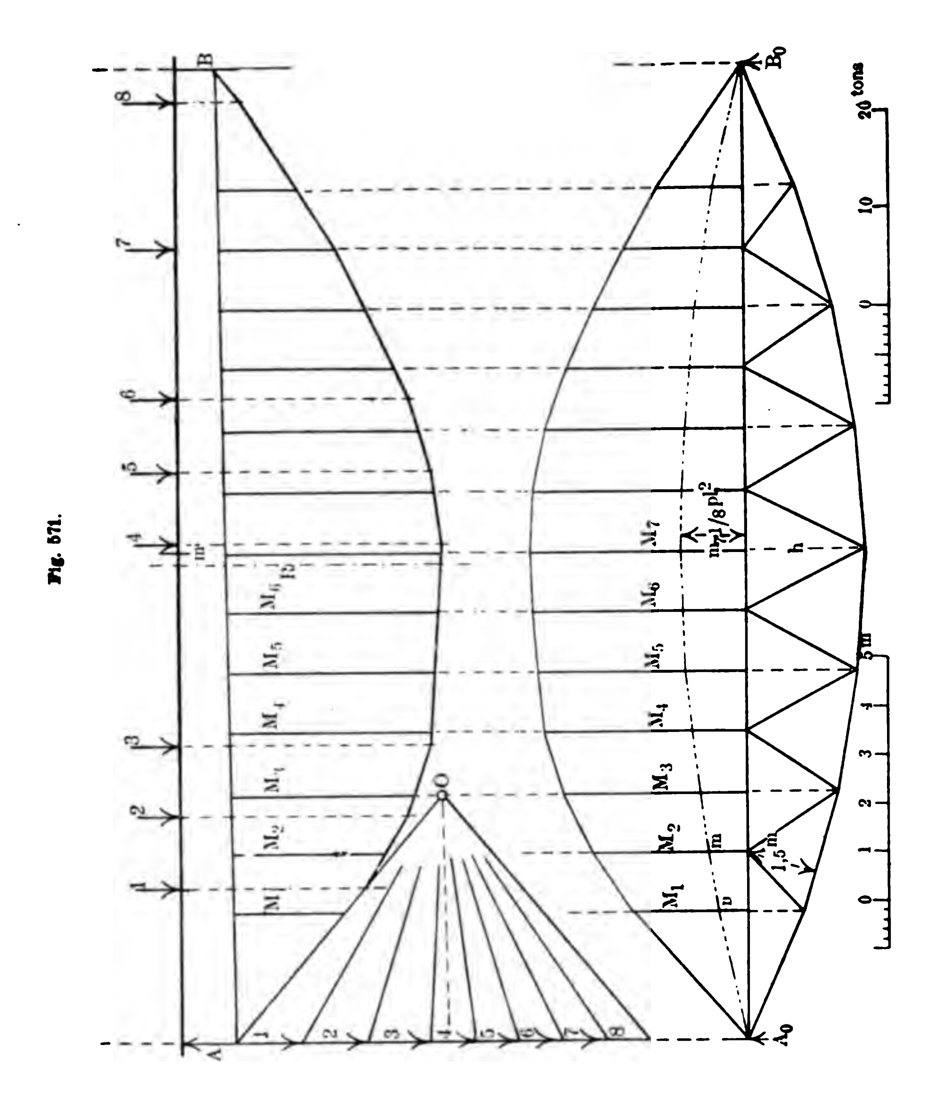


Fig. 571.

mente, die wir dann für die einzelnen Knotenpunkte des Trägers M_1 M_2 . . . . M_{13} zusammenstellen. Das Eigengewicht für einen Träger ist

$$p = \frac{1250}{2} = 625,$$

danach das Maximalmoment in der Trägermitte

$$\frac{625 \cdot 20^2}{8} = 31\,250 \text{ kgm}.$$

Mit Rücksicht auf den Polabstand $f = 5$ haben wir dasselbe in die punktierte Parabel unterhalb der Hauptmomentenlinie auf $A_0\,B_0$ in die Figur eingetragen. Die Trägerhöhe in der Mitte ist

$$h = \tfrac{1}{8}\,l = \tfrac{1}{8}\,20 = 2{,}5 \text{ m}.$$

Das grösste Moment in der Trägermitte ist

$$M_{max} = M_7 + m_7 = 21\,500 \cdot 5 + 6250 \cdot 5 = 138\,750 \text{ kgm},$$

worin 5 der Polabstand. Die zugehörige Gurtungsspannung ist

$$\pm S = \frac{138\,750}{2{,}5} = 55\,500 \text{ kg}.$$

Das Moment für den Knotenpunkt 2 ist

$$M = M_2 + m_2 = 15\,400 \cdot 5 + 4000 \cdot 5 = 97\,000 \text{ kgm},$$

die Höhe ist hier senkrecht zur Gurtrichtung $h = 1{,}5$ m

$$\pm S = \frac{97\,000}{1{,}5} = 64\,660 \text{ kg u. s. w.}$$

Addieren wir die sämtlichen Belastungen $3 \cdot 13000 + 5 \cdot 9000$, hierzu das Eigengewicht $1250 \cdot 20 = 25000$ kg, so ist die Summe für einen Träger

$$\tfrac{1}{2}\,(25\,000 + 39\,000 + 45\,000) = 54\,500 \text{ kg}.$$

Verteilen wir diese auf die 6 Knotenpunkte c, e, g ... der Obergurtung, Fig. 572, dann ist für jeden Knotenpunkt $Q_1 = Q_2 \ldots Q_6 =$ 9000 kg.

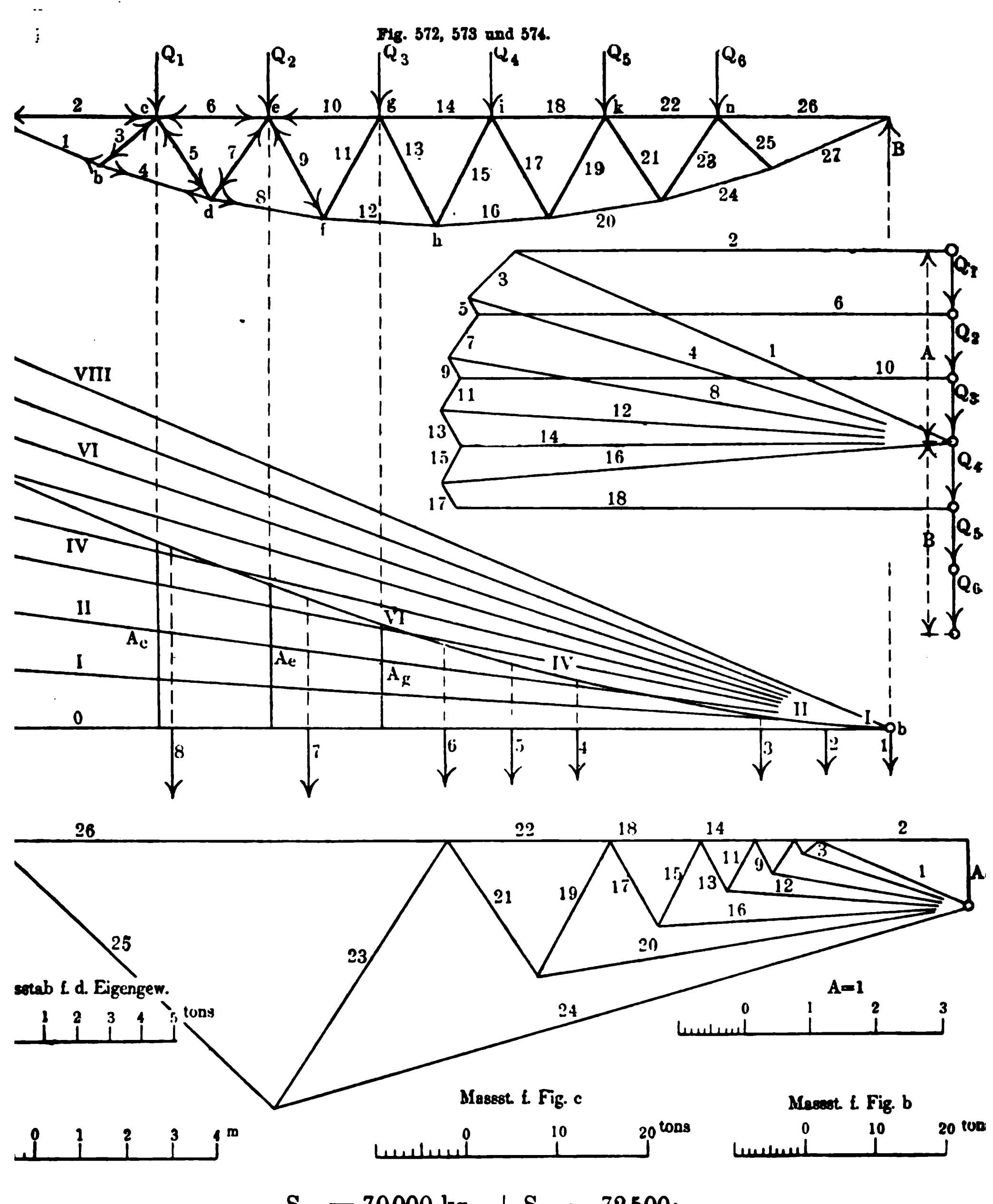
In Fig. 573 haben wir unter Annahme dieser gleichmässigen Knotenpunktsbelastung den Kräfteplan konstruiert, aus welchem wir die Spannungen in den Gurtungen unmittelbar nach dem beigefügten Massstab f. Fig. b entnehmen können. Die Auflagerreaktionen sind hierbei

$$A = B = \frac{54\,500}{2} = 27\,250 \text{ kg}.$$

Es müssen hier grössere Spannungen erscheinen, weil wir die Gesamtlast auf die 6 Knotenpunkte, statt auf die 7 Felder verteilt haben; richtiger wäre es, die Verteilung auf $\frac{54\,500}{7} = 7780$ kg Felderbelastung zu rechnen, wobei A und B noch je mit $\frac{7780}{2} = 3890$ kg zu belasten wären. Für diese Verteilung kann man den Massstab f. Fig. c verwenden, welcher für die mittlere Figur der Schubkräfte gilt.

Aus dem Kräfteplan Fig. 573 nach dem Massstab f. Fig. b erhält man

Fig. 572, 573 und 574.



$-S_{14} = 70000$ kg, $+S_{12} = 72500$;
die dem zweiten Knotenpunkt entsprechende Belastung $-S_2 = 62000$ kg und $+S_4 = 71000$ kg, oben fanden wir 64660 kg.

Nach dem Massstab für Fig. c, der Teilung in 7 Felder entsprechend, also sich mehr der obigen Berechnung, Fig. 571, nähernd, ist

$$-S_{14} = 55000 \text{ kg}; \; +S_{12} = 57000, \; +S_4 = 56000 \text{ kg}.$$

Die Abweichungen rühren namentlich daher, dass die Verteilung der Lastengruppe eine andere als eine auf die Knotenpunkte konzentrierte ist.

Zur Berechnung der Wandspannungen benötigen wir die Schubkräfte. Bei einer bestimmten Lastengruppenstellung auf einen bestimmten Knotenpunkt, wenn links von der ersten Last keine mehr vorhanden ist, stellt die resultierende Schubkraft gleichzeitig die Auflagerreaktion dar; wir tragen sonach senkrecht auf ab in a, der mittleren Fig. 572, die einzelnen Lasten von P_1 bis P_8 auf und von b aus nach links deren Entfernungen und konstruieren das Seilpolygon O, I... VIII. Die unter den Knotenpunkten liegenden Ordinaten des letzteren sind die Auflagerreaktionen. Der Lastenstellung mit der ersten Last auf Knotenpunkt e, wie in Fig. 575 dargestellt, entspricht Auflager $A_e = 16000$ kg. Tragen wir diese Gruppenstellung auf und konstruieren das zugehörige Seilpolygon, Fig. 575, die Last 8 kommt ausserhalb B zu stehen, so finden wir $B_e = 22000$ kg. Die Figur zeigt, dass hier A_e dem Wert A_e in Fig. 572 gleich ist, vielmehr gleich sein muss. Die zugehörigen Momente würden die Fläche F liefern. Die Fig. 576 haben wir nun ferner dazu verwendet, um die dieser Lastenstellung entsprechenden Wandspannungen zu berechnen, oder vielmehr aus der Kräftepolygonzeichnung zu entnehmen. Um in letzterer Reduzierungen zu umgehen, haben wir bei dieser Gruppenstellung die Lasten 2 und 3 auf den Knotenpunkt g vereinigt, ferner 4 und 5 auf den dazwischen liegenden. Die betreffenden Spannungen in der Wandung, natürlich auch die in den Gurtungen, können dann nur für diese Gruppenstellung unmittelbar abgegriffen werden.

Um nun aber für jeden Knotenpunkt, also für jede Lastenstellung die Fig. 575 und 576 zu ersparen, haben wir für A als Einheit das Polygon 574 konstruiert, welches gleichsam die allgemeinen Werte der Wandspannungen darstellt, die nur noch mit den jedesmaligen Werten von A aus der mittleren Fig. 572 zu multiplizieren sind für die verschiedenen Gruppenstellungen, um die Wandspannungen zu erhalten.

Aus Fig. 574 findet man nach dem beigefügten Massstab die allgemeinen Spannungen mit z bezeichnet:

$$z_3 = 0{,}3; \; z_5 = 0{,}28; \; z_7 = 0{,}63; \; z_9 = 0{,}5; \; z_{11} = 0{,}8; \; z_{13} = 0{,}85;$$
$$z_{15} = 1{,}44; \; z_{17} = 1{,}5; \; z_{19} = 2{,}35; \; z_{21} = 2{,}45; \; z_{23} = 4{,}8; \; z_{25} = 5{,}9.$$

Für die in Fig. 575, 576 gezeichnete Stellung, also für A_e im Knotenpunkt e, Fig. 572, ist nach dem Massstab für Fig. c $A_e =$

16 tons = 16000 kg. Man erhält dann aus Fig. 576 als Spannung in 7, $T_7 = -10700$ kg. Nach Fig. 574

$$T_7 = z_7\, A_e = 0{,}63 \cdot 16000 = 10100 \text{ kg}.$$

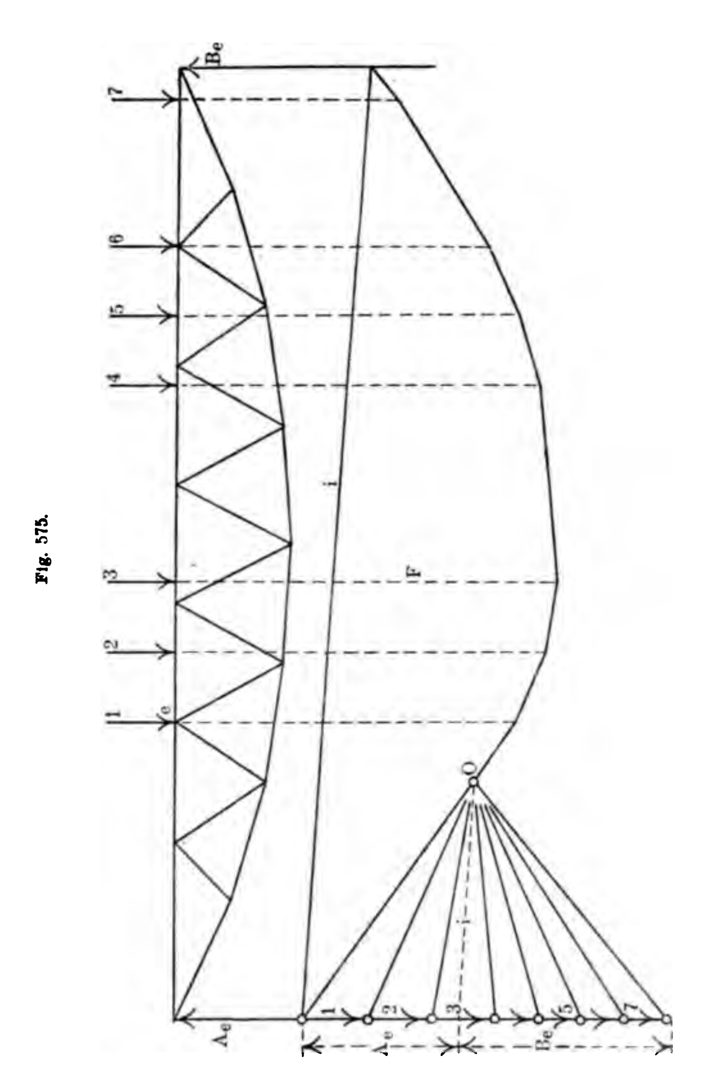


Fig. 575.

T ist hier Druckspannung, weil die erste Druckkraft der Lastengruppe von B nach A fortschreitend im Knotenpunkt e, in der Strebe 7, die grösste Druckkraft erzeugt. Bei dieser Lastenstellung wird aber in der anliegenden linken Strebe 5 die grösste Zugkraft erzeugt, wie auch aus

Fig. 576 zu ersehen ist. Die Grösse von T_5 ergiebt sich aus der letzteren Figur zu $T_5 = +5000$, aus Fig. 574

$$T_5 = z_5\, A_e = 0{,}28 \cdot 16000 = 4500.$$

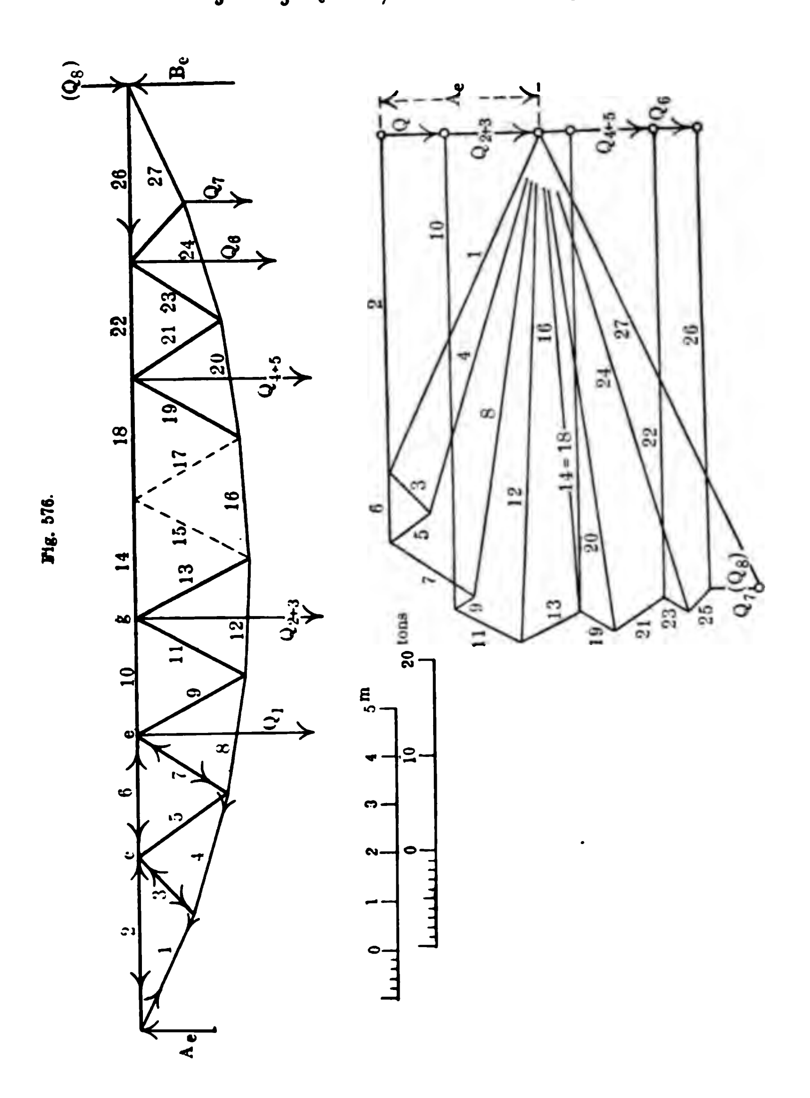


Fig. 576.

Der Unterschied in den Spannungen zwischen Fig. 574 und Fig. 576 liegt in der nicht ganz korrekt berücksichtigten Belastungsverteilung in Fig. 576. Für die Gruppenstellung in e, Fig. 575, können dann die Spannungen der andern Wandstreben, natürlich auch die der Gurtungen,

aus Fig. 576 entnommen werden. Es sind aber nicht die grössten, wie in 5 und 7; wie schon angedeutet, mussten diese für jeden Knotenpunkt und für jede Gruppenstellung im Sinne der Fig. 575, 576 konstruiert werden; für die Lastenstellung, die erste Last in g, würden wir die grössten Spannungen nur für 11 und 9 erhalten. Die Lastenstellung in g liefert $A_g = 11{,}500$ tons $= 11\,500$ kg, sonach

$$T_{11} = z_{11}\, A_g = 0{,}8 \cdot 11\,500 = -\,9200 \text{ kg und}$$
$$T_9 = z_9\, A_g = 0{,}5 \cdot 11\,500 = +\,5750 \text{ kg.}$$

Die Diagonalspannungen für die ungünstigsten Gruppenstellungen, aus den Fig. 572 entnommen, sind zusammengestellt

$$\begin{aligned}
T_3 &= z_3\, A_c = 0{,}3 \cdot 20\,500 = -\ \ 6150 \text{ kg}\\
T_7 &= z_7\, A_e = 0{,}63 \cdot 16\,000 = -\,10\,100 \text{ „}\\
T_{11} &= z_{11}\, A_g = 0{,}80 \cdot 11\,500 = -\ \ 9200 \text{ „}\\
T_{15} &= z_{15}\, A_i = 1{,}44 \cdot 7700 = -\,11\,100 \text{ „}\\
T_{19} &= z_{19}\, A_k = 2{,}35 \cdot 5000 = -\,11\,750 \text{ „}\\
T_{23} &= z_{23}\, A_n = 4{,}80 \cdot 2000 = -\ \ 9600 \text{ „}\\
T_5 &= z_2\, A_e = 0{,}28 \cdot 16\,000 = +\ \ 4480 \text{ „}\\
T_9 &= z_9\, A_g = 0{,}50 \cdot 11\,500 = +\ \ 5750 \text{ „}\\
T_{13} &= z_{13}\, A_i = 0{,}85 \cdot 7700 = +\ \ 6550 \text{ „}\\
T_{17} &= z_{17}\, A_k = 1{,}50 \cdot 5000 = +\ \ 7500 \text{ „}\\
T_{21} &= z_{21}\, A_n = 2{,}45 \cdot 2000 = +\ \ 4900 \text{ „}\\
T_{25} &= z_{25} \qquad = \quad \cdot\ 0 \ = \qquad 0 \text{ „}
\end{aligned}$$

Wenn der Eisenbahnzug oder die Lastengruppe sich in entgegengesetzter Richtung über die Brücke bewegen, so sind die Spannungen umzukehren; es wird dann

$$+\,T_3 = 0,\ T_5 = -\,T_{23},\ T_7 = +\,T_{21},\ T_9 = -\,T_{19} \text{ u. s. w.}$$

Hierzu kommen nun noch die Wandspannungen, welche durch das Eigengewicht erzeugt werden, da sich die vorstehenden nur auf die bewegliche Verkehrslast beziehen. Das Eigengewicht für einen Träger ist

$$\frac{25\,000}{2} = 12\,500 \text{ kg},$$

verteilen wir dasselbe auf die 6 Knotenpunkte c, e, g, i, k, n, so kommt auf jeden eine Belastung von

$$G = \frac{12\,500}{6} = 2080 \text{ kg};$$

da wir auch hier die richtigere Felderteilung, 7 Felder, sonach

$$\frac{12\,500}{7} = 1800 \text{ kg}$$

auf das Feld, ausser Rücksicht gelassen haben, wie oben bei $Q_1 Q_2 Q_3 \ldots$,

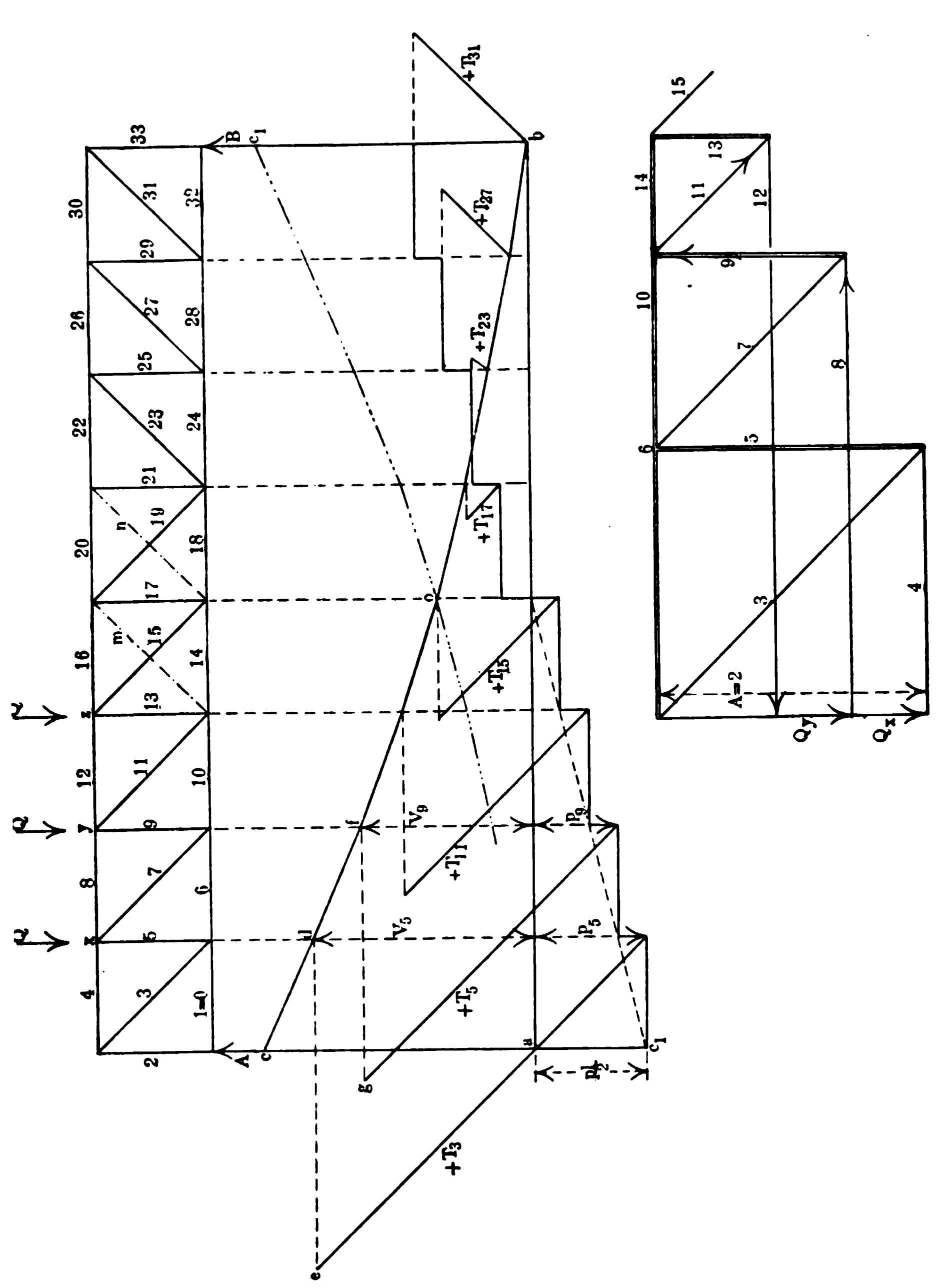
so wollen wir die Belastung des Eigengewichtes auf den Knoten zu rund 2000 kg annehmen. Einen neuen Kräfteplan zur Entnahme der Spannungen im Strebenwerk des Trägers für das Eigengewicht allein, haben wir nicht nötig, da wir die Fig. 572 und 573 hierzu verwenden können, wenn wir uns statt $Q_1 = Q_2 = Q_3 \ldots$ die obigen Belastungen der sechs Knoten $G_1 = G_2 = G_3 \ldots\ldots = 2000$ substituiert denken; wir haben darum auf Seite 545 für diese Eigengewichtsbelastung einen besonderen Massstab angefertigt, dieser ergiebt die Spannungen

$$E_3 = -2050 \text{ kg} = E_{25}$$
$$E_5 = -300 \text{ „} = E_{23}$$
$$E_7 = -1300 \text{ „} = E_{21}$$
$$E_9 = -350 \text{ „} = E_{19}$$
$$E_{11} = -1100 \text{ „} = E_{17}$$
$$E_{13} = -1150 \text{ „} = E_{15}.$$

Die sämtlichen Wandspannungen werden nun schliesslich mit Rücksicht auf ihre Vorzeichen addiert und am besten in eine Zeichnung eingetragen, welche, wie Fig. 571 oder 575, nur die Gurt- und Wandverstrebungen als Striche enthält. Die Zugkräfte, welche schliesslich resultieren, werden am besten mit + Vorzeichen, die Druckkräfte mit — Vorzeichen markiert; es ist selbstverständlich, dass man für die Berechnungen der Dimensionen die Maximalwerte verwendet, die Dimensionierung geschieht nach den in Band II angegebenen Formeln.

2. Wir haben in Fig. 577 noch die Berechnung eines Parallelträgers angedeutet, zu Grunde gelegt wurden die Belastungen in Fig. 565 und 566. Die Aufstellung der Gurtungsspannungen erfolgt genau in derselben Weise wie in Fig. 565. Aus den endgültigen Momenten werden nach Gl. 91 die Spannungen berechnet; das Eigengewicht muss natürlich auch in Rücksicht gezogen werden. Für die Wandspannungen kommt die Konstruktion der Fig. 566 in Betracht. Wir haben die Schubkräfte V_1 bis V_7 der untersten Figur unmittelbar verwertet, sie ist in Fig. 577 mit abc bezeichnet. Das Eigengewicht des angenommenen Trägers ist $pl = 25000$ kg. Da die Querträger in den Vertikalverstrebungen angebracht werden 2, 5, 9, 13, 17 . . . ., so geht die graphische Darstellung der gleichmässig verteilten Last, die gerade Linie, über in eine Staffelung wie bei Einzellasten. Die Maximalschubkraft in d für die Verkehrslast ist sonach V_5, die für das Eigengewicht p_5, sonach insgesamt $V_5 + p_5$.

Für die Feststellung der Spannungen in den Vertikalstangen ist es nicht gleich, ob die Belastung auf der oberen oder unteren Gurtung ruht,



wie es bei der Bestimmung der Spannungen in den Gurtungen der Fall ist, sondern beide Belastungsarten sind zu unterscheiden. Alle auf Zug

beanspruchten Diagonalstangen (3, 7, 11, 15 ... sind Diagonalstangen) üben auf die Vertikalstangen einen Druck aus.

Ist die Fahrbahn unten, so ist die Spannkraft z. B. in der Vertikalen 2, $S_2 = V_5$, in 5, $S_5 = V_9$ u. s. w., sie fällt mit der Vertikalen eines unbelasteten Knotenpunktes zusammen.

Ist die Fahrbahn oben, so haben die Vertikalen die darunter liegenden Schubkräfte auszuhalten. Der Spannkraft in 9 entspricht $S_9 = V_9$ bezw. $V_9 + p_9$, der in 5 entspricht $S_5 = V_5 + p_5$ u. s. w. Die Grössen von V und p erhält man natürlich wieder aus dem Kräftemassstab in tons oder kg.

Die Spannkräfte in den schiefen Streben, die Diagonalspannkräfte, finden wir, indem wir das Gleichgewicht mit den Schubkräften herstellen, durch d, f, o ..., Horizontale ziehen und diese durch die zu 3, 7, 11 ... gezogenen Parallelen kreuzen.

Denken wir uns die Fahrbahn oben, so können wir bereits aus Fig. 578 entnehmen, dass die senkrechten Stangen 5, 9, 13 ... auf Druck, die Diagonalen 3, 7, 11 ... auf Zug beansprucht sind. Denkt man die Last gleichmässig in den Knotenpunkten x, y, z ... verteilt mit Q_x, Q_y, Q_z ... und konstruiert den Kräfteplan wie in Fig. 566 ohne Rücksicht auf einen Massstab geschehen, so ergeben sich aus dem Rücklauf der Kräfte in den einzelnen Knotenpunkten in 4, 8, 12, 16 ... Druck, in 6, 10, 14 ... Zug; in 3, 7, 9 ... Zug; in 5, 9, 13 Druck. Die Strebe in 1 ist spannungslos, die Strebe 2 hat die vollständige Auflagerreaktion, die Schubkraft ac, bezw. cc_1 aufzunehmen (vgl. Fig. 225 bis 230). Bei der beweglichen Last sind sonach T_3, T_5, T_{11}, T_{17} ... Zugspannungen ausgesetzt, in den letzten 3 Feldern tritt aber infolge des Eigengewichtes eine Kreuzung ein. Die Diagonalen 23, 27, 31 würden auf Druck beansprucht werden, damit sie aber auch auf Zug beansprucht werden können, müssen sie entgegengelagert werden; die mittleren beiden Felder müssen daher, wenn man sich die Last von der anderen Seite bewegt denkt, Kreuzstreben m und 15, n und 19 erhalten. T_3 ist natürlich ein Maximalwert, T_{31} würde der Minimalwert sein; der erstere wird in Rechnung geführt.

Ist kein Eigengewicht vorhanden, so tritt die Kreuzung in o, wegen c_1 o ein, event. im mittleren Feld.

Diese Strebenkreuzungen, bezw. die veränderte Lage der Diagonalverstrebungen können wir auch aus den uns bekannten Belastungslinien der Schubkräfte für eine und mehrere Öffnungen, im II. Band näher behandelt, ableiten. Da, wo die Schubkraft V durch Null geht, tritt

Strebenwechsel ein, wie in Fig. 579 bei 3 Unterstützungen, 2 Öffnungen zu ersehen (vgl. die Fig. 114 S. 125, II. Band). Bekanntlich wird, wo V = 0, das Moment ein Maximum (vgl. S. 517, Fig. 551).

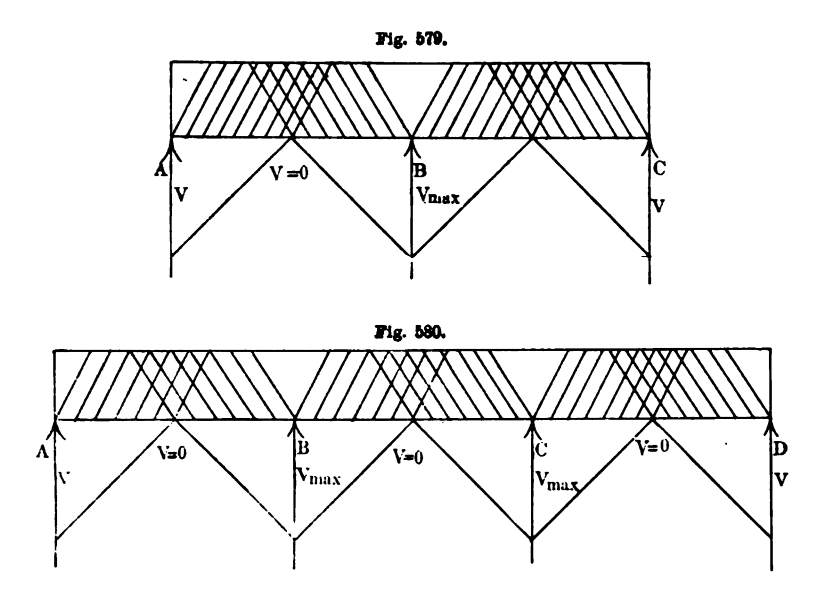


Fig. 579.

Fig. 580.

In Fig. 560 ist das Strebennetzwerk für 4 Unterstützungen angedeutet (vgl. S. 128 Fig. 116, Band II). Der einfachste Fall, das einfachste Beispiel ist offenbar schon durch die Fig. 129, 130 in den früheren Abschnitten S. 118 dargestellt.

Man wird nun schliesslich die sämtlichen Kräfte, die positiven (Zug) und negativen (Druck) Spannungen als grösste Werte in einer Übersichtszeichnung zusammenstellen für den Fall, dass die Last von der einen und von der andern Seite verkehrt, und nach diesen die Dimensionierung vornehmen.

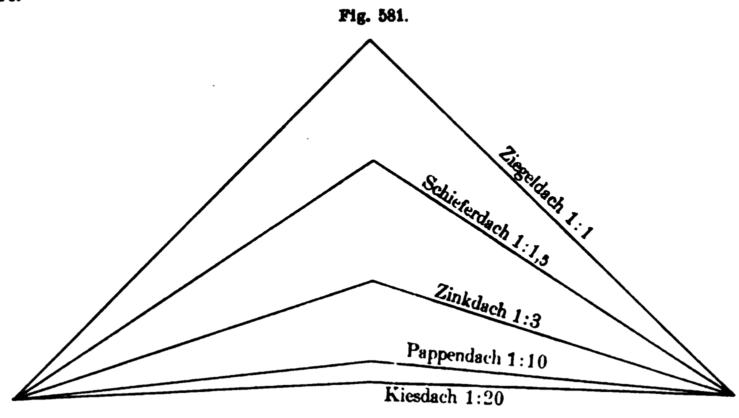
Anhang I.

Erfahrungszahlen und Belastungen*).

I. Dachstühle.

1. Die gewöhnlich in Verwendung kommenden **Dachneigungen** für die verschiedenen Dachdeckmaterialien sind in beistehender Skizze angedeutet.

Fig. 581.



2. Die **Eigengewichte** für 1 qm Dachfläche in kg sind für ein

Einfaches Biberschwanzdach	90 kg
Biberschwanz-Doppeldach .	120 „
Kronendach	130 „
Pfannendach	90 „
Desgl. auf Schalung von 2,5 cm Stärke u. darüber Bettung	110 „
Deutsches Schieferdach auf Schalung 2 cm stark .	85 „
Falzziegeldach	110 „
Zinkdach auf Schalung 2,5 cm stark	40 „
Teerpappendach auf Schalung 2,5 cm stark	35 kg
Wellblechdach auf ⎣ Fetten 2 m frei	25 „
Holzcementdach einschliessl. Schalung 3,5 cm stark u. Sparren 13 × 18 cm stark	180 „
Glasdach auf Sprosseneisen	20 „
Desgl. Glas 5 mm stark .	25 „
„ „ 6 mm „ .	30 „

Man kann bei eisernen Dächern für das qm Grundfläche das Gewicht der Binder zu 20 bis 30 kg annehmen, bei einem Gesamteisengewicht des Daches von 35 bis 45 kg auf d. qm.

*) Nach „Hütte“, Lauenstein. Müller-Breslau etc.

Die Schneelast beträgt 75 kg auf d. qm Dachgrundfläche, wobei auf eine einseitige Schneebelastung zu rechnen ist (s. Fig. 196 etc.). Von 40° Dachneigung an gebraucht man nur die Hälfte der Belastung, von 50° an keine Schneelast mehr zu berücksichtigen.

Der Winddruck ist in den gewöhnlichen Fällen mit 125 kg senkrecht auf die Dachfläche zu rechnen, für dem Wind und Sturm ausgesetzte Dächer (Türme) ist, wie auch bei Brücken, im Maximum 250 bis 270 kg auf den qm zu rechnen.

II. Träger (vgl. II. Band S. 158 u. f.).

1. Holzträger. Das Eigengewicht hölzerner Träger, deren Seitenverhältnis $m = \frac{b}{h}$, und welche auf das grösste Moment M, bei einem spec. Gewicht σ beansprucht sind, ist in kg auf d. lauf. m

$$p = 3300\,\sigma \sqrt[3]{m\left(\frac{M}{k_b}\right)^2},$$

wenn k_b in kg auf d. qm die zulässige Spannung.

2. Das Eigengewicht in kg auf d. lauf. m einzelner eiserner Blech- oder einfacher Fachwerksträger ist

$$p = 8\left[5\,h + \frac{M_m + V_m\,h}{ah - l\,(l + 4h)}\right]$$

für grössere Träger auf 2 Stützen, und

$$p = \frac{8\,(M_m + V_m\,h)}{a\,h}$$

für kleinere Träger, worin l die Spannweite, $h = \frac{l}{7}$ bis $\frac{l}{14}$ die Höhe, M_m und V_m die grössten Werte der Momente und Schub-, Vertikal- oder Querkräfte, und $a = \frac{k_b}{2000}$, wenn k_b kg die zulässige Spannung a. d. qm.

III. Brücken.

A. Eisenbahnbrücken.

1. Eigengewichte.

Im allgemeinen kann man $p = 35\,l + 550$ kg auf d. lauf. m und für ein Geleis annehmen, wenn l die freie Öffnung in m ist. Insbesondere

für Parallelträger $p = 630 + 35\,l$ ohne Bettung,
$p = 2530 + 45\,l$ mit Bettung,
für Parabel- u. andere Träger $p = 32\,l + 630$ ohne Bettung,
$p = 41\,l + 2530$ mit Bettung.

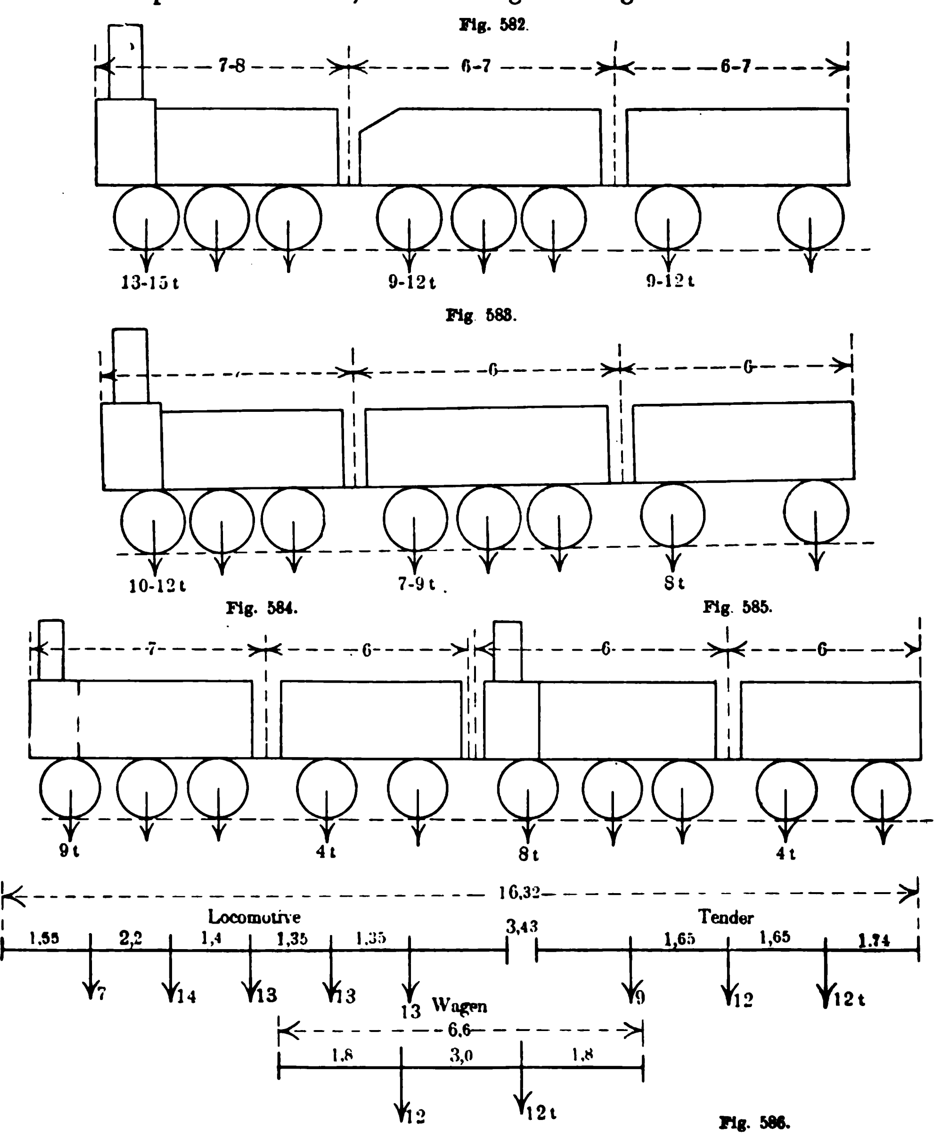
Für schmalspurige Bahnen mit 1 m Spurweite

$$p = 26\,l + 300 \text{ bis } 27\,l + 430 \text{ kg}.$$

Für die Spurweite von 0,75 m und geringer muss die vorstehende Zahl reduziert werden.

2. Verkehrslasten.

Wenn keine besonderen Belastungsbestimmungen vorliegen, so ist ein Eisenbahnzug von 2 Lokomotiven mit angehängten Wagen, soweit es die Spannweite zulässt, in Rechnung zu bringen.



Die Belastungen der Lokomotiven und Wagen dürften aus den beistehenden Skizzen für den allgemeinen Gebrauch genügen. Die Fig. 582 bis 583 stellen die allgemeinen Belastungen für die Lokomotiven, Tender und Wagen, I. und II. Ranges dar, und zwar für Normalspur 1,5 m; Fig. 584 für schmalspurige Bahnen, 1 m Spannweite; Fig. 585 für 0,75 m Spurweite. In Fig. 586 sind zugleich für Normalspur 1,5 m und Bahnen I. Ranges die Abstände der Achsen eingetragen.

B. Strassenbrücken.

1. Eigengewichte.

Wenn l m die freie Öffnung, b m die Breite der Brücke, so ist das Eigengewicht kleiner Fusswegbrücken in kg einschliesslich der Geländer

a) bei leichten Fusswegbrücken mit Bohlenbelag:

$$p = 120\,b + 1{,}5\,l^2 + 60 \text{ kg auf d. lauf. m},$$

b) bei schweren Fusswegbrücken mit Beschotterung, schwere Brückenbahn:

$$p = 350\,b + 1{,}75\,l^2 + 60 \text{ kg}.$$

Für Strassenbrücken von 7,5 m Breite ist (bei kleineren Breiten werden die Zahlen verhältnismässig reduziert):

a) bei Anwendung von doppelten eichenen Bohlen

$$p = 28\,l + 1300 \text{ kg},$$

b) bei Anwendung einer 0,2 starken Beschotterung oder Pflaster:

$$p = 42\,l + 3600 \text{ kg}.$$

2. Verkehrslasten.

a) Menschengedränge rechnet man im Durchschnitt 400 kg auf d. qm, bei sehr starkem Verkehr 560 kg auf d. qm, ungefähr 8 Menschen, die sich gerade noch fortbewegen können.

b) Wagenverkehr, zwei- und vierspännig, ein Gespann zu 800 kg. Die Belastungszahlen und die üblichen Verteilungsverhältnisse sind in den

Fig. 587.

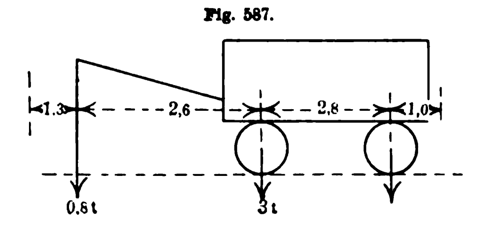
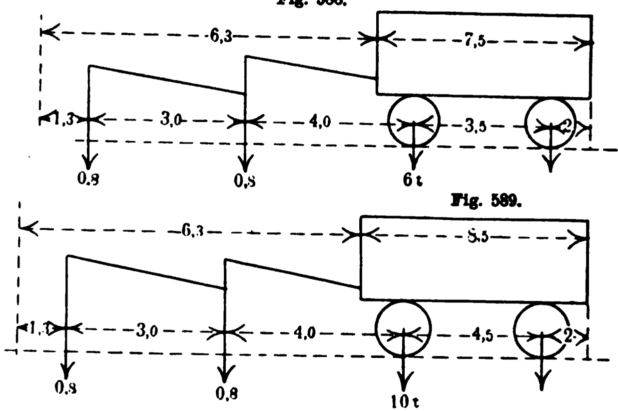


Fig. 587 bis 589 eingetragen. Fig. 587 für leichtere Erd- und Kieswagen, zweispännig; Fig. 588 für Brücken in Kunst- und gepflasterten Strassen; Fig. 589 für sehr schwere Fuhren aus Fabriken, Mühlen u. a. Im all-

gemeinen kann man auf 5 m Breite 2 Wagenreihen annehmen; die kleineren leichten Wagen haben nur 2,3 m Breite.

Fig. 588.

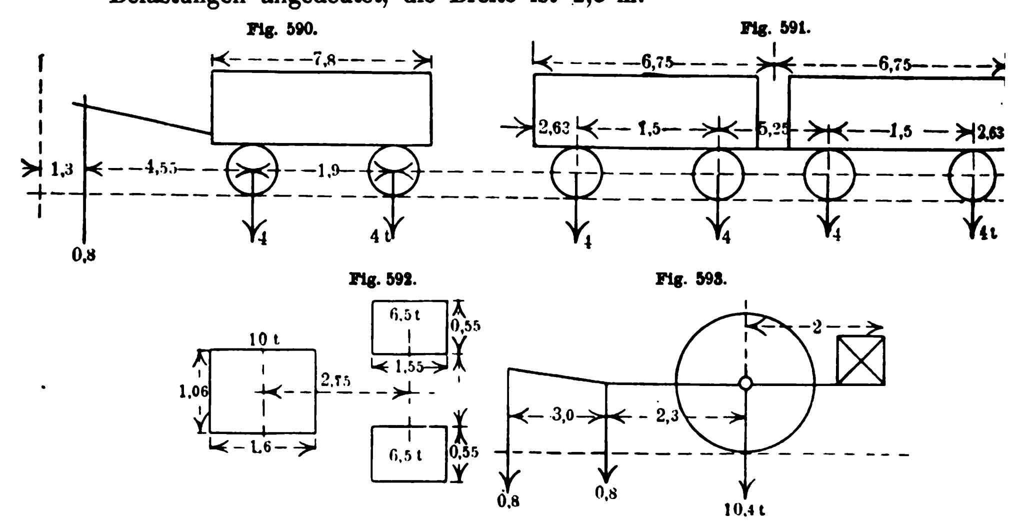
Fig. 589.



c) Pferdebahnwagen und Wagen für elektrischen Bahnbetrieb. In Fig. 590 ist ein Pferdebahnwagen, zweispännig, mit seinen Belastungen angedeutet, die Breite ist 2,3 m.

Fig. 590. Fig. 591.

Fig. 592. Fig. 593.



Bei elektrischem Betrieb rechnet man gewöhnlich 2 Wagen hintereinander, Fig. 591.

d) Die Fig. 592 und 593 stellen die Belastungen von Strassenwalzen dar. Der Betrieb der Walze, Fig. 593, kann auch sechs- bis achtspännig stattfinden. Fig. 592 zeigt den Grundriss einer Dampfwalze.

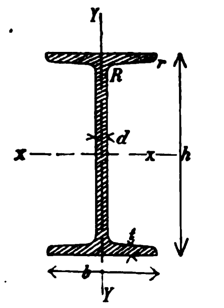
Anhang II.

Die Normalprofile.

Deutsche Normalprofile.

A. Normalprofile für I-Eisen.

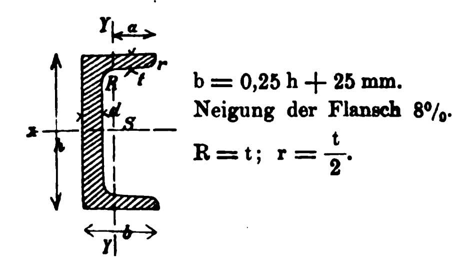
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	13
Profil No.	Abmessungen in mm				Querschnitt F qcm	Gewicht f. d. m G kg	Momente				Profil No.
							W	J	W	J	
							bezogen a. d. Achsen				
	h	b	d	t			x—x		y—y		
8	80	42	3,9	5,9	7,6	6,0	19,6	78,4	3,5	7,3	8
9	90	46	4,2	6,3	9,0	7,1	26,2	118	4,5	10,4	9
10	100	50	4,5	6,8	10,7	8,3	34,4	172	5,7	14,3	10
11	110	54	4,8	7,2	12,4	9,6	43,8	241	7,0	18,9	11
12	120	58	5,1	7,7	14,3	11,1	55,1	331	8,7	25,2	12
13	130	62	5,4	8,1	16,2	12,6	67,8	441	10,4	32,2	13
14	140	66	5,7	8,6	18,3	14,3	82,7	579	12,5	41,3	14
15	150	70	6,0	9,0	20,5	16,0	99,0	743	14,8	51,8	15
16	160	74	6,3	9,5	22,9	17,9	118	945	17,4	64,4	16
17	170	78	6,6	9,9	25,4	19,8	138	1177	20,2	78,7	17
18	180	82	6,9	10,4	28,0	21,9	162	1460	23,4	95,9	18
19	190	86	7,2	10,8	30,7	24,0	187	1779	26,8	115,2	19
20	200	90	7,5	11,3	33,7	26,2	216	2162	30,7	138	20
21	210	94	7,8	11,7	36,6	28,5	246	2587	34,6	163	21
22	220	98	8,1	12,2	39,8	31,0	281	3090	39,2	192	22
23	230	102	8,4	12,6	42,9	33,5	317	3642	43,9	224	23
24	240	106	8,7	13,1	46,4	36,2	357	4288	49,3	261	24
26	260	113	9,4	14,1	53,7	41,9	446	5798	60,3	341	26
28	280	119	10,1	15,2	61,4	47,9	547	7658	72,1	429	28
30	300	125	10,8	16,2	69,4	54,1	659	9888	84,8	530	30
32	320	131	11,5	17,3	78,2	61,0	789	12622	99,5	652	32
34	340	137	12,2	18,3	87,2	68,0	931	15827	115	789	34
36	360	143	13,0	19,5	97,5	76,1	1098	19766	134	956	36
38	380	149	13,7	20,5	107,5	83,9	1274	24208	153	1138	38
40	400	155	14,4	21,6	118,3	92,3	1472	29446	174	1349	40
42 1/2	425	163	15,3	23,0	133,0	103,7	1754	37266	205	1672	41 1/2
45	450	170	16,2	24,3	147,7	115,2	2053	46204	236	2004	45
50	500	185	18,0	27,0	180,2	140,5	2770	69245	310	2871	50
55	550	200	19,0	30,0	212,0	166,0	3602	99054	349	3602	55



Bis h = 250 mm ist
b = 0,4 h + 10 mm
d = 0,03 h + 1,5 mm
Für h > 250 mm ist
b = 0,3 h + 35 mm
d = 0,036 h
t = 1,5 d, R = d, r = 9,6 d, **Abrundungshalbmesser.**
Flansch-Neigung 14%.

B. Normalprofile für [-Eisen.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Profil No.	Abmessungen in mm				Querschnitt F qcm	Gewicht f. d. m. G kg	Momente				Zusammengesetzte][-Eisen. Kleinst. Trägheitsmoment bezogen a. d. Schwerachse parall. z. Steg.	Schwerpunktsabstand cm	Profil No.
							W	J	W	J			
							bezogen a. d. Achsen						
	h	b	d	t			x — x		x — y				
3	30	33	5	7	5,42	4,2	4,3	6	2,8	5	13,0	1,86	3
4	40	35	5	7	6,20	4,8	7,1	14	3,6	7	28,4	2,04	4
5	50	38	5	7	7,12	5,6	10,7	27	4,3	10	51,5	2,32	5
6½	65	42	5,5	7,5	9,05	7,1	17,9	58	5,9	16	74,7	2,66	6½
8	80	45	6	8	11,04	8,6	26,7	107	7,4	22	98,1	2,93	8
10	100	50	6	8,5	13,50	10,5	41,4	207	10,0	33	14,3	3,31	10
12	120	55	7	9	17,04	13,3	61,3	368	13,1	49	202	3,76	12
14	140	60	7	10	20,4	15,9	87,0	609	17,4	71	291	4,09	14
16	160	65	7,5	10,5	24,1	18,8	117	932	21,7	97	388	4,49	16
18	180	70	8	11	28,0	21,9	152	1364	26,6	130	508	4,90	18
20	200	75	8,5	11,5	32,3	25,2	193	1927	32,2	171	654	5,30	20
22	220	80	9	12,5	37,6	29,3	247	2712	39,9	226	863	5,66	22
26	260	90	10	14	48,4	37,8	374	4857	56,9	365	1376	6,42	26
30	300	100	10	16	58,8	45,9	538	8064	80,0	564	2151	7,05	30

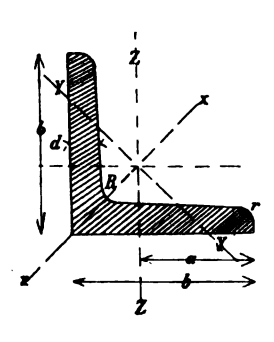


b = 0,25 h + 25 mm.
Neigung der Flansch 8%.
$R = t;\ r = \frac{t}{2}.$

C. Normalprofile für ⌊ gleichschenkelige Winkeleisen.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Profil No.	Abmessungen in mm		F qcm	G kg f. d. m	Momente							Vier zusammengesetzte ╬-Eisen J ohne Nietabzug	Schwerpunktsabstand a	Profil No.
					W	J	W	J	W_1	J_1	W_2			
					bezogen auf die Achsen									
	b	d			x—x		y—y		z—z					
1½	15	3	0,81	0,63	0,24	0,25	0,10	0,07	0,16	0,159	0,11	1,4	1,02	1½
		4	1,04	0,81	0,29	0,31	0.11	0,08	0,20	0,194	0,13	1,89	1,98	
2	20	3	1,11	0,87	0,45	0,64	0,19	0,17	0,29	0,404	0,22	3,26	1,39	2
		4	1,44	1,12	0,56	0,79	0,23	0,21	0,37	0,500	0,26	4,40	1,35	
2½	25	3	1,41	1,10	0,73	1,30	0,33	0,34	0,47	0,82	0,37	6,33	1,76	2½
		4	1,84	1,44	0,93	0,64	0,40	0,43	0,60	1,03	0,45	8,51	1,73	
3	30	4	2,24	1,75	1,38	2,9	0,61	0,77	0,88	1,85	0,69	14,5	2,10	3
		6	3,14	2,53	1,89	4,0	0,75	1,05	1,25	2,53	0,88	22,3	2,02	
3½	35	4	2,64	2,06	1,94	4,8	0,88	1,26	1,22	3,03	0.98	23,1	2.48	3½
		6	3,84	3,00	2,68	6,6	1,12	1,74	1,74	4,18	1,28	35,1	2,40	
		4	3,04	2,37	2,59	7,3	1,18	1,93	1,62	4,67	1,32	34,4	2,85	
4	40	6	4,44	3,46	3,60	10,2	1,54	2,68	3,32	6,40	1,75	52,2	2,77	4
		8	5,76	4,49	4,48	12,7	1,82	3,34	2,97	8,00	2,10	70,5	2,70	
		5	4,25	3,32	4,03	12,8	1,82	3,37	2,53	8,05	2,03	61,4	3,19	
4½	45	7	5,81	4,53	5,31	16,9	2,27	4,45	3,41	10,65	2,57	86,8	3,11	4½
		9	7,29	5,69	6,41	20,4	2,30	5,88	4,23	12,85	3,00	113	3,04	
		5	4,75	3,7	5,03	17,8	2,30	4,68	3,15	11,2	2,61	84,1	3,56	
5	50	7	6,51	5,1	6,64	23,5	2,89	6,18	4,27	14,85	3,28	119	3,49	5
		9	8,19	6,4	8,08	28,6	3,35	7,53	5,31	18,05	3,85	155	3,41	
		6	6,24	4,9	7,26	28,2	3,29	7,43	4,55	17,75	3,66	134	3,91	
5½	55	8	8,16	6,4	9,18	35,7	3,99	9,38	5,87	22,5	4,50	181	3,83	5½
		10	10,00	7,8	11,0	42,6	4,56	11,2	7,12	26,8	5,25	228	3,76	
		6	6,84	5,3	8,72	37,0	4,02	9,7	5,45	23,35	4,49	175	4,28	
6	60	8	8,96	7,0	11,1	47,2	4,90	12,4	7,05	29,7	5,54	234	4,21	6
		10	11,00	8,6	13,3	56,3	5,64	14,8	8,57	35,45	6,40	294	4,14	
		7	8,61	6,7	11,8	54	5,38	14,3	7,41	34,25	6,02	259	4,62	
6½	65	9	10,89	8,5	14,6	67	6,38	17,6	9,27	42,15	7,22	335	4,55	6½
		11	13,09	10,2	17,1	78	7,24	20,7	11,0	49,95	8,22	412	4,48	
		7	9,31	7,3	13,9	68	6,32	18,0	8,66	43,20	7,10	324	4,99	
7	70	9	11,79	9,2	17,2	85	7,58	22,2	10,9	53	8,56	418	4,92	7
		11	14,19	11,1	20,2	100	8,55	26,3	12,9	63	9,81	513	4.85	
		8	11,36	8,9	18,0	95	8,16	25,0	11,3	60	9,22	455	5,33	
7½	75	10	14,00	10,9	21,7	115	9,60	30,3	13,8	72	10,8	571	5,26	7½
		12	16,56	12,9	25,1	133	10,70	35,0	16,2	84	12,3	689	5,19	
		8	12,16	9,5	20,6	117	9,48	30,8	12,9	74	10,7	550	5,71	
8	80	10	15,00	11,7	24,9	141	11,1	37,1	15,9	69	12,6	693	5,63	8
		12	17,76	13,9	28,6	162	12,4	42,7	18,6	103	14,4	837	5,56	
		9	15,39	12,0	29,4	187	13.5	49,2	18,4	118	15,3	883	6,42	
9	90	11	18,59	14,5	34,9	222	15,6	58,4	22,0	140	17,6	1083	6,35	9
		13	21,71	16,9	39,9	254	17,4	66,8	25,5	160	19,7	1284	6,28	
		10	19,00	14,8	40,2	285	18,5	75,0	25,3	180	21,0	1346	7,13	
10	100	12	22,56	17,6	47,1	333	21,2	87,7	29,8	210	24,1	1621	7.06	10
		14	26,04	20,3	53,4	378	23,5	99,5	34.1	238	26,7	1897	6,99	
		10	21,00	16,4	49,4	385	22,9	101	30,9	243	25,9	1792	7,88	
11	100	12	24,96	19,5	57,7	450	26.2	118	36,3	284	29,9	2152	7,81	11
		14	28,84	22,5	65,9	513	29,3	135	41,7	324	33,5	2524	7,74	

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Profil No.	Abmessungen in mm		F qcm	G kg f. d. m	Momente							Vier zusammengesetzte ╬-Eisen J ohne Nietabzug	Schwerpunktsabstand s	Profil Nr.
					W	J	W	J	W_1	J_1	W_2			
					bezogen auf die Achsen									
	b	d			x—x		y—y		z—z					
		11	25,19	19,7	64,8	549	28,8	144	40,3	346	33,8	2560	8,59	
12	120	13	29,51	23,0	74,9	634	33,8	167	46,9	400	38,1	3030	8,52	12
		15	33,75	26,3	84,4	715	37,6	188	53,3	451	42,8	3510	8,45	
		12	29,76	23,2	83,1	763	38,6	201	51,5	482	43,4	3540	9,31	
13	130	14	34,44	26,9	94,4	867	43,0	229	59,3	548	48,3	4140	9,24	13
		16	39,04	30,5	106	970	47,3	256	66,8	613	53,7	4750	9,27	
		13	34,71	27,1	104	1025	47,9	270	64,7	647	54,5	4800	10,02	
14	140	15	39,75	31,0	117	1160	53,2	305	73,7	732	60,4	5550	9,95	14
		17	44,71	34,9	130	1290	58,0	339	82,5	814	66,6	6310	9,88	
		14	40,04	31,2	128	1360	59,3	358	80,0	859	67,0	6360	10,7	
15	150	16	45,44	35,4	144	1525	65,3	401	90,3	963	74,2	7270	10,7	15
		18	50,76	39,6	159	1685	71,1	443	100,4	1064	80,5	8200	10,6	
		15	45,75	35,7	156	1760	71,8	463	96,9	1112	81,2	8240	11,5	
16	160	17	51,51	40,2	174	1970	79,0	518	109,4	1244	89,6	9380	11,4	16
		19	57,19	44,6	191	2160	85,3	569	120,7	1365	97,6	10540	11,3	



$d_{min} = 0{,}1\ b$ für $b \gtreqless 100$ mm

$d_{min} = \frac{1}{11}\ b$ für $b \gtreqless 100$ mm

$R = \frac{d_{min} + d_{max}}{2}$; $r = \frac{R}{2}$.

Bemerk.: W_1 gegen seitliche Ausbiegung geschützt. W_2 gegen seitliche Ausbiegung nicht geschützt. — Die kleinsten Momente für zwei zusammengesetzte JL-Eisen findet man, indem man die Werte W_1 und J_1 der Spalte 10 und 11 verdoppelt.

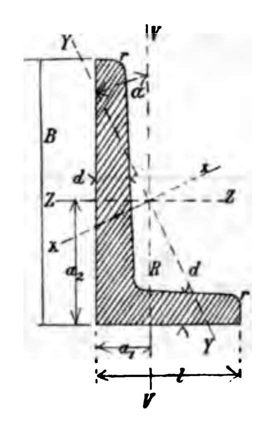
D. Normalprofile für ungleichschenkelige Winkeleisen.

a) Verhältnis der Schenkellängen $\frac{B}{b} = 1\frac{1}{2}$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Profil No.	Abmessungen in mm			F qcm	G kg f. d. m	Lage der Hauptachse	Momente bezogen auf die Achse								Zwei zusammengesetzte ⊥⊤-Eisen Kleinstes Trägheitsmoment	Schwerpunktsabstände cm		Profil No.
							x—x		Y—Y		Z—Z		V—V					
	B	b	d			tg a	W	J	W	J	W_1	W_2	w_1	w_2		a_1	a_2	
2|3	30	20	3	1,41	1,1	0,407	0,72	1,44	0,26	0,29	0,64	0,51	0,30	0,26	1,65	0,51	1,01	2|3
			4	1,84	1,4	0,382	0,90	1,79	0,38	0,39	0,83	0,64	0,39	0,35	2,24	0,55	1,05	
3|4½	45	30	4	2,84	2,2	0,421	2,18	6,63	0,79	1,29	1,94	1,56	0,93	0,77	7,22	0,75	1,50	3|4½
			5	3,50	2,7	0,400	2,61	7,91	0,99	1,64	2,38	1,87	1,13	0,96	9,33	0,79	1,54	
4|6	60	40	5	4,75	3,7	0,426	4,85	19,9	1,88	3,79	4,33	3,48	2,08	1,82	21,8	0,99	1,99	4|6
			7	6,51	5,1	0,400	6,4	26,0	2,56	5,39	5,88	4,60	2,80	2,48	31,0	1,06	2,06	
5|7½	75	50	7	8,26	6,4	0,417	10,4	53,2	3,97	10,5	9,39	7,48	4,49	3,84	59,9	1,26	2,51	5|7½
			9	10,44	8,1	0,398	12,7	64,9	5,21	13,6	11,8	9,13	5,60	5,05	78,2	1,33	2,58	
6½|10	100	65	9	10,04	11,0	0,399	23,7	160	8,5	30,1	21,5	17,0	9,82	8,25	170	1,62	3,37	6½|10
			11	16,94	13,2	0,384	28,0	188	10,5	36,9	25,7	20,1	11,70	10,2	211	1,69	3,44	
8|12	120	80	10	19,00	14,8	0,425	38,8	318	14,6	61,1	34,7	27,8	16,6	14,1	349	1,97	3,97	8|12
			12	22,56	17,6	0,412	45,5	368	17,6	73,8	41,0	32,7	19,6	17,0	422	2,05	4,05	
10|15	150	100	12	28,56	22,3	0,426	73,7	749	27,2	143,6	65,2	52,9	31,4	26,4	816	2,45	4,95	10|15
			14	33,04	25,8	0,418	83,9	851	31,5	167,4	73,1	60,3	36,0	30,5	958	2,52	5,02	

b) Verhältnis der Schenkellängen $\frac{B}{b} = 2$.

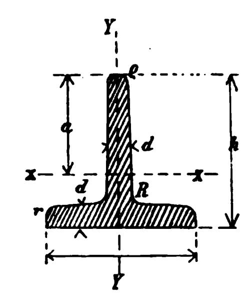
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Profil No.	Abmessungen in mm			F qcm	G kg f. d. m	Lage der Hauptachse	Momente bezogen auf die Achse								Zwei zusammengesetzte ⊐⊏-Eisen Kleinstes Trägheitsmoment	Schwerpunktsabstände cm		Profil No.
							x — x		Y — Y		Z — Z		V — V					
	B	b	d			tg α	W	J	W	J	W_1	W_2	w_1	w_2		a_1	a_2	
2|4	40	20	3	1,71	1,3	0,252	1,17	2,99	0,28	0,33	1,11	0,88	0,82	0,27	1,67	0,45	1,45	2|4
			4	2,24	1,8	0,231	1,50	3,79	0,38	0,44	1,44	1,13	0,41	0,37	2,29	0,49	1,49	
3|6	60	30	5	4,25	3,3	0,242	4,25	16,5	1,08	1,89	4,13	3,21	1,17	1,07	9,46	0,69	2,20	3|6
			7	5,81	4,5	0,215	5,63	21,7	1,50	2,66	5,59	4,26	1,57	1,48	13,8	0,77	2,27	
4|8	80	40	6	6,84	5,3	0,249	9,22	47,7	2,23	5,36	8,87	7,00	2,53	2,20	26,7	0,90	2,90	4|8
			8	8,96	7,0	0,229	11,8	60,6	3,02	7,16	11,5	8,94	3,25	2,98	36,6	0,97	2,97	
5|10	100	50	8	11,86	8,9	0,246	19,1	123	4,73	13,9	18,4	14,5	5,22	4,67	69,9	1,14	3,64	5|10
			10	14,00	10,9	0,231	23,2	148	5,88	17,4	22,5	17,6	6,34	5,80	89,8	1,21	3,71	
6½|13	130	65	10	18,50	14,4	0,241	40,5	340	9,79	38,0	39,0	30,7	11,1	9,69	192	1,47	4,72	6½|13
			12	21,96	17,1	0,236	47,2	396	12,0	45,9	46,0	35,7	13,0	11,8	234	1,54	4,79	
8|16	160	80	12	27,36	21,3	0,249	78,9	764	17,9	85,9	70,9	56,0	20,2	17,7	427	1,79	5,79	8|16
			14	31,64	24,7	0,240	84,6	870	20,8	99,6	81,9	64,1	28,1	20,5	505	1,87	5,87	
10|20	200	100	14	40,04	31,2	0,252	135,5	1757	32,7	196	130,0	100,2	37,1	32,3	967	2,20	7,20	10|20
			16	45,44	35,4	0,246	152,5	1970	37,5	223	147,1	115,0	41,8	37,0	1106	2,28	7,27	



$$d_{min} = \frac{b + B}{20},\ R = \frac{d_{min} + d_{max}}{2},\ r = \frac{R}{2}$$

x — x, y — y Hauptachsen.

W_1 hochliegend, gegen seitliche Ausbiegung geschützt;
W_2 „ nicht geschützt.
w_1 flachliegend, gegen seitliche Ausbiegung geschützt;
w_2 „ nicht geschützt.



E. Normalprofile für ⊥-Eisen.

a) Verhältnis der Höhe zur Breite $\frac{h}{b} = 1$.

Neigungen im Fuss und Steg 2%.

$d = 0{,}1\ h + 1\ mm;\ R = d,\ r = \frac{R}{2};\ \rho = \frac{R}{4}$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Profil No	Abmessungen in mm			F qcm	G kg f. d. m	Momente bezogen auf die Achse				Schwerpunkts-Abstand	⊥ ⊤ Kleinstes J	Profil No.
						x — x		y — y				
	b	h	d			W	J	W	J	a cm		
2|2	20	20	3	1,11	0,9	0,29	0,4	0,2	0,2	1,39	0,41	2|2
2½|2½	25	25	3,5	1,63	1,3	0,53	0,93	0,37	0,46	1,75	0,92	2½|2½
3|3	30	30	4	2,24	1,7	0,88	1,86	0,61	0,91	2,10	1,83	3|3
3½|3½	35	35	4,5	2,95	2,3	1,36	3,34	0,93	1,63	2,46	3,26	3½|3½
4|4	40	40	5	3,75	2,9	1,97	5,56	1,35	2,70	2,82	5,40	4|4
4½|4½	45	45	5,5	4,65	3,6	2,76	8,74	1,88	4,23	3,17	8,46	4½|4½
5|5	50	50	6	5,64	4,4	3,71	13,1	2,54	6,33	3,53	12,7	5|5
6|6	60	60	7	7,91	6,2	6,23	26,4	4,25	12,8	4,24	25,5	6|6
7|7	70	70	8	10,6	8,2	9,76	48,4	6,62	23,1	4,96	46,3	7|7
8|8	80	80	9	13,6	10,6	14,4	81,5	9,70	38,8	5,67	77,6	8|8
9|9	90	90	10	17,0	13,3	20,3	129	13,6	61,4	6,38	123	9|9
10|10	100	100	11	20,8	16,2	27,5	195	18,5	92,7	7,10	185	10|10
12|12	120	120	13	29,5	23,0	54,5	389	31,5	189	8,52	378	12|12
14|14	140	140	15	39,8	31,0	73,7	734	49,5	347	9,95	693	14|14

b) Verhältnis der Höhe zur Breite $\frac{h}{b} = 2$.

Neigung im Fuss 2%, im Steg 4%.

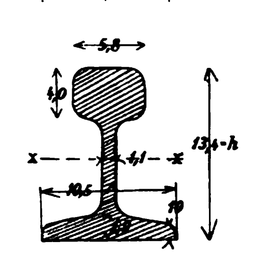
$d = 0{,}15\ h + 1$ mm.

$R = d;\ r = \frac{R}{2};\ \rho = \frac{R}{4}$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Profil No.	Abmessungen in mm			F qcm	G kg f. d. m	Momente bezogen auf die Achse				Schwerpunkts-Abstand	Kleinstes J	Profil No.
						x—x		y—y				
	b	h	d			W	J	W	J	a cm		
6|3	60	30	5,5	4,64	3,6	3,33	9,98	1,26	2,91	2,30	10,4	6|3
7|3½	70	35	6	5,94	4,6	4,94	17,3	1,90	5,12	2,69	18,2	7|3½
8|4	80	40	7	7,91	6,2	7,52	30,1	2,89	8,87	3,07	31,4	8|4
9|4½	90	45	8	10,16	7,9	10,9	49,0	4,18	14,4	3,45	50,6	9|4½
10|5	100	50	8,5	12,02	9,4	14,8	71,3	5,51	21,2	3,84	74,5	10|5
12|6	120	60	10	17,0	13,8	24,2	145	9,35	43,2	4,62	152	12|6
14|7	140	70	11,5	22,8	17,8	37,8	265	14,7	79,1	5,39	277	14|7
16|8	160	80	13	29,5	23,0	55,8	446	21,7	134	6,17	465	16|8
18|9	180	90	14,5	37,0	26,9	78,8	709	30,5	213	6,95	737	18|9
20|10	200	100	16	45,4	35,4	107	1073	41,8	323	7,72	1118	20|10

F. Eisenbahnschienen.

Annähernd $J\ cm = 0{,}033\ h^4$; $W\ cm = 0{,}064\ h^3$; $F\ qcm = 0{,}237\ h^2$; $G = 0{,}186\ h^2$ kg a. d. lauf. m.



h cm	F qcm	G kg a. d. lauf. m	Horizontale Achse x		Vertikale Achse	
			J	W	J	W
13,4	42,53	33,40	1036,60	154,4	150,7	28,7
13,08	42,00	32,66	919,00	140,4	149,7	—
11,80	39,00	29,80	691.59	117,5	140,8	—
10,46	34,20	26.10	470,16	90,0	121,7	—

G. Normalprofile für ⅂-Eisen.

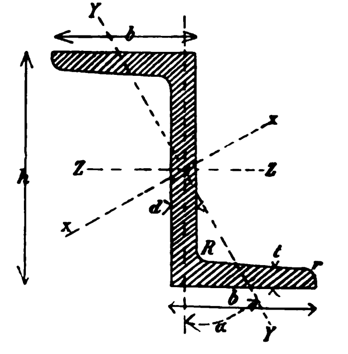
x — x und y — y Hauptachsen.

$b = 0{,}25\ h + 30$ mm.

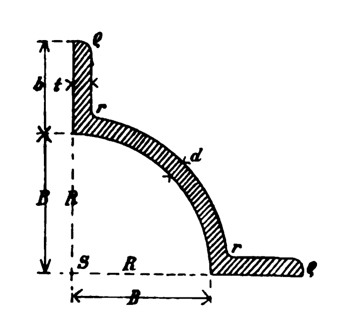
$d = 0{,}035\ h + 3$ mm.

$t = 0{,}05\ h + 3$ mm.

$R = t;\ r = \frac{t}{2}$.



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Profil No.	Abmessungen in mm				F qcm	G kg f. d. m	Lage der Hauptachse tg α	Momente bezogen auf die Achse						Profil No.
								x — x		y — y		z — z		
	h	b	d	t				W	J	W	J	W_1	W_2	
3	30	38	4	4,5	4,26	3,3	1,69	4,75	18,3	1,14	1,61	4,0	1,29	3
4	40	40	4,5	5	5,35	4,2	1,20	6,76	28,3	1,79	3,00	6,7	2,19	4
5	50	43	5	5,5	6,68	5,2	0,96	9,80	45,2	2,69	5,17	10,4	3,53	5
6	60	45	5	6	7,80	6,1	0,80	13,60	67,9	3,34	7,07	14,7	4,70	6
8	80	50	6	7	10,96	8,6	0,61	24,4	142,9	5,82	13,6	27,0	9,15	8
10	100	55	6,5	8	14,26	11,1	0,52	39,7	272	8,14	21,1	43,8	14,2	10
12	120	60	7	9	17,94	14,0	0,46	60,1	474	10,7	30,0	65,9	20,2	12
14	140	65	8	10	22,60	17,6	0,42	88,0	773	14,2	44,6	95,1	28,4	14
16	160	70	8,5	11	27,13	21,2	0,39	120,5	1193	16,9	58,8	130,3	36,6	16



W_1 Widerstandsmoment, wenn der Träger gegen seitliche Ausbiegung geschützt ist.

W_2 Widerstandsmoment, wenn der Träger gegen seitliche Ausbiegung nicht geschützt ist.

H. Normalprofile für Quadranteneisen.

$b = 0,2\,R + 25$ mm.

$r = 0,12\,R;\ \rho = 0,06\,R.$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Profil No.	Abmessungen in mm				Der vollen Röhre		Trägheitsmoment J der vollen Röhre für jede Schwerachse	Volle Röhre		Profil No.
								grösstes	kleinstes	
					Fläche F qcm	Gewicht G kg a. d. m		Widerstands-moment		
	R	b	d	t				W	w	
5	50	35	4	6	29,8	23,4	573	90	66	5
			8	8	48,0	37,5	901	135	101	
7½	75	40	6	8	54,9	42.9	2046	235	173	7½
			10	10	80.2	62.8	2957	329	246	
10	100	45	8	10	88,1	68,9	5434	499	265	10
			12	12	120,4	94,0	7395	660	490	
12½	125	50	10	12	129.3	101,0	11970	907	665	12½
			14	14	168,8	131,6	15590	1155	857	
15	150	55	12	14	178,9	139,6	23200	1497	1100	15
			18	17	248,6	194,0	32280	2030	1509	

J. Flach- und Trägerwellbleche.

a) Normalprofile.

Profil No.	Tiefe der Welle	Eine halbe Breite der Welle	Blechstärke	Widerstands-Moment W	Querschnitt	Gewicht f. d. qm (ca.)	Gewöhnliche Breite der Tafeln
				für 1 m Breite			
	mm	mm	mm	cm	qmm	kg	
10	10	10	0,5	1,85	785	6,3	660
15	15	15	1	5,53	1567	12,5	660
20	20	20	1	7,50	1570	12,5	660
25	25	25	1	9,44	1571	12,5	575
30	30	30	1	11,4	1576	12,5	570
45	45	45	1	17,3	1570	12,5	675
45	45	45	1,5	25,6	2355	18,8	675
45	45	45	2,0	33,8	3140	25,0	675
50	50	50	1	19,2	1571	12,5	650
50	50	50	2	37,7	3141	25,0	650
60	60	60	1	23	1571	12,5	660
60	60	60	2	45	3141	25,0	660
70	70	70	1	27	1571	12,5	630
70	70	70	2	53	3142	25,0	630
70	70	70	3	68	4713	37,5	630
80	80	80	1	31	1571	12,5	640
80	80	80	2	61	3142	25,0	640
80	80	80	3	91	4714	37,5	640
90	90	90	2	70	3142	25,0	630
90	90	90	3	102	4712	37,5	630
90	90	90	4	136	6283	50,0	630
100	100	100	2	77	3142	25,0	700
100	100	100	3	114	4712	37,5	700
100	100	100	4	151	6283	50,0	700
110	110	110	2	85	3142	25,0	660
110	110	110	3	125	4712	37,5	660
110	110	110	4	166	6283	50,0	660
120	120	120	3	137	4712	37,5	600
120	120	120	4	182	6283	50,0	600
120	120	120	5	226	7854	62,5	600
130	130	130	3	149	4712	37,5	650
130	130	130	4	198	6283	50,0	650
130	130	130	5	246	7854	62,5	650
140	140	140	3	161	4712	37,5	700
140	140	140	4	214	6283	50,0	700
140	140	140	5	266	7854	62,5	700
150	150	150	3	174	4712	37,5	750
150	150	150	4	221	6283	50,0	750
150	150	150	5	285	7854	62,5	750

b) Flache Wellbleche.

Profil No.	Wellen: Breite mm	Wellen: Höhe mm	Für 1 mm Blechstärke: Gewicht (ca.) f. d. qm	Für 1 mm Blechstärke: Querschnitt einer Welle qmm	Momente J (einer Welle bezogen auf cm)	Momente W (einer Welle bezogen auf cm)
1	60	20	10	76	4,1	0,41
2	75	25	9,25	95	6,2	0,50
3	85	25	9,5	110	7,6	0,61
4	122	29	8,8	140	11,1	0,78
5	135	35	9,1	150	18,7	1,07
6	150	40	9,2	176	28,3	1,41
7	230	75	9,9	290	17,0	4,54

c) Trägerwellbleche.

8	68	34	12,5	106	14	0,84
9	90	45	12,5	141	35	1,55
10	90	50	13	151	46	1,83
11	90	55	14	161	58	2,10
12	90	60	15	171	73	2,44
13	90	65	15,5	183	90	2,76
14	90	70	16	191	109	3,13
15	90	75	16,5	201	133	3,54
16	100	50	12,5	157	47	1,88
17	100	60	14,25	177	78	2,61
18	100	65	15	187	97	2,98
19	100	70	15,8	197	116	3,33
20	100	75	16.6	207	135	3,60
21	100	80	17,5	217	162	4,05
22	100	85	17,7	227	189	4,45
23	100	90	18,4	237	218	4,84
24	100	95	19,5	247	250	5,27
25	100	100	20,5	257	285	5,70
26	120	80	14,64	228	178	4,46
27	120	90	16,55	248	242	5,38
28	120	100	17,50	268	319	6,38
29	120	110	19,4	288	407	7,40
30	160	80	12,5	251	176	4,90

Anhang III.

Tabellen der 2. und 3. Potenzen und Wurzeln, Reciproken, Kreisumfänge und Inhalte und der Logarithmen.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	log n
$^1/_{12}$ = 0,083333	0,00694	0,00058	0,28868	0,43679	12,00000	0,2618	0,00545	0,92082 — 2
$^5/_{12}$ = 0,416667	0,17360	0,07234	0,64550	0,74690	2,40000	1,3090	0,13636	0,61979 — 1
$^7/_{12}$ = 0,583333	0,34028	0,19849	0,76377	0,83555	1,71429	1,8326	0,26787	0,76592 — 1
$^1/_{10}$ = 0,100000	0,01000	0,00100	0,31623	0,46416	10,00000	0,3142	0,00785	0,00000 — 1
$^3/_{10}$ = 0,300000	0,09000	0,02700	0,54899	0,66943	3,33333	0,9425	0,06858	0,47712 — 1
$^7/_{10}$ = 0,700000	0,49000	0,34300	0,83666	0,86769	1,42857	2,1991	0,38485	0,84510 — 1
$^9/_{10}$ = 0,900000	0,81000	0,72900	0,94869	0,96325	1,11111	2,8274	0,63617	0,95424 — 1
$^1/_9$ = 0,111111	0,01235	0,00137	0,33333	0,48075	9,00000	0,3491	0,09696	0,04576 — 1
$^2/_9$ = 0,222222	0,04938	0,01098	0,47141	0,60571	4,50000	0,6981	0,03879	0,34679 — 1
$^4/_9$ = 0,444444	0,19753	0,08779	0,66667	0,76314	2,25000	1,3963	0,15514	0,64782 — 1
$^5/_9$ = 0,555556	0,30864	0,17147	0,74536	0,82206	1,80000	1,7453	0,24241	0,74473 — 1
$^7/_9$ = 0,777778	0,60494	0,47051	0,88192	0,91964	1,28571	2,4434	0,47512	0,89086 — 1
$^8/_9$ = 0,888889	0,79012	0,70233	0,94281	0,96150	1,12500	2,7925	0,62056	0,94885 — 1
$^1/_8$ = 0,125000	0,01563	0,00195	0,36179	0,50000	8,00000	0,3927	0,01227	0,09691 — 1
$^3/_8$ = 0,375000	0,14063	0,05273	0,61237	0,68867	2,66667	1,1781	0,11045	0,57403 — 1
$^5/_8$ = 0,625000	0,39063	0,24414	0,79057	0,85499	1,60000	1,9635	0,30680	0,79588 — 1
$^7/_8$ = 0,875000	0,76563	0,66992	0,93541	0,95647	1,14286	2,7489	0,60132	0,94201 — 1
$^1/_7$ = 0,142857	0,02041	0,00292	0,37796	0,52276	7,00000	0,4488	0,01603	0,15490 — 1
$^2/_7$ = 0,285714	0,08168	0,02332	0,53576	0,65964	3,50000	0,8976	0,06471	0,45793 — 1
$^3/_7$ = 0,428571	0,18367	0,07871	0,65465	0,75395	2,33333	1,3464	0,14426	0,63202 — 1
$^4/_7$ = 0,571428	0,32653	0,18659	0,75593	0,82983	1,75000	1,7952	0,25646	0,75696 — 1
$^5/_7$ = 0,714285	0,51020	0,36443	0,84516	0,89391	1,40000	2,2440	0,40071	0,85387 — 1
$^6/_7$ = 0,857142	0,73469	0,62974	0,92582	0,94992	1,16667	2,6928	0,57703	0,93305 — 1
$^1/_6$ = 0,166667	0,02778	0,00463	0,40825	0,55032	6,00000	0,5236	0,02182	0,22185 — 1
$^5/_6$ = 0,833333	0,69444	0,57850	0,91287	0,94104	1,20000	2,6180	0,54542	0,92082 — 1
$^1/_5$ = 0,200000	0,04000	0,00800	0,44721	0,58480	5,00000	0,6283	0,03142	0,30103 — 1
$^2/_5$ = 0,400000	0,16000	0,06400	0,63246	0,73681	2,50000	1,2566	0,12566	0,60206 — 1
$^3/_5$ = 0,600000	0,36000	0,21600	0,77460	0,84343	1,66667	1,8850	0,28274	0,77815 — 1
$^4/_5$ = 0,800000	0,64000	0,51200	0,89443	0,92832	1,25000	2,5132	0,50265	0,90309 — 1
$^1/_4$ = 0,250000	0,06250	0,01563	0,50000	0,62996	4,00000	0,7854	0,04909	0,39794 — 1
$^3/_4$ = 0,750000	0,56250	0,42188	0,86603	0,90856	1,33333	2,3562	0,44179	0,87506 — 1
$^1/_3$ = 0,333333	0,11111	0,03704	0,57735	0,69336	3,00000	1,0472	0,08727	0,52288 — 1
$^2/_3$ = 0,666667	0,44444	0,29630	0,81650	0,87358	1,50000	2,0944	0,34907	0,82391 — 1
$^1/_2$ = 0,500000	0,25000	0,12500	0,70711	0,79370	2,00000	1,5708	0,19635	0,69897 — 1

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	log n	lognat n
1	1	1	1,0000	1,0000	1,000000	3,142	0,7854	0,00000	0,0000
2	4	8	1,4142	1,2599	0,500000	6,283	3,1416	0,30103	0,6931
3	9	27	1,7321	1,4422	0,333333	9,425	7,0686	0,47712	1,0986
4	16	64	2,0000	1,5874	0,250000	12,566	12.5664	0,60206	1,3863
5	25	125	2,2361	1,7100	0,200000	15,708	19,6350	0,69897	1,6094
6	36	216	2,4495	1,8171	0,166667	18,850	28,2743	0,77815	1,7918
7	49	343	2,6458	1,9129	0,142857	21,991	38,4845	0,84510	1,9459
8	64	512	2,8284	2,0000	0,125000	25,133	50,2655	0,90309	2,0794
9	81	729	3,0000	2,0801	0,111111	28,274	63,6173	0,95424	2,1972
10	100	1000	3,1623	2,1544	0,100000	31,416	78,5398	1,00000	2,3026
11	121	1331	3,3166	2,2240	0,090909	34,558	95,0332	1,04139	2,3979
12	144	1728	3,4641	2,2894	0,083333	37,699	113,0973	1,07918	2,4849
13	169	2197	3,6056	2,3513	0,076923	40,841	132,7323	1,11394	2,5649
14	196	2744	3,7417	2,4101	0,071429	43,982	153,9380	1,14613	2,6391
15	225	3375	3,8730	2,4662	0,066667	47,124	176,7146	1,17609	2,7081
16	256	4096	4,0000	2,5198	0,062500	50,266	201,0619	1,20412	2,7726
17	289	4913	4,1231	2,5713	0,058824	53,407	226,9801	1,23045	2,8332
18	324	5832	4,2426	2,6207	0,055556	56,549	254,4689	1,25527	2.8904
19	361	6859	4,3589	2,6684	0,052632	59,690	283,5287	1,27875	2,9444
20	400	8000	4,4721	2,7144	0,050000	62,832	314,1592	1,30103	2,9957
21	441	9261	4,5826	2,7589	0,047619	65,973	346,3605	1,32222	3,0445
22	484	10648	4,6904	2,8020	0,045455	69,115	380,1326	1,34242	3,0910
23	529	12167	4,7958	2,8439	0,043478	72,257	415,4755	1,36173	3,1355
24	576	13824	4,8990	2,8845	0,041667	75,398	452,3893	1,38021	3,1781
25	625	15625	5,0000	2,9240	0,040000	78,540	490,8738	1,39794	3,2189
26	676	17576	5,0990	2,9625	0,038462	81,681	530,9291	1,41497	3,2581
27	729	19683	5,1962	3,0000	0,037037	84,823	572,5552	1,43136	3,2958
28	784	21952	5.2915	3,0366	0,035714	87,965	615,7521	1,44716	3,3322
29	841	24389	5,3852	3,0723	0,034483	91,106	660,5198	1,46240	3,3673
30	900	27000	5,4772	3,1072	0,033333	94,248	706,8582	1,47712	3,4012
31	961	29791	5,5678	3,1414	0,032258	97,389	754,7675	1,49136	3,4340
32	1024	32768	5,6569	3,1748	0,031250	100,531	804,2476	1,50515	3,4657
33	1089	35937	5,7446	3,2075	0,030303	103,673	855,2985	1,51851	3,4965
34	1156	39304	5,8310	3,2396	0,029412	106,814	907,9202	1,53148	3,5264
35	1225	42875	5,9161	3,2711	0,028571	109,956	962,1126	1,54407	3,5553
36	1296	46656	6,0000	3,3019	0,027778	113,097	1017,876	1,55630	3,5835
37	1369	50653	6,0828	3,3322	0,027027	116,239	1075,210	1,56820	3,6109
38	1444	54872	6,1644	3,3620	0,026316	119,381	1134,115	1,57978	3,6376
39	1521	59319	6,2450	3,3912	0,025641	122,522	1194,590	1,59106	3,6636
40	1600	64000	6,3246	3,4200	0,025000	125,664	1256,637	1,60206	3,6889
41	1681	68921	6,4031	3,4482	0,024390	128,805	1320,252	1,61278	3,7136
42	1764	74088	6,4807	3,4760	0,023810	131,947	1385,442	1,62325	3,7377
43	1849	79507	6,5574	3,5034	0,023256	135,088	1452,201	1,63347	3,7612
44	1936	85184	6,6332	3,5303	0,022727	138,230	1520,530	1,64345	3,7842
45	2025	91125	6,7082	3,5569	0,022222	141,372	1590,431	1,65321	3,8067
46	2116	97336	6,7823	3,5830	0,021739	144,513	1661,902	1,66276	3,8286
47	2209	103823	6,8557	3,6088	0,021277	147,655	1734,944	1,67210	3,8501
48	2304	110592	6,9282	3,6342	0,020833	150,796	1809,557	1,68124	3,8712
49	2401	117649	7,0000	3,6593	0,020408	153,938	1885,741	1,69020	3,8918
50	2500	125000	7,0711	3,6840	0,020000	157,080	1963,495	1,69897	3,9120

n	n²	n³	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	log n	lognat n
51	2601	132651	7,1414	3,7084	0,019608	160,22	2042,82	1,70757	3,9318
52	2704	140608	7,2111	3,7325	0,019231	163,36	2123,72	1,71600	3,9512
53	2809	148877	7,2801	3,7563	0,018868	166,50	2206,18	1,72428	3,9703
54	2916	157464	7,3485	3,7798	0,018519	169,65	2290,22	1,73239	3,9890
55	3025	166375	7,4162	3,8030	0,018182	172,79	2375,83	1,74036	4,0073
56	3136	175616	7,4833	3,8259	0,017857	175,93	2463,01	1,74819	4,0254
57	3249	185193	7,5498	3,8485	0,017544	179,07	2551,76	1,75587	4,0431
58	3364	195112	7,6158	3,8709	0,017241	182,21	2642,08	1,76343	4.0604
59	3481	205379	7,6811	3,8930	0,016949	185,35	2733,97	1,77085	4,0775
60	3600	216000	7,7460	3,9149	0,016667	188,50	2827,43	1,77815	4,0943
61	3721	226981	7,8102	3,9365	0,016393	191,64	2922,47	1,78533	4,1109
62	3844	238328	7,8740	3,9579	0,016129	194,78	3019,07	1,79239	4,1271
63	3969	250047	7,9373	3,9791	0,015873	197,92	3117,25	1,79934	4,1431
64	4096	262144	8,0000	4,0000	0,015625	201,06	3216,99	1,80618	4,1589
65	4225	274625	8,0623	4,0207	0,015385	204,20	3318,31	1,81291	4,1744
66	4356	287496	8,1240	4,0412	0,015152	207,35	3421,19	1,81954	4,1897
67	4489	300763	8,1854	4,0615	0,014925	210,49	3525,66	1,82607	4,2047
68	4624	314432	8,2462	4,0817	0,014706	213,63	3631,69	1,83251	4,2195
69	4761	328509	8,3066	4,1016	0,014493	216,77	3739,29	1,83885	4,2341
70	4900	343000	8,3666	4,1213	0,014286	219,91	3848,46	1,84510	4,2485
71	5041	357911	8,4261	4,1408	0,014085	223,05	3959,19	1,85126	4,2627
72	5184	373248	8,4853	4,1602	0,013889	226,19	4071,50	1,85733	4,2767
73	5329	389017	8,5440	4,1793	0,013699	229,34	4185,39	1,86332	4,2905
74	5476	405224	8,6023	4,1983	0,013514	232,48	4300,84	1,86923	4,3041
75	5625	421875	8,6603	4,2172	0,013333	235,62	4417,86	1,87506	4,3175
76	5776	438976	8,7178	4,2358	0.013158	238,76	4536,46	1,88081	4,3307
77	5929	456533	8,7750	4,2543	0,012987	241,90	4656,63	1,88649	4,3438
78	6084	474552	8,8318	4.2727	0,012821	245,04	4778,36	1,89209	4,3567
79	6241	493039	8,8882	4,2908	0,012658	248,19	4901,67	1,89763	4,3694
80	6400	512000	8.9443	4,3089	0,012500	251,33	5026,55	1,90309	4,3820
81	6561	531441	9,0000	4,3267	0,012346	254.47	5153,00	1,90849	4,3944
82	6724	551368	9,0554	4,3445	0,012195	257,61	5281,02	1,91381	4,4067
83	6889	571787	9,1104	4,3621	0,012048	260,75	5410,61	1,91908	4,4188
84	7056	592704	9,1652	4,3795	0,011905	263,89	5541,77	1,92428	4,4308
85	7225	614125	9,2195	4,3968	0,011765	267.04	5674,50	1,92942	4,4427
86	7396	636056	9,2736	4,4140	0,011628	270,18	5808,80	1,93450	4,4543
87	7569	658503	9,3274	4,4310	0,011494	273,32	5944,68	1,93952	4,4659
88	7744	681472	9,3808	4,4480	0,011364	276,46	6082,12	1,94448	4,4773
89	7921	704969	9,4340	4,4647	0,011236	279,60	6221,14	1,94939	4,4886
90	8100	729000	9,4868	4,4814	0,011111	282,74	6361,73	1,95424	4,4998
91	8281	753571	9,5394	4,4979	0,010989	285,88	6503,88	1,95904	4,5109
92	8464	778688	9,5917	4,5144	0,010870	289,03	6647,61	1,96379	4,5218
93	8649	804357	9,6437	4,5307	0,010753	292,17	6792,91	1,96848	4,5326
94	8836	830584	9,6954	4,5468	0,010638	295,31	6939,78	1,97313	4,5433
95	9025	857375	9,7468	4 5629	0,010526	298.45	7088,22	1,97772	4,5539
96	9216	884736	9,7980	4,5789	0,010417	301,59	7238,23	1,98227	4,5643
97	9409	912673	9,8489	4,5947	0,010309	304,73	7389,81	1,98677	4,5747
98	9604	941192	9,8995	4,6104	0,010204	307,88	7542.96	1,99123	4,5850
99	9801	970299	9,9499	4,6261	0,010101	311,02	7697,69	1,99564	4,5951
100	10000	1000000	10,0000	4.6416	0,010000	314,16	7853,98	2.00000	4,6052

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	log n
101	10201	1030301	10,0499	4,6570	0,009901	317,30	8011,85	2,00432
102	10404	1061208	10,0995	4,6723	0,009804	320,44	8171,28	2,00860
103	10609	1092727	10,1489	4,6875	0,009709	323,58	8332,29	2,01284
104	10816	1124864	10,1980	4,7027	0,009615	326,73	8494,87	2,01703
105	11025	1157625	10,2470	4,7177	0,009524	329,87	8659,01	2,02119
106	11236	1191016	10,2956	4,7326	0,009434	333,01	8824,73	2,02531
107	11449	1225043	10,3441	4,7475	0,009346	336,15	8992,02	2,02938
108	11664	1259712	10,3923	4,7622	0,009259	339,29	9160,88	2,03342
109	11881	1295029	10,4403	4,7769	0,009174	342,43	9331,32	2,03743
110	12100	1331000	10,4881	4,7914	0,009091	345,58	9503,32	2,04139
111	12321	1367631	10,5357	4,8059	0,009009	348,72	9676,89	2,04532
112	12544	1404928	10,5830	4,8203	0,008929	351,86	9852,03	2,04922
113	12769	1442897	10,6301	4,8346	0,008850	355,00	10028,7	2,05308
114	12996	1481544	10,6771	4,8488	0,008772	358,14	10207,0	2,05690
115	13225	1520875	10,7238	4,8629	0,008696	361,28	10386,9	2,06070
116	13456	1560896	10,7703	4,8770	0,008621	364,42	10568,3	2,06446
117	13689	1601613	10,8167	4,8910	0,008547	367,57	10751,3	2,06819
118	13924	1643032	10,8628	4,9049	0,008475	370,71	10935,9	2,07188
119	14161	1685159	10,9087	4,9187	0,008403	373,85	11122,0	2,07555
120	14400	1728000	10,9545	4,9324	0,008333	376,99	11309,7	2,07918
121	14641	1771561	11,0000	4,9461	0,008264	380,13	11499,0	2,08279
122	14884	1815848	11,0454	4,9597	0,008197	383,27	11689,9	2,08636
123	15129	1860867	11,0905	4,9732	0,008130	386,42	11882,3	2,08991
124	15376	1906624	11,1355	4,9866	0,008065	389,56	12076,3	2,09342
125	15625	1953125	11,1803	5,0000	0,008000	392,70	12271,8	2,09691
126	15876	2000376	11,2250	5,0133	0,007937	395,84	12469,0	2,10037
127	16129	2048383	11,2694	5,0265	0,007874	398,98	12667,7	2,10380
128	16384	2097152	11,3137	5,0397	0,007813	402,12	12868,0	2,10721
129	16641	2146689	11,3578	5,0528	0,007752	405,27	13069,8	2,11059
130	16900	2197000	11,4018	5,0658	0,007692	408,41	13273,2	2,11394
131	17161	2248091	11,4455	5,0788	0,007634	411,55	13478,2	2,11727
132	17424	2299968	11,4891	5,0916	0,007576	414,69	13684,8	2,12057
133	17689	2352637	11,5326	5,1045	0,007519	417,83	13892,9	2,12385
134	17956	2406104	11,5758	5,1172	0,007463	420,97	14102,6	2,12710
135	18225	2460375	11,6190	5,1299	0,007407	424,12	14313,9	2,13033
136	18496	2515456	11,6619	5,1426	0,007353	427,26	14526,7	2,13354
137	18769	2571353	11,7047	5,1551	0,007299	430,40	14741,1	2,13672
138	19044	2628072	11,7473	5,1676	0,007246	433,54	14957,1	2,13988
139	19321	2685619	11,7898	5,1801	0,007194	436,68	15174,7	2,14301
140	19600	2744000	11,8322	5,1925	0,007143	439,82	15393,8	2,14613
141	19881	2803221	11,8743	5,2048	0,007092	442,96	15614,5	2,14922
142	20164	2863288	11,9164	5,2171	0,007042	446,11	15836,8	2,15229
143	20449	2924207	11,9583	5,2293	0,006993	449,25	16060,6	2,15534
144	20736	2985984	12,0000	5,2415	0,006944	452,39	16286,0	2,15836
145	21025	3048625	12,0416	5,2536	0,006897	455,53	16513,0	2,16137
146	21316	3112136	12,0830	5,2656	0,006849	458,67	16741,5	2,16435
147	21609	3176523	12,1244	5,2776	0,006803	461,81	16971,7	2,16732
148	21904	3241792	12,1655	5,2896	0,006757	464,96	17203,4	2,17026
149	22201	3307949	12,2066	5,3015	0,006711	468,10	17436,6	2,17319
150	22500	3375000	12,2474	5,3133	0,006667	471,24	17671,5	2,17609

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	log n
151	22801	3442951	12,2882	5,3251	0,006623	474,38	17907,9	2,17898
152	23104	3511808	12,3288	5,3368	0,006579	477,52	18145,8	2,18184
153	23409	3581577	12,3693	5,3485	0,006536	480,66	18385,4	2,18469
154	23716	3652264	12,4097	5,3601	0,006494	483,81	18626,5	2,18752
155	24025	3723875	12,4499	5,3717	0,006452	486,95	18869,2	2,19033
156	24336	3796416	12,4900	5,3832	0,006410	490,09	19113,4	2,19312
157	24649	3869893	12,5300	5,3947	0,006369	493,23	19359,3	2,19590
158	24964	3944312	12,5698	5,4061	0,006329	496,37	19606,7	2,19866
159	25281	4019679	12,6095	5,4175	0,006289	499,51	19855,7	2,20140
160	25600	4096000	12,6491	5,4288	0,006250	502,65	20106,2	2,20412
161	25921	4173281	12,6886	5,4401	0,006211	505,80	20358,3	2,20683
162	26244	4251528	12,7279	5,4514	0,006173	508,94	20612,0	2,20952
163	26569	4330747	12,7671	5,4626	0,006135	512,08	20867,2	2,21219
164	26896	4410944	12,8062	5,4737	0,006098	515,22	21124,1	2,21484
165	27225	4492125	12,8452	5,4848	0,006061	518,36	21382,5	2,21748
166	27556	4574296	12,8841	5,4959	0,006024	521,50	21642,4	2,22011
167	27889	4657463	12,9228	5,5069	0,005988	524,65	21904,0	2,22272
168	28224	4741632	12,9615	5,5178	0,005952	527,79	22167,1	2,22531
169	28561	4826809	13,0000	5,5288	0,005917	530,93	22431,8	2,22789
170	28900	4913000	13,0384	5,5397	0,005882	534,07	22698,0	2,23045
171	29241	5000211	13,0767	5,5505	0,005848	537,21	22965,8	2,23300
172	29584	5088448	13,1149	5,5613	0,005814	540,35	23235,2	2,23553
173	29929	5177717	13,1529	5,5721	0,005780	543,50	23506,2	2,23805
174	30276	5268024	13,1909	5,5828	0,005747	546,64	23778,7	2,24055
175	30625	5359375	13,2288	5,5934	0,005714	549,78	24052,8	2,24304
176	30976	5451776	13,2665	5,6041	0,005682	552,92	24328,5	2,24551
177	31329	5545233	13,3041	5,6147	0,005650	556,06	24605,7	2,24797
178	31684	5639752	13,3417	5,6252	0,005618	559,20	24884,6	2,25042
179	32041	5735339	13,3791	5,6357	0,005587	562,35	25164,9	2,25285
180	32400	5832000	13,4164	5,6462	0,005556	565,49	25446,9	2,25527
181	32761	5929741	13,4536	5,6567	0,005525	568,63	25730,4	2,25768
182	33124	6028568	13,4907	5,6671	0,005495	571,77	26015,5	2,26007
183	33489	6128487	13,5277	5,6774	0,005465	574,91	26302,2	2,26245
184	33856	6229504	13,5647	5,6877	0,005435	578,05	26590,4	2,26482
185	34225	6331625	13,6015	5,6980	0,005405	581,19	26880,3	2,26717
186	34596	6434856	13,6382	5,7083	0,005376	584,34	27171,6	2,26951
187	34969	6539203	13,6748	5,7185	0,005348	587,48	27464,6	2,27184
188	35344	6644672	13,7113	5,7287	0,005319	590,62	27759,1	2,27416
189	35721	6751269	13,7477	5,7388	0,005291	593,76	28055,2	2,27646
190	36100	6859000	13,7840	5,7489	0,005263	596,90	28352,9	2,27875
191	36481	6967871	13,8203	5,7590	0,005236	600,04	28652,1	2,28103
192	36864	7077888	13,8564	5,7690	0,005208	603,19	28952,9	2,28330
193	37249	7189057	13,8924	5,7790	0,005181	606,33	29255,3	2,28556
194	37636	7301384	13,9284	5,7890	0,005155	609,47	29559,2	2,28780
195	38025	7414875	13,9642	5,7989	0,005128	612,61	29864,8	2,29003
196	38416	7529536	14,0000	5,8088	0,005102	615,75	30171,9	2,29226
197	38809	7645373	14,0357	5,8186	0,005076	618,89	30480,5	2,29447
198	39204	7762392	14,0712	5,8285	0,005051	622,04	30790,7	2,29667
199	39601	7880599	14,1067	5,8383	0,005025	625,18	31102,6	2,29885
200	40000	8000000	14,1421	5,8480	0,005000	628,32	31415,9	2,30103

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	log n
201	40401	8120601	14,1774	5,8578	0,004975	631,46	31730,9	2,30320
202	40804	8242408	14,2127	5,8675	0,004951	634.60	32047,4	2,30535
203	41209	8365427	14.2478	5,8771	0,004926	637,74	32365,5	2,30750
204	41616	8489664	14,2829	5,8868	0,004902	640,88	32685,1	2,30963
205	42025	8615125	14,3178	5,8964	0,004878	644,03	33006,4	2,31175
206	42436	8741816	14,3527	5,9059	0,004854	647,17	33329,2	2,31387
207	42849	8869743	14,3875	5,9155	0,004831	650,31	33653,5	2,31597
208	43264	8998912	14,4222	5,9250	0,004808	653,45	33979,5	2,31806
209	43681	9129329	14,4568	5,9345	0,004785	656,59	34307,0	2,32015
210	44100	9261000	14,4914	5,9439	0,004719	659,73	34636,1	2,32222
211	44521	9393931	14,5258	5,9533	0,004739	662,88	34966,7	2,32428
212	44944	9528128	14,5602	5,9627	0,004717	666,02	35298,9	2,32634
213	45369	9663597	14,5945	5,9721	0,004695	669,16	35632,7	2,32838
214	45796	9800344	14,6287	5,9814	0,004673	672,30	35968,1	2,33041
215	46225	9938375	14,6629	5,9907	0,004651	675,44	36305,0	2,33244
216	46656	10077696	14,6969	6,0000	0,004630	678,58	36643,5	2,33445
217	47089	10218313	14,7309	6,0092	0,004608	681,73	36983,6	2,33646
218	47524	10360232	14,7648	6,0185	0,004587	684,87	37325,3	2,33846
219	47961	10503459	14,7986	6,0277	0,004566	688 01	37668,5	2,34044
220	48400	10648000	14,8324	6,0368	0,004545	691,15	38013,3	2,34242
221	48841	10793861	14,8661	6,0459	0,004525	694.29	38359,6	2.34439
222	49284	10941048	14,8997	6,0550	0,004505	697.43	38707,6	2.34635
223	49729	11089567	14,9332	6,0641	0,004484	700,58	39057,1	2,34830
224	50176	11239424	14,9666	6,0732	0,004464	703,72	39408,1	2,35025
225	50625	11390625	15,0000	6,0822	0,004444	706,86	39760,8	2,35218
226	51076	11543176	15,0333	6,0912	0,004425	710,00	40115,0	2,35411
227	51529	11697083	15,0665	6,1002	0,004405	713,14	40470,8	2,35603
228	51984	11852352	15,0997	6,1091	0,004386	716,28	40828,1	2,35793
229	52441	12008989	15,1327	6,1180	0,004367	719,42	41187,1	2,35984
230	52900	12167000	15,1658	6,1269	0,004348	722,57	41547,6	2,36173
231	53361	12326391	15,1987	6,1358	0,004329	725,71	41909,6	2,36361
232	53824	12487168	15,2315	6,1446	0,004310	728,85	42273,3	2,36549
233	54289	12649337	15,2643	6,1534	0,004292	731,99	42638,5	2,36736
234	54756	12812904	15,2971	6,1622	0,004274	735,13	43005,3	2,36922
235	55225	12977875	15,3297	6,1710	0,004255	738,27	43373,6	2,37107
236	55696	13144256	15,3623	6,1797	0,004237	741,42	43743,5	2,37291
237	56169	13312053	15,3948	6,1885	0,004219	744,56	44115,0	2,37475
238	56644	13481272	15,4272	6,1972	0,004202	747,70	44488,1	2,37658
239	57121	13651919	15,4596	6,2058	0,004184	750,84	44862,7	2.37840
240	57600	13824000	15,4919	6,2145	0,004167	753,98	45238,9	2,38021
241	58081	13997521	15,5242	6,2231	0,004149	757,12	45616,7	2,38202
242	58564	14172488	15,5563	6,2317	0,004132	760,27	45996,1	2,38382
243	59049	14348907	15,5885	6,2403	0,004115	763,41	46377,0	2,38561
244	59536	14526784	15.6205	6,2488	0,004098	766,55	46759,5	2,38739
245	60025	14706125	15,6525	6,2573	0,004082	769,69	47143,5	2,38917
246	60516	14886936	15,6844	6,2658	0,004065	772,83	47529,2	2,39094
247	61009	15069223	15,7162	6,2743	0,004049	775,97	47916,4	2,39270
248	61504	15252992	15,7480	6,2828	0,004032	779,11	48305,1	2,39445
249	62001	15438249	15,7797	6,2912	0,004016	782,26	48695,5	2,39620
250	62500	15625000	15,8114	6,2996	0,004000	785,40	49087,4	2.39794

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	log n
251	63001	15813251	15,8430	6,3080	0,003984	788,54	49480,9	2,39967
252	63504	16003008	15,8745	6,3164	0,003968	791,68	49875,9	2,40140
253	64009	16194277	15,9060	6,3247	0,003953	794,82	50272,6	2,40312
254	64516	16387064	15,9374	6,3330	0,003937	797,96	50670,7	2,40483
255	65025	16581375	15,9687	6,3413	0,003922	801,11	51070,5	2,40654
256	65536	16777216	16,0000	6,3496	0,003906	804,25	51471,9	2,40824
257	66049	16974593	16,0312	6,3579	0,003891	807,39	51874,8	2,40993
258	66564	17173512	16,0624	6,8661	0,003876	810,53	52279,2	2,41162
259	67081	17373979	16,0935	6,3743	0,003861	813,67	52685,3	2,41330
260	67600	17576000	16,1245	6,3825	0,003846	816,81	53092,9	2,41497
261	68121	17779581	16,1555	6,3907	0,003831	819,96	53502,1	2,41664
262	68644	17984728	16,1864	6,3988	0,003817	823,10	53912,9	2,41830
263	69169	18191447	16,2173	6,4070	0,003802	826,24	54325,2	2,41996
264	69696	18399744	16,2481	6,4151	0,003788	829,38	54739,1	2,42160
265	70225	18609625	16,2788	6,4232	0,003774	832,52	55154,6	2,42325
266	70756	18821096	16,3095	6,4312	0,003759	835,66	55571,6	2,42488
267	71289	19034163	16,3401	6,4393	0,003745	838,81	55990,2	2,42651
268	71824	19248832	16,3707	6,4473	0,003731	841,95	56410,4	2,42813
269	72361	19465109	16,4012	6,4553	0,003717	845,09	56832,2	2,42975
270	72900	19683000	16,4317	6,4633	0,003704	848,23	57255,5	2,43136
271	73441	19902511	16,4621	6,4713	0,003690	851,37	57680,4	2,43297
272	73984	20123648	16,4924	6,4792	0,003677	854,51	58106,9	2,43457
273	74529	20346417	16,5227	5,4872	0,003663	857,65	58534.9	2,43616
274	75076	20570824	16,5529	6,4951	0,003650	860,80	58964,6	2,43775
275	75625	20796875	16,5831	6,5030	0,003636	863,94	59395,7	2.43933
276	76176	21024576	16,6132	6,5108	0,003623	867,08	59828,5	2,44091
277	76729	21253933	16,6433	6,5187	0,003610	870,22	60262,8	2.44248
278	77284	21484952	16,6733	6,5265	0,003597	873,36	60698,7	2.44404
279	77841	21717639	16,7033	5,5343	0,003584	876,50	61136,2	2,44560
280	78400	21952000	16,7332	5,5421	0,003571	879,65	61575,2	2,44716
281	78961	22188041	16,7631	6,5499	0,003559	882,79	62015,8	2,44871
282	79524	22425768	16,7929	6,5577	0,003546	885,93	62458,0	2,45025
283	80089	22665187	16,8226	6,5654	0,003534	889,07	62901,8	2,45179
284	80656	22906304	16,8523	6,5731	0,003521	892,21	63347,1	2,45332
285	81225	23149125	16,8819	6,5808	0,003509	895,35	63794,0	2,45484
286	81796	23393656	16,9115	6,5885	0,003497	898,50	64242,4	2,45637
287	82369	23639903	16,9411	6,5962	0,003484	901,64	64692,5	2,45788
288	82944	23887872	16,9706	6,6039	0,003472	904,78	65144,1	2,45939
289	83521	24137569	17,0000	6,6115	0,003460	907,92	65597,2	2,46090
290	84100	24389000	17,0294	6,6191	0,003448	911,06	66052,0	2,46240
291	84681	24642171	17,0587	6,6267	0,003436	914,20	66508,3	2,46389
292	85264	24897088	17,0880	6,6343	0,003425	917,35	66966,2	2,46538
293	85849	25153757	17,1172	6,6419	0,003413	920,49	67425,6	2,46687
294	86436	25412184	17,1464	6,6494	0,003401	923,63	67886,7	2,46835
295	87025	25672375	17,1756	6,6569	0,003390	926,77	68349,3	2,46982
296	87616	25934336	17,2047	6,6644	0,003378	929,91	68813,4	2,47129
297	88209	26198073	17,2337	6,6719	0,003367	933,05	69279,2	2,47276
298	88804	26463592	17,2627	6,6794	0,003356	936,19	69746,5	2,47422
299	89401	26730899	17,2916	6,6869	0,003344	939.34	70215,4	2,47567
300	90000	27000000	17,3205	6,6943	0,003333	942,48	70685,8	2,47712

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	log n
301	90601	27270901	17,3494	6,7018	0,003322	945,62	71157,9	2,47857
302	91204	27543608	17,3781	6,7092	0,003311	948,76	71631,5	2,48001
303	91809	27818127	17,4069	6,7166	0,003300	951,90	72106,6	2,48144
304	92416	28094464	17,4356	6,7240	0,003289	955,04	72583,4	2,48287
305	93025	28372625	17,4642	6,7313	0,003279	958,19	73061,7	2,48430
306	93636	28652616	17,4929	6,7387	0,003268	961,33	73541,5	2,48572
307	94249	28934443	17,5214	6,7460	0,003257	964,47	74023,0	2,48714
308	94864	29218112	17,5499	6,7533	0,003247	967,61	74506,0	2,48855
309	95481	29503629	17,5784	6,7606	0,003236	970,75	74990,6	2,48996
310	96100	29791000	17,6068	6,7679	0,003226	973,89	75476,8	2,49136
311	96721	30080231	17,6352	6,7752	0,003215	977,04	75964,5	2,49276
312	97344	30371328	17,6635	6,7824	0,003205	980,18	76453,8	2,49415
313	97969	30664297	17,6918	6,7897	0,003195	983,32	76944,7	2,49554
314	98596	30959144	17,7200	6,7969	0,003185	986,46	77437,1	2,49693
315	99225	31255875	17,7482	6,8041	0,003175	989,60	77931,1	2,49831
316	99856	31554496	17,7764	6,8113	0,003165	992,74	78426,7	2,49969
317	100489	31855013	17,8045	6,8185	0,003155	995,88	78923,9	2,50106
318	101124	32157432	17,8326	6,8256	0,003145	999,03	79422,6	2,50243
319	101761	32461759	17,8606	6,8328	0,003135	1002,2	79922,9	2,50379
320	102400	32768000	17,8885	6,8399	0,003125	1005,3	80424,8	2,50515
321	103041	33076161	17,9165	6,8470	0,003115	1008,5	80928,2	2,50651
322	103684	33386248	17,9444	6,8541	0,003106	1011,6	81433,2	2,50786
323	104329	33698267	17,9722	6,8612	0,003096	1014,7	81939,8	2,50920
324	104976	34012224	18,0000	6,8683	0,003086	1017,9	82448,0	2,51055
325	105625	34328125	18,0278	6,8753	0,003077	1021,0	82957,7	2,51188
326	106276	34645976	18,0555	6,8824	0,003067	1024,2	83469,0	2,51322
327	106929	34965783	18,0831	6,8894	0,003058	1027,3	83981,8	2,51455
328	107584	35287552	18,1108	6,8964	0,003049	1030,4	84496,3	2,51587
329	108241	35611289	18,1384	6,9034	0,003040	1033,6	85012,3	2,51720
330	108900	35937000	18,1659	6,9104	0,003030	1036,7	85529,9	2,51851
331	109561	36264691	18,1934	6,9174	0,003021	1039,9	86049,0	2,51983
332	110224	36594368	18,2209	6,9244	0,003012	1043,0	86569,7	2,52114
333	110889	36926037	18,2483	6,9313	0,003003	1046,2	87092,0	2,52244
334	111556	37259704	18,2757	6,9382	0,002994	1049,3	87615,9	2,52375
335	112225	37595375	18,3030	6,9451	0,002985	1052,4	88141,3	2,52504
336	112896	37933056	18,3303	6,9521	0,002976	1055,6	88668,3	2,52634
337	113569	38272753	18,3576	6,9589	0,002967	1058,7	89196,9	2,52763
338	114244	38614472	18,3848	6,9658	0,002959	1061,9	89727,0	2,52892
339	114921	38958219	18,4120	6,9727	0,002950	1065,0	90258,7	2,53020
340	115600	39304000	18,4391	6,9795	0,002941	1068,1	90792,0	2,53148
341	116281	39651821	18,4662	6,9864	0,002933	1071,3	91326,9	2,53275
342	116964	40001688	18,4932	6,9932	0,002924	1074,4	91863,3	2,53403
343	117649	40353607	18,5203	7,0000	0,002915	1077,6	92401,3	2,53529
344	118336	40707584	18,5472	7,0068	0,002907	1080,7	92940,9	2,53656
345	119025	41063625	18,5742	7,0136	0,002899	1083,8	93482,0	2,53782
346	119716	41421736	18,6011	7,0203	0,002890	1087,0	94024,7	2,53908
347	120409	41781923	18,6279	7,0271	0,002882	1090,1	94569,0	2,54033
348	121104	42144192	18,6548	7,0338	0,002874	1093,3	95114,9	2,54158
349	121801	42508549	18,6815	7,0406	0,002865	1096,4	95662,3	2,54283
350	122500	42875000	18,7083	7,0473	0,002857	1099,6	96211,3	2,54407

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	log n
351	123201	43243551	18,7350	7,0540	0,002849	1102,7	96761,8	2,54531
352	123904	43614208	18,7617	7,0607	0,002841	1105,8	97314,0	2,54654
353	124609	43986977	18,7883	7,0674	0,002833	1109,0	97867,7	2,54777
354	125316	44361864	18,8149	7,0740	0,002825	1112,1	98423,0	2,54900
355	126025	44738875	18,8414	7,0807	0,002817	1115,3	98979,8	2,55023
356	126736	45118016	18,8680	7,0873	0,002809	1118,4	99538,2	2,55145
357	127449	45499293	18,8944	7,0940	0,002801	1121,5	100098	2,55267
358	128164	45882712	18,9209	7,1006	0,002793	1124,7	100660	2,55388
359	128881	46268279	18,9473	7,1072	0,002786	1127,8	101223	2,55509
360	129600	46656000	18,9737	7,1138	0,002778	1131,0	101788	2,55630
361	130321	47045881	19,0000	7,1204	0,002770	1134,1	102354	2,55751
362	131044	47437928	19,0263	7,1269	0,002762	1137,3	102922	2,55871
363	131769	47832147	19,0526	7,1335	0,002755	1140,4	103491	2,55991
364	132496	48228544	19,0788	7,1400	0,002747	1143,5	104062	2,56110
365	133225	48627125	19,1050	7,1466	0,002740	1146,7	104635	2,56229
366	133956	49027896	19,1311	7,1531	0,002732	1149,8	105209	2,56348
367	134689	49430863	19,1572	7,1596	0,002725	1153,0	105784	2,56467
368	135424	49836032	19,1833	7,1661	0,002717	1156,1	106362	2,56585
369	136161	50243409	19,2094	7,1726	0,002710	1159,2	106941	2,56703
370	136900	50653000	19,2354	7,1791	0,002703	1162,4	107521	2,56820
371	137641	51064811	19,2614	7,1855	0,002695	1165,5	108103	2,56937
372	138384	51478848	19,2873	7,1920	0,002688	1168,7	108687	2,57054
373	139129	51895117	19,3132	7,1984	0,002681	1171,8	109272	2,57171
374	139876	52313624	19,3391	7,2048	0,002674	1175,0	109858	2,57287
375	140625	52734375	19,3649	7,2112	0,002667	1178,1	110447	2,57403
376	141376	53157376	19,3907	7,2177	0,002660	1181,2	111036	2,57519
377	142129	53582633	19,4165	7,2240	0,002653	1184,4	111628	2,57634
378	142884	54010152	19,4422	7,2304	0,002646	1187,5	112221	2,57749
379	143641	54439939	19,4679	7,2368	0,002639	1190,7	112815	2,57864
380	144400	54872000	19,4936	7,2432	0,002632	1193,8	113411	2,57978
381	145161	55306341	19,5192	7,2495	0,002625	1196,9	114009	2,58093
382	145924	55742968	19,5448	7,2558	0,002618	1200,1	114608	2,58206
383	146689	56181887	19,5704	7,2622	0,002611	1203,2	115209	2,58320
384	147456	56623104	19,5959	7,2685	0,002604	1206,4	115812	2,58433
385	148225	57066625	19,6214	7,2748	0,002597	1209,5	116416	2,58546
386	148996	57512456	19,6469	7,2811	0,002591	1212,7	117021	2,58659
387	149769	57960603	19,6723	7,2874	0,002584	1215,8	117628	2,58771
388	150544	58411072	19,6977	7,2936	0,002577	1218,9	118237	2,58883
389	151321	58863869	19,7231	7,2999	0,002571	1222,1	118847	2,58995
390	152100	59319000	19,7484	7,3061	0,002564	1225,2	119459	2,59106
391	152881	59776471	19,7737	7,3124	0,002558	1228,4	120072	2,59218
392	153664	60236288	19,7990	7,3186	0,002551	1231,5	120687	2,59329
393	154449	60698457	19,8242	7,3248	0,002545	1234,6	121304	2,59439
394	155236	61162984	19,8494	7,3310	0,002538	1237,8	121922	2,59550
395	156025	61629875	19,8746	7,3372	0,002532	1240,9	122542	2,59660
396	156816	62099136	19,8997	7,3434	0,002525	1244,1	123163	2,59770
397	157609	62570773	19,9249	7,3496	0,002519	1247,2	123786	2,59879
398	158404	63044792	19,9499	7,3558	0,002526	1250,4	124410	2,59988
399	159201	63521199	19,9750	7,3619	0,002506	1253,5	125036	2,60097
400	160000	64000000	20,0000	7,3681	0,002500	1256,6	125664	2,60206

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	log n
401	160801	64481201	20,0250	7,3742	0,002494	1259,8	126293	2,60314
402	161604	64964808	20,0499	7,3803	0,002488	1262,9	126923	2,60423
403	162409	65450827	20,0749	7,3864	0,002481	1266,1	127556	2,60531
404	163216	65939264	20,0998	7,3925	0,002475	1269,2	128190	2,60638
405	164025	66430125	20,1246	7,3986	0,002469	1272,3	128825	2,60746
406	164836	66923416	20,1494	7,4047	0,002463	1275,5	129462	2,60853
407	165649	67419143	20,1742	7,4108	0,002457	1278,6	130100	2,60959
408	166464	67917312	20,1990	7,4169	0,002451	1281,8	130741	2,61066
409	167281	68417929	20,2237	7,4229	0,002445	1284,9	131382	2,61172
410	168100	68921000	20,2485	7,4290	0,002439	1288,1	132025	2,61278
411	168921	69426531	20,2731	7,4350	0,002433	1291,2	132670	2,61384
412	169744	69934528	20,2978	7,4410	0,002427	1294,3	133317	2,61490
413	170569	70444997	20,3224	7,4470	0,002421	1297,5	133965	2,61595
414	171396	70957944	20,3470	7,4530	0,002415	1300,6	134614	2,61700
415	172225	71473375	20,3715	7,4590	0,002410	1303,8	135265	2,61805
416	173056	71991296	20,3961	7,4650	0,002404	1306,9	135918	2,61909
417	173889	72511713	20,4206	7,4710	0,002398	1310,0	136572	2,62014
418	174724	73034632	20,4450	7,4770	0,002392	1313,2	137228	2,62118
419	175561	73560059	20,4695	7,4829	0,002387	1316,3	137885	2,62221
420	176400	74088000	20,4939	7,4889	0,002381	1319,5	138544	2,62325
421	177241	74618461	20,5183	7,4948	0,002375	1322,6	139205	2,62428
422	178084	75151448	20,5426	7,5007	0,002370	1325,8	139867	2,62531
423	178929	75686967	20,5670	7,5067	0,002364	1328,9	140531	2,62634
424	179776	76225024	20,5913	7,5126	0,002358	1332,0	141196	2,62737
425	180625	76765625	20,6155	7,5185	0,002353	1335,2	141863	2,62839
426	181476	77308776	20,6398	7,5244	0,002347	1338,3	142531	2,62941
427	182329	77854483	20,6640	7,5302	0,002342	1341,5	143201	2,63043
428	183184	78402752	20,6882	7,5361	0,002336	1344,6	143872	2,63144
429	184041	78953589	20,7123	7,5420	0,002331	1347,7	144545	2,63246
430	184900	79507000	20,7364	7,5478	0,002326	1350,9	145220	2,63347
431	185761	80062991	20,7605	7,5537	0,002320	1354,0	145896	2,63448
432	186624	80621568	20,7846	7,5595	0,002315	1357,2	146574	2,63548
433	187489	81182737	20,8087	7,5654	0,002309	1360,3	147254	2,63649
434	188356	81746504	20,8327	7,5712	0,002304	1363,5	147934	2,63749
435	189225	82312875	20,8567	7,5770	0,002299	1366,6	148617	2,63849
436	190096	82881856	20,8806	7,5828	0,002294	1369,7	149301	2,63949
437	190969	83453453	20,9045	7,5886	0,002288	1372,9	149987	2,64048
438	191844	84027672	20,9284	7,5944	0,002283	1376,0	150674	2,64147
439	192721	84604519	20,9523	7,6001	0,002278	1379,2	151363	2,64246
440	193600	85184000	20,9762	7,6059	0,002273	1382,3	152053	2,64345
441	194481	85766121	21,0000	7,6117	0,002268	1385,4	152745	2,64444
442	195364	86350888	21,0238	7,6174	0,002262	1388,6	153439	2,64542
443	196249	86938307	21,0476	7,6232	0,002257	1391,7	154134	2,64640
444	197136	87528384	21,0713	7,6289	0,002252	1394,9	154830	2,64738
445	198025	88121125	21,0950	7,6346	0,002247	1398,0	155528	2.64836
446	198916	88716536	21,1187	7,6403	0,002242	1401,2	156228	2,64933
447	199809	89314623	21,1424	7,6460	0,002237	1404,3	156930	2,65031
448	200704	89915392	21,1660	7,6517	0,002232	1407,4	157633	2,65128
449	201601	90518849	21,1896	7,6574	0,002227	1410,6	158337	2,65225
450	202500	91125000	21,2132	7,6631	0,002222	1413,7	159043	2 65321

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	log n
451	203401	91733851	21,2368	7,6688	0,002217	1416,9	159751	2,65418
452	204304	92345408	21,2603	7,6744	0,002212	1420,0	160460	2,65514
453	205209	92959677	21,2838	7,6801	0,002208	1423,1	161171	2,65610
454	206116	93576664	21,3073	7,6857	0,002203	1426,3	161883	2,65706
455	207025	94196375	21,3307	7,6914	0,002198	1429,4	162597	2,65801
456	207936	94818816	21,3542	7,6970	0,002193	1432,6	163313	2,65896
457	208849	95443993	21,3776	7,7026	0,002188	1435,7	164030	2,65992
458	209764	96071912	21,4009	7,7082	0,002183	1438,8	164748	2,66087
459	210681	96702579	21,4243	7,7138	0,002179	1442,0	165468	2,66181
460	211600	97336000	21,4476	7,7194	0,002174	1445,1	166190	2,66276
461	212521	97972181	21,4709	7,7250	0,002169	1448,3	166914	2,66370
462	213444	98611128	21,4942	7,7306	0,002165	1451,4	167639	2,66464
463	214369	99252847	21,5174	7,7362	0,002160	1454,6	168365	2,66558
464	215296	99897344	21,5407	7,7418	0,002155	1457,7	169093	2,66652
465	216225	100544625	21,5639	7,7473	0,002151	1460,8	169823	2,66745
466	217156	101194696	21,5870	7,7529	0,002146	1464,0	170554	2,66839
467	218089	101847563	21,6102	7,7584	0,002141	1467,1	171287	2,66932
468	219024	102503232	21,6333	7,7639	0,002137	1470,3	172021	2,67025
469	219961	103161709	21,6564	7,7695	0,002132	1473,4	172757	2,67117
470	220900	103823000	21,6795	7,7750	0,002128	1476,5	173494	2,67210
471	221841	104487111	21,7025	7,7805	0,002123	1479,7	174234	2,67302
472	222784	105154048	21,7256	7,7860	0,002119	1482,8	174974	2,67394
473	223729	105823817	21,7486	7,7915	0,002114	1486,0	175716	2,67486
474	224676	106496424	21,7715	7,7970	0,002110	1489,1	176460	2,67578
475	225625	107171875	21,7945	7,8025	0,002105	1492,3	177205	2,67669
476	226576	107850176	21,8174	7,8079	0,002101	1495,4	177952	2,67761
477	227529	108531333	21,8403	7,8134	0,002096	1498,5	178701	2,67852
478	228484	109215352	21,8632	7,8188	0,002092	1501,7	179451	2,67943
479	229441	109902239	21,8861	7,8243	0,002088	1504,8	180203	2,68034
480	230400	110592000	21,9089	7,8297	0,002083	1508,0	180956	2,68124
481	231361	111284641	21,9317	7,8352	0,002079	1511,1	181711	2,68215
482	232324	111980168	21,9545	7,8406	0,002075	1514,2	182467	2,68305
483	233289	112678587	21,9773	7,8460	0,002070	1517,4	183225	2,68395
484	234256	113379904	22,0000	7,8514	0,002066	1520,5	183984	2,68485
485	235225	114084125	22,0227	7,8568	0,002062	1523,7	184745	2,68574
486	236196	114791256	22,0454	7,8622	0,002058	1526,8	185508	2,68664
487	237169	115501303	22,0681	7,8676	0,002053	1530,0	186272	2,68753
488	238144	116214272	22,0907	7,8730	0,002049	1533,1	187038	2,68842
489	239121	116930169	22,1133	7,8784	0,002045	1536,2	187805	2,68931
490	240100	117649000	22,1359	7,8837	0,002041	1539,4	188574	2,69020
491	241081	118370771	22,1585	7,8891	0,002037	1542,5	189345	2,69108
492	242064	119095488	22,1811	7,8944	0,002033	1545,7	190117	2,69197
493	243049	119823157	22,2036	7,8998	0,002028	1548,8	190890	2,69285
494	244036	120553784	22,2261	7,9051	0,002024	1551,9	191665	2,69373
495	245025	121287375	22,2486	7,9105	0,002020	1555,1	192442	2,69461
496	246016	122023936	22,2711	7,9158	0,002016	1558,2	193221	2,69548
497	247009	122763473	22,2935	7,9211	0,002012	1561,4	194000	2,69636
498	248004	123505992	22,3159	7,9264	0,002008	1564,5	194782	2,69723
499	249001	124251499	22,3383	7,9317	0,002004	1567,7	195565	2,69810
500	250000	125000000	22,3607	7,9370	0,002000	1570,8	196350	2,69897

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	log n
501	251001	125751501	22,3830	7,9423	0,001996	1573,9	197136	2,69984
502	252004	126506008	22.4054	7,9476	0,001992	1577,1	197923	2,70070
503	253009	127263527	22,4277	7,9528	0,001988	1580,2	198713	2,70157
504	254016	128024064	22,4499	7,9581	0,001984	1583,4	199504	2,70243
505	255025	128787625	22,4722	7,9634	0,001980	1586,5	200296	2,70329
506	256036	129554216	22,4944	7,9686	0,001976	1589,6	201090	2,70415
507	257049	130323843	22,5167	7,9739	0,001972	1592,8	201886	2,70501
508	258064	131096512	22,5389	7,9791	0,001969	1595,9	202683	2,70586
509	259081	131872229	22,5610	7,9843	0,001965	1599,1	203482	2,70672
510	260100	132651000	22,5832	7,9896	0,001961	1602,2	204282	2,70757
511	261121	133432831	22,6053	7,9948	0,001957	1605.4	205084	2,70842
512	262144	134217728	22,6274	8,0000	0,001953	1608,5	205887	2,70927
513	263169	135005697	22,6495	8,0052	0,001949	1611,6	206692	2,71012
514	264196	135796744	22,6716	8,0104	0,001946	1614,8	207499	2,71096
515	265225	136590875	22,6936	8,0156	0,001942	1617,9	208307	2,71181
516	266256	137388096	22,7156	8,0208	0,001938	1621,1	209117	2,71265
517	267289	138188413	22,7376	8,0260	0,001934	1624,2	209928	2,71349
518	268324	138991832	22,7596	8,0311	0,001931	1627,3	210741	2,71433
519	269361	139798359	22,7816	8,0363	0,001927	1630,5	211556	2,71517
520	270400	140608000	22,8035	8,0415	0,001923	1633,6	212372	2,71600
521	271441	141420761	22,8254	8,0466	0,001919	1636,8	213189	2,71684
522	272484	142236648	22,8473	8,0517	0,001916	1639,9	214008	2,71767
523	273529	143055667	22,8692	8,0569	0,001912	1643,1	214829	2,71850
524	274576	143877824	22,8910	8,0620	0,001908	1646,2	215651	2,71933
525	275625	144703125	22,9129	8,0671	0,001905	1649,3	216475	2,72016
526	276676	145531576	22,9347	8,0723	0,001901	1652,5	217301	2,72099
527	277729	146363183	22,9565	8,0774	0,001898	1655,6	218128	2,72181
528	278784	147197952	22,9783	8,0825	0,001894	1658,8	218956	2,72263
529	279841	148035889	23,0000	8,0876	0,001890	1661,9	219787	2,72346
530	280900	148877000	23,0217	8,0927	0,001887	1665,0	220618	2,72428
531	281961	149721291	23,0434	8,0978	0,001883	1668,2	221452	2,72509
532	283024	150568768	23,0651	8,1028	0,001880	1671,3	222287	2,72591
533	284089	151419437	23,0868	8,1079	0,001876	1674,5	223123	2,72673
534	285156	152273304	23,1084	8,1130	0,001873	1677,6	223961	2,72754
535	286225	153130375	23,1301	8,1180	0,001869	1680,8	224801	2,72835
536	287296	153990656	23,1517	8,1231	0,001866	1683,9	225642	2,72916
537	288369	154854153	23,1733	8,1281	0,001862	1687,0	226484	2,72997
538	289444	155720872	23,1948	8,1332	0,001859	1690,2	227329	2,73078
539	290521	156590819	23,2164	8,1382	0,001855	1693,3	228175	2,73159
540	291600	157464000	23,2379	8,1433	0,001852	1696,5	229022	2,73239
541	292681	158340421	23,2594	8,1483	0,001848	1699,6	229871	2,73320
542	293764	159220088	23,2809	8,1533	0,001845	1702,7	230722	2,73400
543	294849	160103007	23,3024	8,1583	0,001842	1705,9	231574	2,73480
544	295936	160989184	23,3238	8,1633	0,001838	1709,0	232428	2,73560
545	297025	161878625	23,3452	8,1683	0,001835	1712,2	233283	2,73640
546	298116	162771336	23,3666	8,1733	0,001832	1715,3	234140	2,73719
547	299209	163667323	23,3880	8,1783	0,001828	1718,5	234998	2,73799
548	300304	164566592	23,4094	8,1833	0,001825	1721,6	235858	2,73878
549	301401	165469149	23,4307	8,1882	0,001822	1724,7	236720	2,73957
550	302500	166375000	23,4521	8,1932	0,001818	1727,9	237583	2,74036

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	log n
551	303601	167284151	23,4734	8,1982	0,001815	1731,0	238448	2,74115
552	304704	168196608	23,4947	8,2031	0,001812	1734,2	239314	2,74194
553	305809	169112377	23,5160	8,2081	0,001808	1737,3	240182	2,74273
554	306916	170031464	23,5372	8,2130	0,001805	1740,4	241051	2,74351
555	308025	170953875	23,5584	8,2180	0,001802	1743,6	241922	2,74429
556	309136	171879616	23,5797	8,2229	0,001799	1746,7	242795	2,74507
557	310249	172808693	23,6008	8,2278	0,001795	1749,9	243669	2,74586
558	311364	173741112	23,6220	8,2327	0,001792	1753,0	244545	2,74663
559	312481	174676879	23,6432	8,2377	0,001789	1756,2	245422	2,74741
560	313600	175616000	23,6643	8,2426	0,001786	1759,3	246301	2,74819
561	314721	176558481	23,6854	8,2475	0,001783	1762,4	247181	2,74896
562	315844	177504328	23,7065	8,2524	0,001779	1765,6	248063	2,74974
563	316969	178453547	23,7276	8,2573	0,001776	1768,7	248947	2,75051
564	318096	179406144	23,7487	8,2621	0,001773	1771,9	249832	2,75128
565	319225	180362125	23,7697	8,2670	0,001770	1775,0	250719	2,75205
566	320356	181321496	23,7908	8,2719	0,001767	1778,1	251607	2,75282
567	321489	182284263	23,8118	8,2768	0,001764	1781,3	252497	2,75358
568	322624	183250432	23,8328	8,2816	0,001761	1784,4	253388	2,75435
569	323761	184220009	23,8537	8,2865	0,001757	1787,6	254281	2,75511
570	324900	185193000	23,8747	8,2913	0,001754	1790,7	255176	2,75587
571	326041	186169411	23,8956	8,2962	0,001751	1793,8	256072	2,75664
572	327184	187149248	23,9165	8,3010	0,001748	1797,0	256970	2,75740
573	328329	188132517	23,9374	8,3059	0,001745	1800,1	257869	2,75815
574	329476	189119224	23,9583	8,3107	0,001742	1803,3	258770	2,75891
575	330625	190109375	23,9792	8,3155	0,001739	1806,4	259672	2,75967
576	331776	191102976	24,0000	8,3203	0,001736	1809,6	260576	2,76042
577	332929	192100033	24,0208	8,3251	0,001733	1812,7	261482	2,76118
578	334084	193100552	24,0416	8,3300	0,001730	1815,8	262389	2,76193
579	335241	194104539	24,0624	8,3348	0,001727	1819,0	263298	2,76268
580	336400	195112000	24,0832	8,3396	0,001724	1822,1	264208	2,76343
581	337561	196122941	24,1039	8,3443	0,001721	1825,3	265120	2,76418
582	338724	197137368	24,1247	8,3491	0,001718	1828,4	266033	2,76492
583	339889	198155287	24,1454	8,3539	0,001715	1831,5	266948	2,76567
584	341056	199176704	24,1661	8,3587	0,001712	1834,7	267865	2,76641
585	342225	200201625	24,1868	8,3634	0,001709	1837,8	268783	2,76716
586	343396	201230056	24,2074	8,3682	0,001706	1841,0	269703	2,76790
587	344569	202262003	24,2281	8,3730	0,001704	1844,1	270624	2,76864
588	345744	203297472	24,2487	8,3777	0,001701	1847,3	271547	2,76938
589	346921	204336469	24,2693	8,3825	0,001698	1850,4	272471	2,77012
590	348100	205379000	24,2899	8,3872	0,001695	1853,5	273397	2,77085
591	349281	206425071	24,3105	8,3919	0,001692	1856,7	274325	2,77159
592	350464	207474688	24,3311	8,3967	0,001689	1859,8	275254	2,77232
593	351649	208527857	24,3516	8,4014	0,001686	1863,0	276184	2,77305
594	352836	209584584	24,3721	8,4061	0,001684	1866,1	277117	2,77379
595	354025	210644875	24,3926	8,4108	0,001681	1869,2	278051	2,77452
596	355216	211708736	24,4131	8,4155	0,001678	1872,4	278986	2,77525
597	356409	212776173	24,4336	8,4202	0,001675	1875,5	279923	2,77597
598	357604	213847192	24,4540	8,4249	0,001672	1878,7	280862	2,77670
599	358801	214921799	24,4745	8,4296	0,001669	1881,8	281802	2,77743
600	360000	216000000	24,4949	8,4343	0,001667	1885,0	282743	2,77815

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	log n
601	361201	217081801	24,5153	8,4390	0,001664	1888,1	283687	2,77887
602	362404	218167208	24,5357	8,4437	0,001661	1891,2	284631	2,77960
603	363609	219256227	24,5561	8,4484	0,001658	1894,4	285578	2,78032
604	364816	220348864	24,5764	8,4530	0,001656	1897,5	286526	2,78104
605	366025	221445125	24,5967	8,4577	0,001653	1900,7	287475	2,78176
606	367236	222545016	24,6171	8,4623	0,001650	1903,8	288426	2,78247
607	368449	223648543	24,6374	8,4670	0,001647	1906,9	289379	2,78319
608	369664	224755712	24,6577	8,4716	0,001645	1910,1	290333	2,78390
609	370881	225866529	24,6779	8,4763	0,001642	1913,2	291289	2,78462
610	372100	226981000	24,6982	8,4809	0,001639	1916,4	292247	2,78533
611	373321	228099131	24,7184	8,4856	0,001637	1919,5	293206	2,78604
612	374544	229220928	24,7386	8,4902	0,001634	1922,7	294166	2,78675
613	375769	230346397	24,7588	8,4948	0,001631	1925,8	295128	2,78746
614	376996	231475544	24,7790	8,4994	0,001629	1928,9	296092	2,78817
615	378225	232608375	24,7992	8,5040	0,001626	1932,1	297057	2,78888
616	379456	233744896	24,8193	8,5086	0,001623	1935,2	298024	2,78958
617	380689	234885113	24,8395	8,5132	0,001621	1938,4	298992	2,79029
618	381924	236029032	24,8596	8,5178	0,001618	1941,5	299962	2,79099
619	383161	237176659	24,8797	8,5224	0,001616	1944,6	300934	2,79169
620	384400	238328000	24,8998	8,5270	0,001613	1947,8	301907	2,79239
621	385641	239483061	24,9199	8,5316	0,001610	1950,9	302882	2,79309
622	386884	240641848	24,9399	8,5362	0,001608	1954,1	303858	2,79379
623	388129	241804367	24,9600	8,5408	0,001605	1957,2	304836	2,79449
624	389376	242970624	24,9800	8,5453	0,001603	1960,4	305815	2,79518
625	390625	244140625	25,0000	8,5499	0,001600	1963,5	306796	2,79588
626	391876	245314376	25,0200	8,5544	0,001597	1966,6	307779	2,79657
627	393129	246491883	25,0400	8,5590	0,001595	1969,8	308763	2,79727
628	394384	247673152	25,0599	8,5635	0,001592	1972,9	309748	2,79796
629	395641	248858189	25,0799	8,5681	0,001590	1976,1	310736	2,79865
630	396900	250047000	25,0998	8,5726	0,001587	1979,2	311725	2,79934
631	398161	251239591	25,1197	8,5772	0,001585	1982,3	312715	2,80003
632	399424	252435968	25,1396	8,5817	0,001582	1985,5	313707	2,80072
633	400689	253636137	25,1595	8,5862	0,001580	1988,6	314700	2,80140
634	401956	254840104	25,1794	8,5907	0,001577	1991,8	315696	2,80209
635	403225	256047875	25,1992	8,5952	0,001575	1994,9	316692	2,80277
636	404496	257259456	25,2190	8,5997	0,001572	1998,1	317690	2,80346
637	405769	258474853	25,2389	8,6043	0,001570	2001,2	318690	2,80414
638	407044	259694072	25,2587	8,6088	0,001567	2004,3	319692	2,80482
639	408321	260917119	25,2784	8,6132	0,001565	2007,5	320695	2,80550
640	409600	262144000	25,2982	8,6177	0,001563	2010,6	321699	2,80618
641	410881	263374721	25,3180	8,6222	0,001560	2013,8	322705	2,80686
642	412164	264609288	25,3377	8,6267	0,001558	2016,9	323713	2,80754
643	413449	265847707	25,3574	8,6312	0,001555	2020,0	324722	2,80821
644	414736	267089984	25,3772	8,6357	0,001553	2023,2	325733	2,80889
645	416025	268336125	25,3969	8,6401	0,001550	2026,3	326745	2,80956
646	417316	269586136	25,4165	8,6446	0,001548	2029,5	327759	2,81023
647	418609	270840023	25,4362	8,6490	0,001546	2032,6	328775	2,81090
648	419904	272097792	25,4558	8,6535	0,001543	2035,8	329792	2,81158
649	421201	273359449	25,4755	8,6579	0,001541	2038,9	330810	2,81224
650	422500	274625000	25,4951	8,6624	0,001538	2042,0	331831	2,81291

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	log n
651	423801	275894451	25,5147	8,6668	0,001536	2045,2	332853	2,81358
652	425104	277167808	25,5343	8,6713	0,001534	2048,3	333876	2,81425
653	426409	278445077	25,5539	8,6757	0,001531	2051,5	334901	2,81491
654	427716	279726264	25,5734	8,6801	0,001529	2054,6	335927	2,81558
655	429025	281011375	25,5930	8,6845	0,001527	2057,7	336955	2,81624
656	430336	282300416	25,6125	8,6890	0,001524	2060,9	337985	2,81690
657	431649	283593393	25,6320	8,6934	0,001522	2064,0	339016	2,81757
658	432964	284890312	25,6515	8,6978	0,001520	2067,2	340049	2,81823
659	434281	286191179	25,6710	8,7022	0,001517	2070,3	341084	2,81889
660	435600	287496000	25,6905	8,7066	0,001515	2073,5	342119	2,81954
661	436921	288804781	25,7099	8,7110	0,001513	2076,6	343157	2,82020
662	438244	290117528	25,7294	8,7154	0,001511	2079,7	344196	2,82086
663	439569	291434247	25,7488	8,7198	0,001508	2082,9	345237	2,82151
664	440896	292754944	25,7682	8,7241	0,001506	2086,0	346279	2,82217
665	442225	294079625	25,7876	8,7285	0,001504	2089,2	347323	2,82282
666	443556	295408296	25,8070	8,7329	0,001502	2092,3	348368	2,82347
667	444889	296740963	25,8263	8,7373	0,001499	2095,4	349415	2,82413
668	446224	298077632	25,8457	8,7416	0,001497	2098,6	350464	2,82478
669	447561	299418309	25,8650	8,7460	0,001495	2101,7	351514	2,82543
670	448900	300763000	25,8844	8,7503	0,001493	2104,9	352565	2,82607
671	450241	302111711	25,9037	8,7547	0,001490	2108,0	353618	2,82672
672	451584	303464448	25,9230	8,7590	0,001488	2111,2	354673	2,82737
673	452929	304821217	25,9422	8,7634	0,001486	2114,3	355730	2,82802
674	454276	306182024	25,9615	8,7677	0,001484	2117,4	356788	2,82866
675	455625	307546875	25,9808	8,7721	0,001481	2120,6	357847	2,82930
676	456976	308915776	26,0000	8,7764	0,001479	2123,7	358908	2,82995
677	458329	310288733	26,0192	8,7807	0,001477	2126,9	359971	2,83059
678	459684	311665752	26,0384	8,7850	0,001475	2130,0	361035	2,83123
679	461041	313046839	26,0576	8,7893	0,001473	2133,1	362101	2,83187
680	462400	314432000	26,0768	8,7937	0,001471	2136,3	363168	2,83251
681	463761	315821241	26,0960	8,7980	0,001468	2139,4	364237	2,83315
682	465124	317214568	26,1151	8,8023	0,001466	2142,6	365308	2,83378
683	466489	318611987	26,1343	8,8066	0,001464	2145,7	366380	2,83442
684	467856	320013504	26,1534	8,8109	0,001462	2148,9	367453	2,83506
685	469225	321419125	26,1725	8,8152	0,001460	2152,0	368528	2,83569
686	470596	322828856	26,1916	8,8194	0,001458	2155,1	369605	2,83632
687	471969	324242703	26,2107	8,8237	0,001456	2158,3	370684	2,83696
688	473344	325660672	26,2298	8,8280	0,001453	2161,4	371764	2,83759
689	474721	327082769	26,2488	8,8323	0,001451	2164,6	372845	2,83822
690	476100	328509000	26,2679	8,8366	0,001449	2167,7	373928	2,83885
691	477481	329939371	26,2869	8,8408	0,001447	2170,8	375013	2,83948
692	478864	331373888	26,3059	8,8451	0,001445	2174,0	376099	2,84011
693	480249	332812557	26,3249	8,8493	0,001443	2177,1	377187	2,84073
694	481636	334255384	26,3439	8,8536	0,001441	2180,3	378276	2,84136
695	483025	335702375	26,3629	8,8578	0,001439	2183,4	379367	2,84198
696	484416	337153536	26,3818	8,8621	0,001437	2186,5	380459	2,84261
697	485809	338608873	26,4008	8,8663	0,001435	2189,7	381554	2,84323
698	487204	340068392	26,4197	8,8706	0,001433	2192,8	382649	2,84386
699	488601	341532099	26,4386	8,8748	0,001431	2196,0	383746	2,84448
700	490000	343000000	26,4575	8,8790	0,001429	2199,1	384845	2,84510

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	log n
701	491401	344472101	26,4764	8,8833	0,001427	2202,3	385945	2,84572
702	492804	345948408	26,4953	8,8875	0,001425	2205,4	387047	2,84634
703	494209	347428927	26,5141	8,8917	0,001422	2208,5	388151	2,84696
704	495616	348913664	26,5330	8,8959	0,001420	2211,7	389256	2,84757
705	497025	350402625	26,5518	8,9001	0,001418	2214,8	390363	2,84819
706	498436	351895816	26,5707	8,9043	0,001416	2218,0	391471	2,84880
707	499849	353393243	26,5895	8,9085	0,001414	2221,1	392580	2,84942
708	501264	354894912	26,6083	8,9127	0,001412	2224,2	393692	2,85003
709	502681	356400829	26,6271	8,9169	0,001410	2227,4	394805	2,85065
710	504100	357911000	26,6458	8,9211	0,001408	2230,5	395919	2,85126
711	505521	359425431	26,6646	8,9253	0,001406	2233,7	397035	2,85187
712	506944	360944128	26,6833	8,9295	0,001404	2236.8	398153	2,85248
713	508369	362467097	26,7021	8,9337	0,001403	2240,0	399272	2,85309
714	509796	363994344	26,7208	8,9378	0,001401	2243,1	400393	2,85370
715	511225	365525875	26,7395	8,9420	0,001399	2246,2	401515	2,85431
716	512656	367061696	26,7582	8,9462	0,001397	2249,4	402639	2,85491
717	514089	368601813	26,7769	8,9503	0,001395	2252,5	403765	2,85552
718	515524	370146232	26,7955	8,9545	0,001393	2255,7	404892	2,85612
719	516961	371694959	26,8142	8,9587	0,001391	2258,8	406020	2,85673
720	518400	373248000	26,8328	8,9628	0,001389	2261,9	407150	2,85733
721	519841	374805361	26,8514	8,9670	0,001387	2265,1	408282	2,85794
722	521284	376367048	26,8701	8,9711	0,001385	2268,2	409415	2,85854
723	522729	377933067	26,8887	8,9752	0,001383	2271,4	410550	2,85914
724	524176	379503424	26,9072	8,9794	0,001381	2274,5	411687	2,85974
725	525625	381078125	26,9258	8,9835	0,001379	2277,7	412825	2,86034
726	527076	382657176	26,9444	8,9876	0,001377	2280,8	413965	2,86094
727	528529	384240583	26,9629	8,9918	0,001376	2283,9	415106	2,86153
728	529984	385828352	26,9815	8,9959	0,001374	2287,1	416248	2,86213
729	531441	387420489	27,0000	9,0000	0,001372	2290,2	417393	2,86273
730	532900	389017000	27,0185	9,0041	0,001370	2293,4	418539	2,86332
731	534361	390617891	27,0370	9,0082	0,001368	2296,5	419686	2,86392
732	535824	392223168	27,0555	9,0123	0,001366	2299,6	420835	2,86451
733	537289	393832837	27,0740	9,0164	0,001364	2302,8	421986	2,86510
734	538756	395446904	27,0924	9,0205	0,001362	2305,9	423138	2,86570
735	540225	397065375	27,1109	9,0246	0,001361	2309,1	424292	2,86629
736	541696	398688256	27,1293	9,0287	0,001359	2312,2	425447	2,86688
737	543169	400315553	27,1477	9,0328	0,001357	2315,4	426604	2,86747
738	544644	401947272	27,1662	9,0369	0,001355	2318,5	427762	2,86806
739	546121	403583419	27,1846	9,0410	0,001353	2321,6	428922	2,86864
740	547600	405224000	27,2029	9,0450	0,001351	2324,8	430084	2,86923
741	549081	406869021	27,2213	9,0491	0,001350	2327,9	431247	2,86982
742	550564	408518488	27,2397	9,0532	0,001348	2331,1	432412	2,87040
743	552049	410172407	27,2580	9,0572	0,001346	2334,2	433578	2,87099
744	553536	411830784	27,2764	9,0613	0,001344	2337,3	434746	2,87157
745	555025	413493625	27,2947	9,0654	0,001342	2340,5	435916	2,87216
746	556516	415160936	27,3130	9,0694	0,001340	2343,6	437087	2,87274
747	558009	416832723	27,3313	9,0735	0,001339	2346,8	438259	2,87332
748	559504	418508992	27,3496	9,0775	0,001337	2349,9	439433	2,87390
749	561001	420189749	27,3679	9,0816	0,001335	2353,1	440609	2,87448
750	562500	421875000	27,3861	9,0856	0,001333	2356,2	441786	2,87506

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	log n
751	564001	423564751	27,4044	9,0896	0,001332	2359,3	442965	2,87564
752	565504	425259008	27,4226	9,0937	0,001330	2362,5	444146	2,87622
753	567009	426957777	27,4408	9,0977	0,001328	2365,6	445328	2,87679
754	568516	428661064	27,4591	9,1017	0,001326	2368,8	446511	2,87737
755	570025	430368875	27,4773	9,1057	0,001325	2371,9	447697	2,87795
756	571536	432081216	27,4955	9,1098	0,001323	2375,0	448883	2,87852
757	573049	433798093	27,5136	9,1138	0,001321	2378,2	450072	2,87910
758	574564	435519512	27,5318	9,1178	0,001319	2381,3	451262	2,87967
759	576081	437245479	27,5500	9,1218	0,001318	2384,5	452453	2,88024
760	577600	438976000	27,5681	9,1258	0,001316	2387,6	453646	2,88081
761	579121	440711081	27,5862	9,1298	0,001314	2390,8	454841	2,88138
762	580644	442450728	27,6043	9,1338	0,001312	2393,9	456037	2,88195
763	582169	444194947	27,6225	9,1378	0,001311	2397,0	457234	2,88252
764	583696	445943744	27,6405	9,1418	0,001309	2400,2	458434	2,88309
765	585225	447697125	27,6586	9,1458	0,001307	2403,3	459635	2,88366
766	586756	449455096	27,6767	9,1498	0,001306	2406,5	460837	2,88423
767	588289	451217663	27,6948	9,1537	0,001304	2409,6	462041	2,88480
768	589824	452984832	27,7128	9,1577	0,001302	2412,7	463247	2,88536
769	591361	454756609	27,7308	9,1617	0,001300	2415,9	464454	2,88593
770	592900	456533000	27,7489	9,1657	0,001299	2419,0	465663	2,88649
771	594441	458314011	27,7669	9,1696	0,001297	2422,2	466873	2,88705
772	595984	460099648	27,7849	9,1736	0,001295	2425,3	468085	2,88762
773	597529	461889917	27,8029	9,1775	0,001294	2428,5	469298	2,88818
774	599076	463684824	27,8209	9,1815	0,001292	2431,6	470513	2,88874
775	600625	465484375	27,8388	9,1855	0,001290	2434,7	471730	2,88930
776	602176	467288576	27,8568	9,1894	0,001289	2437,9	472948	2,88986
777	603729	469097433	27,8747	9,1933	0,001287	2441,0	474168	2,89042
778	605284	470910952	27,8927	9,1973	0,001285	2444,2	475389	2,89098
779	606841	472729139	27,9106	9,2012	0,001284	2447,3	476612	2,89154
780	608400	474552000	27,9285	9,2052	0,001282	2450,4	477836	2,89209
781	609961	476379541	27,9464	9,2091	0,001280	2453,6	479062	2,89265
782	611524	478211768	27,9643	9,2130	0,001279	2456,7	480290	2,89321
783	613089	480048687	27,9821	9,2170	0,001277	2459,9	481519	2,89376
784	614656	481890304	28,0000	9,2209	0,001276	2463,0	482750	2,89432
785	616225	483736625	28,0179	9,2248	0,001274	2466,2	483982	2,89487
786	617796	485587656	28,0357	9,2287	0,001272	2469,3	485216	2,89542
787	619369	487443403	28,0535	9,2326	0,001271	2472,4	486451	2,89597
788	620944	489303872	28,0713	9,2365	0,001269	2475,6	487688	2,89653
789	622521	491169069	28,0891	9,2404	0,001267	2478,7	488927	2,89708
790	624100	493039000	28,1069	9,2443	0,001266	2481,9	490167	2,89763
791	625681	494913671	28,1247	9,2482	0,001264	2485,0	491409	2,89818
792	627264	496793088	28,1425	9,2521	0,001263	2488,1	492652	2,89873
793	628849	498677257	28,1603	9,2560	0,001261	2491,3	493897	2,89927
794	630436	500566184	28,1780	9,2599	0,001259	2494,4	495143	2,89982
795	632025	502459875	28,1957	9,2638	0,001258	2497,6	496391	2,90037
796	633616	504358336	28,2135	9,2677	0,001256	2500,7	497641	2,90091
797	635209	506261573	28,2312	9,2716	0,001255	2503,8	498892	2,90146
798	636804	508169592	28,2489	9,2754	0,001253	2507,0	500145	2,90200
799	638401	510082399	28,2666	9,2793	0,001252	2510,1	501399	2,90255
800	640000	512000000	28,2843	9,2832	0,001250	2513,3	502655	2,90309

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	log n
801	641601	513922401	28,3019	9,2870	0,001248	2516,4	503912	2,90363
802	643204	515849608	28,3196	9,2909	0,001247	2519,6	505171	2,90417
803	644809	517781627	28,3373	9,2948	0,001245	2522,7	506432	2,90472
804	646416	519718464	28,3549	9,2986	0,001244	2525,8	507694	2,90526
805	648025	521660125	28,3725	9,3025	0,001242	2529,0	508958	2,90580
806	649636	523606616	28,3901	9,3063	0,001241	2532,1	510228	2,90634
807	651249	525557943	28,4077	9,3102	0,001239	2535,3	511490	2,90687
808	652864	527514112	28,4253	9,3140	0,001238	2538,4	512758	2,90741
809	654481	529475129	28,4429	9,3179	0,001236	2541,5	514028	2,90795
810	656100	531441000	28,4605	9,3217	0,001235	2544,7	515300	2,90849
811	657721	533411731	28,4781	9,3255	0,001233	2547,8	516573	2,90902
812	659344	535387328	28,4956	9,3294	0,001232	2551,0	517848	2,90956
813	660969	537367797	28,5132	9,3332	0,001230	2554,1	519124	2,91009
814	662596	539353144	28,5307	9,3370	0,001229	2557,3	520402	2,91062
815	664225	541343375	28,5482	9,3408	0,001227	2560,4	521681	2,91116
816	665856	543338496	28,5657	9,3447	0,001225	2563,5	522962	2,91169
817	667489	545338513	28,5832	9,3485	0,001224	2566,7	524245	2,91222
818	669124	547343432	28,6007	9,3523	0,001222	2569,8	525529	2,91275
819	670761	549353259	28,6182	9,3561	0,001221	2573,0	526814	2,91328
820	672400	551368000	28,6356	9,3599	0,001220	2576,1	528102	2,91381
821	674041	553387661	28,6531	9,3637	0,001218	2579,2	529391	2,91434
822	675684	555412248	28,6705	9,3675	0,001217	2582,4	530681	2,91487
823	677329	557441767	28,6880	9,3713	0,001215	2585,5	531973	2,91540
824	678976	559476224	28,7054	9,3751	0,001214	2588,7	533267	2,91593
825	680625	561515625	28,7228	9,3789	0,001212	2591,8	534562	2,91645
826	682276	563559976	28,7402	9,3827	0,001211	2595,0	535858	2,91698
827	683929	565609283	28,7576	9,3865	0,001209	2598,1	537157	2,91751
828	685584	567663552	28,7750	9,3902	0,001208	2601,2	538456	2,91803
829	687241	569722789	28,7924	9,3940	0,001206	2604,4	539758	2,91855
830	688900	571787000	28,8097	9,3978	0,001205	2607,5	541061	2,91908
831	690561	573856191	28,8271	9,4016	0,001203	2610,7	542365	2,91960
832	692224	575930368	28,8444	9,4053	0,001202	2613,8	543671	2,92012
833	693889	578009537	28,8617	9,4091	0,001200	2616,9	544979	2,92065
834	695556	580093704	28,8791	9,4129	0,001199	2620,1	546288	2,92117
835	697225	582182875	28,8964	9,4166	0,001198	2623,2	547599	2,92169
836	698896	584277056	28,9137	9,4204	0,001196	2626,4	548912	2,92221
837	700569	586376253	28,9310	9,4241	0,001195	2629,5	550226	2,92273
838	702244	588480472	28,9482	9,4279	0,001193	2632,7	551541	2,92324
839	703921	590589719	28,9655	9,4316	0,001192	2635,8	552858	2,92376
840	705600	592704000	28,9828	9,4354	0,001190	2638,9	554177	2,92428
841	707281	594823321	29,0000	9,4391	0,001189	2642,1	555497	2,92480
842	708964	596947688	29,0172	9,4429	0,001188	2645,2	556819	2,92531
843	710649	599077107	29,0345	9,4466	0,001186	2648,4	558142	2,92583
844	712336	601211584	29,0517	9,4503	0,001185	2651,5	559467	2,92634
845	714025	603351125	29,0689	9,4541	0,001183	2654,6	560794	2,92686
846	715716	605495736	29,0861	9,4578	0,001182	2657,8	562122	2,92737
847	717409	607645423	29,1033	9,4615	0,001181	2660,9	563452	2,92788
848	719104	609800192	29,1204	9,4652	0,001179	2664,1	564783	2,92840
849	720801	611960049	29,1376	9,4690	0,001178	2667,2	566116	2,92891
850	722500	614125000	29,1548	9,4727	0,001176	2670,4	567450	2,92942

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	log n
851	724201	616295051	29,1719	9,4764	0,001175	2673,5	568786	2,92993
852	725904	618470208	29,1890	9,4801	0,001174	2676,6	570124	2,93044
853	727609	620650477	29,2062	9,4838	0,001172	2679,8	571463	2,93095
854	729316	622835864	29,2233	9,4875	0,001171	2682,9	572803	2,93146
855	731025	625026375	29,2404	9,4912	0,001170	2686,1	574146	2,93197
856	732736	627222016	29,2575	9,4949	0,001168	2689,2	575490	2,93247
857	734449	629422793	29,2746	9,4986	0,001167	2692,3	576835	2,93298
858	736164	631628712	29,2916	9,5023	0,001166	2695,5	578182	2,93349
859	737881	633839779	29,3087	9,5060	0,001164	2698,6	579530	2,93399
860	739600	636056000	29,3258	9,5097	0,001163	2701,8	580880	2,93450
861	741321	638277381	29,3428	9,5134	0,001161	2704,9	582232	2,93500
862	743044	640503928	29,3598	9,5171	0,001160	2708,1	583585	2,93551
863	744769	642735647	29,3769	9,5207	0,001159	2711,2	584940	2,93601
864	746496	644972544	29,3939	9,5244	0,001157	2714,3	586297	2,93651
865	748225	647214625	29,4109	9,5281	0,001156	2717,5	587655	2,93702
866	749956	649461896	29,4279	9,5317	0,001155	2720,6	589014	2,93752
867	751689	651714363	29,4449	9,5354	0,001153	2723,8	590375	2,93802
868	753424	653972032	29,4618	9,5391	0,001152	2726,9	591738	2,93852
869	755161	656234909	29,4788	9,5427	0,001151	2730,0	593102	2,93902
870	756900	658503000	29,4958	9,5464	0,001149	2733,2	594468	2,93952
871	758641	660776311	29,5127	9,5501	0,001148	2736,3	595835	2,94002
872	760384	663054848	29,5296	9,5537	0,001147	2739,5	597204	2,94052
873	762129	665338617	29,5466	9,5574	0,001145	2742,6	598575	2,94101
874	763876	667627624	29,5635	9,5610	0,001144	2745,8	599947	2,94151
875	765625	669921875	29,5804	9,5647	0,001143	2748,9	601320	2,94201
876	767376	672221376	29,5973	9,5683	0,001142	2752,0	602696	2,94250
877	769129	674526133	29,6142	9,5719	0,001140	2755,2	604073	2,94300
878	770884	676836152	29,6311	9,5756	0,001139	2758,3	605451	2,94349
879	772641	679151439	29,6479	9,5792	0,001138	2761,5	606831	2,94399
880	774400	681472000	29,6648	9,5828	0,001136	2764,6	608212	2,94448
881	776161	683797841	29,6816	9,5865	0,001135	2767,7	609595	2,94498
882	777924	686128968	29,6985	9,5901	0,001134	2770,9	610980	2,94547
883	779689	688465387	29,7153	9,5937	0,001133	2774,0	612366	2,94596
884	781456	690807104	29,7321	9,5973	0,001131	2777,2	613754	2,94645
885	783225	693154125	29,7489	9,6010	0,001130	2780,3	615143	2,94694
886	784996	695506456	29,7658	9,6046	0,001129	2783,5	616534	2,94743
887	786769	697864103	29,7825	9,6082	0,001127	2786,6	617927	2,94792
888	788544	700227072	29,7993	9,6118	0,001126	2789,7	619321	2,94841
889	790321	702595369	29,8161	9,6154	0,001125	2792,9	620717	2,94890
890	792100	704969000	29,8329	9,6190	0,001124	2796,0	622114	2,94939
891	793881	707347971	29,8496	9,6226	0,001122	2799,2	623513	2,94988
892	795664	709732288	29,8664	9,6262	0,001121	2802,3	624913	2,95036
893	797449	712121957	29,8831	9,6298	0,001120	2805,4	626315	2,95085
894	799236	714516984	29,8998	9,6334	0,001119	2808,6	627718	2,95134
895	801025	716917375	29,9166	9,6370	0,001117	2811,7	629124	2,95182
896	802816	719323136	29,9333	9,6406	0,001116	2814,9	630530	2,95231
897	804609	721734273	29,9500	9,6442	0,001115	2818,0	631938	2,95279
898	806404	724150792	29,9666	9,6477	0,001114	2821,2	633348	2,95328
899	808201	726572699	29,9833	9,6513	0,001112	2824,3	634760	2,95376
900	810000	729000000	30,0000	9,6549	0,001111	2827,4	636173	2,95424

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	log n
901	811801	731432701	30,0167	9,6585	0,001110	2830,6	637587	2,95472
902	813604	733870808	30,0333	9,6620	0,001109	2833,7	639003	2,95521
903	815409	736314327	30,0500	9,6656	0,001107	2836,9	640421	2,95569
904	817216	738763264	30,0666	9,6692	0,001106	2840,0	641840	2,95617
905	819025	741217625	30,0832	9,6727	0,001105	2843,1	643261	2,95665
906	820836	743677416	30,0998	9,6763	0,001104	2846,3	644683	2,95713
907	822649	746142643	30,1164	9,6799	0,001103	2849,4	646107	2,95761
908	824464	748613312	30,1330	9,6834	0,001101	2852,6	647533	2,95809
909	826281	751089429	30,1496	9,6870	0,001100	2855,7	648960	2,95856
910	828100	753571000	30,1662	9,6905	0,001099	2858,8	650388	2,95904
911	829921	756058031	30,1828	9,6941	0,001098	2862,0	651818	2,95952
912	831744	758550528	30,1993	9,6976	0,001096	2865,1	653250	2,95999
913	833569	761048497	30,2159	9,7012	0,001095	2868,3	654684	2,96047
914	835396	763551944	30,2324	9,7047	0,001094	2871,4	656118	2,96095
915	837225	766060875	30,2490	9,7082	0,001093	2874,6	657555	2,96142
916	839056	768575296	30,2655	9,7118	0,001092	2877,7	658993	2,96190
917	840889	771095213	30,2820	9,7153	0,001091	2880,8	660433	2,96237
918	842724	773620632	30,2985	9,7188	0,001089	2884,0	661874	2,96284
919	844561	776151559	30,3150	9,7224	0,001088	2887,1	663317	2,96332
920	846400	778688000	30,3315	9,7259	0,001087	2890,3	664761	2,96379
921	848241	781229961	30,3480	9,7294	0,001086	2893,4	666207	2,96426
922	850084	783777448	30,3645	9,7329	0,001085	2896,5	667654	2,96473
923	851929	786330467	30,3809	9,7364	0,001083	2899,7	669103	2,96520
924	853776	788889024	30,3974	9,7400	0,001082	2902,8	670554	2,96567
925	855625	791453125	30,4138	9,7435	0,001081	2906,0	672006	2,96614
926	857476	794022776	30,4302	9,7470	0,001080	2909,1	673460	2,96661
927	859329	796597983	30,4467	9,7505	0,001079	2912,3	674915	2,96708
928	861184	799178752	30,4631	9,7540	0,001078	2915,4	676372	2,96755
929	863041	801765089	30,4795	9,7575	0,001076	2918,5	677831	2,96802
930	864900	804357000	30,4959	9,7610	0,001075	2921,7	679291	2,96848
931	866761	806954491	30,5123	9,7645	0,001074	2924,8	680752	2,96895
932	868624	809557568	30,5287	9,7680	0,001073	2928,0	682216	2,96942
933	870489	812166237	30,5450	9,7715	0,001072	2931,1	683680	2,96988
934	872356	814780504	30,5614	9,7750	0,001071	2934,2	685147	2,97035
935	874225	817400375	30,5778	9,7785	0,001070	2937,4	686615	2,97081
936	876096	820025856	30,5941	9,7819	0,001068	2940,5	688084	2,97128
937	877969	822656953	30,6105	9,7854	0,001067	2943,7	689555	2,97174
938	879844	825293672	30,6268	9,7889	0,001066	2946,8	691028	2,97220
939	881721	827936019	30,6431	9,7924	0,001065	2950,0	692502	2,97267
940	883600	830584000	30,6594	9,7959	0,001064	2953,1	693978	2,97313
941	885481	833237621	30,6757	9,7993	0,001063	2956,2	695455	2,97359
942	887364	835896888	30,6920	9,8028	0,001062	2959,4	696934	2,97405
943	889249	838561807	30,7083	9,8063	0,001060	2962,5	698415	2,97451
944	891136	841232384	30,7246	9,8097	0,001059	2965,7	699897	2,97497
945	893025	843908625	30,7409	9,8132	0,001058	2968,8	701380	2,97543
946	894916	846590536	30,7571	9,8167	0,001057	2971,9	702865	2,97589
947	896809	849278123	30,7734	9,8201	0,001056	2975,1	704352	2,97635
948	898704	851971392	30,7896	9,8236	0,001055	2978,2	705840	2,97681
949	900601	854670349	30,8058	9,8270	0,001054	2981,4	707330	2,97727
950	902500	857875000	30,8221	9,8305	0,001053	2984,5	708822	2,97772

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	log n
951	904401	860085351	30,8383	9,8339	0,001052	2987,7	710315	2,97818
952	906304	862801408	30,8545	9,8374	0,001050	2990,8	711809	2,97864
953	908209	865523177	30,8707	9,8408	0,001049	2993,9	713306	2,97909
954	910116	868250664	30,8869	9,8443	0,001048	2997,1	714803	2,97955
955	912025	870983875	30,9031	9,8477	0,001047	3000,2	716303	2,98000
956	913936	873722816	30,9192	9,8511	0,001046	3003,4	717804	2,98046
957	915849	876467493	30,9354	9,8546	0,001045	3006,5	719306	2,98091
958	917764	879217912	30,9516	9,8580	0,001044	3009,6	720810	2,98137
959	919681	881974079	30,9677	9,8614	0,001043	3012,8	722316	2,98182
960	921600	884736000	30,9839	9,8648	0,001042	3015,9	723823	2,98227
961	923521	887503681	31,0000	9,8683	0,001041	3019,1	725332	2,98272
962	925444	890277128	31,0161	9,8717	0,001040	3022,2	726842	2,98318
963	927369	893056347	31,0322	9,8751	0,001038	3025,4	728354	2,98363
964	929296	895841344	31,0483	9,8785	0,001037	3028,5	729867	2,98408
965	931225	898632125	31,0644	9,8819	0,001036	3031,6	731382	2,98453
966	933156	901428696	31,0805	9,8854	0,001035	3034,8	732899	2,98498
967	935089	904231063	31,0966	9,8888	0,001034	3037,9	734417	2,98543
968	937024	907039232	31,1127	9,8922	0,001033	3041,1	735937	2,98588
969	938961	909853209	31,1288	9,8956	0,001032	3044,2	737458	2,98632
970	940900	912673000	31,1448	9,8990	0,001031	3047,3	738981	2,98677
971	942841	915498611	31,1609	9,9024	0,001030	3050,5	740506	2,98722
972	944784	918330048	31,1769	9,9058	0,001029	3053,6	742032	2,98767
973	946729	921167317	31,1929	9,9092	0,001028	3056,8	743559	2,98811
974	948676	924010424	31,2090	9,9126	0,001027	3059,9	745088	2,98856
975	950625	926859375	31,2250	9,9160	0,001026	3063,1	746619	2,98900
976	952576	929714176	31,2410	9,9194	0,001025	3066,2	748151	2,98945
977	954529	932574833	31,2570	9,9227	0,001024	3069,3	749685	2,98989
978	956484	935441352	31,2730	9,9261	0,001023	3072,5	751221	2,99034
979	958441	938313739	31,2890	9,9295	0,001022	3075,6	752758	2,99078
980	960400	941192000	31,3050	9,9329	0,001020	3078,8	754296	2,99123
981	962361	944076141	31,3209	9,9363	0,001019	3081,9	755837	2,99167
982	964324	946966168	31,3369	9,9396	0,001018	3085,0	757378	2,99211
983	966289	949862087	31,3528	9,9430	0,001017	3088,2	758922	2,99255
984	968256	952763904	31,3688	9,9464	0,001016	3091,3	760466	2,99300
985	970225	955671625	31,3847	9,9497	0,001015	3094,5	762013	2,99344
986	972196	958585256	31,4006	9,9531	0,001014	3097,6	763561	2,99388
987	974169	961504803	31,4166	9,9565	0,001013	3100,8	765111	2,99432
988	976144	964430272	31,4325	9,9598	0,001012	3103,9	766662	2,99476
989	978121	967361669	31,4484	9,9632	0,001011	3107,0	768214	2,99520
990	980100	970299000	31,4643	9,9666	0,001010	3110,2	769769	2,99564
991	982081	973242271	31,4802	9,9699	0,001009	3113,3	771325	2,99607
992	984064	976191488	31,4960	9,9733	0,001008	3116,5	772882	2,99651
993	986049	979146657	31,5119	9,9766	0,001007	3119,6	774441	2,99695
994	988036	982107784	31,5278	9,9800	0,001006	3122,7	776002	2,99739
995	990025	985074875	31,5436	9,9833	0,001005	3125,9	777564	2,99782
996	992016	988047936	31,5595	9,9866	0,001004	3129,0	779128	2,99826
997	994009	991026973	31,5753	9,9900	0,001003	3132,2	780693	2,99870
998	996004	994011992	31,5911	9,9933	0,001002	3135,3	782260	2,99913
999	998001	997002999	31,6070	9,9967	0,001001	3138,5	783828	2,99957
1000	1000000	1000000000	31,6228	10,0000	0,001000	3141,6	785398	3,00000

Die Winkel von 46° bis 90° sind unter 45° 60′ bis 89° 60′ zu suchen.

Grad	Sinus						Grad
	0′	10′	20′	30′	40′	50′	
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01454	89
1	0,01745	0,02036	0,02327	0,02618	0,02908	0,03199	88
2	0,03490	0,03781	0,04071	0,04362	0,04653	0,04943	87
3	0,05234	0,05524	0,05814	0,06105	0,06395	0,06685	86
4	0,06976	0,07266	0,07556	0,07846	0,08136	0,08426	85
5	0,08716	0,09005	0,09295	0,09585	0,09874	0,10164	84
6	0,10453	0,10742	0,11031	0,11320	0,11609	0,11898	83
7	0,12187	0,12476	0,12764	0,13053	0,13341	0,13629	82
8	0,13917	0,14205	0,14493	0,14781	0,15069	0,15356	81
9	0,15643	0,15931	0,16218	0,16505	0,16792	0,17078	80
10	0,17365	0,17651	0,17937	0,18224	0,18509	0,18795	79
11	0,19081	0,19366	0,19652	0,19937	0,20222	0,20507	78
12	0,20791	0,21076	0,21360	0,21644	0,21928	0,22212	77
13	0,22495	0,22778	0,23062	0,23345	0,23627	0,23910	76
14	0,24192	0,24474	0,24756	0,25038	0,25320	0,25601	75
15	0,25882	0,26163	0,26443	0,26724	0,27004	0,27284	74
16	0,27564	0,27843	0,28123	0,28402	0,28680	0,28959	73
17	0,29237	0,29515	0,29793	0,30071	0,30348	0,30625	72
18	0,30902	0,31178	0,31454	0,31730	0,32006	0,32282	71
19	0,32557	0,32832	0,33106	0,33381	0,33655	0,33929	70
20	0,34202	0,34475	0,34748	0,35021	0,35293	0,35565	69
21	0,35837	0,36108	0,36379	0,36650	0,36921	0,37191	68
22	0,37461	0,37730	0,37999	0,38268	0,38537	0,38805	67
23	0,39073	0,39341	0,39608	0,39875	0,40141	0,40408	66
24	0,40674	0,40939	0,41204	0,41469	0,41734	0,41998	65
25	0,42262	0,42525	0,42788	0,43051	0,43313	0,43575	64
26	0,43837	0,44098	0,44359	0,44620	0,44880	0,45140	63
27	0,45399	0,45658	0,45917	0,46175	0,46433	0,46690	62
28	0,46947	0,47204	0,47460	0,47716	0,47971	0,48226	61
29	0,48481	0,48735	0,48989	0,49242	0,49495	0,49748	60
30	0,50000	0,50252	0,50503	0,50754	0,51004	0,51254	59
31	0,51504	0,51753	0,52002	0,52250	0,52498	0,52745	58
32	0,52992	0,53238	0,53484	0,53730	0,53975	0,54220	57
33	0,54464	0,54708	0,54951	0,55194	0,55436	0,55678	56
34	0,55919	0,56160	0,56401	0,56641	0,56880	0,57119	55
35	0,57358	0,57596	0,57833	0,58070	0,58307	0,58543	54
36	0,58779	0,59014	0,59248	0,59482	0,59716	0,59949	53
37	0,60182	0,60414	0,60645	0,60876	0,61107	0,61337	52
38	0,61566	0,61795	0,62024	0,62251	0,62479	0,62706	51
39	0,62932	0,63158	0,63383	0,63608	0,63832	0,64056	50
40	0,64279	0,64501	0,64723	0,64945	0,65166	0,65386	49
41	0,65606	0,65825	0,66044	0,66262	0,66480	0,66697	48
42	0,66913	0,67129	0,67344	0,67559	0,67773	0,67987	47
43	0,68200	0,68412	0,68624	0,68835	0,69046	0,69256	46
44	0,69466	0,69675	0,69883	0,70091	0,70298	0,70505	45
45	0,70711	0,70916	0,71121	0,71325	0,71529	0,71732	44
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	Grad
	Cosinus						

Die Winkel von 46° bis 90° sind

Grad	Cosinus 0′	10′	20′	30′	40′	50′	Grad
0	1,00000	1,00000	0,99998	0,99996	0,99993	0,99989	89
1	0,99985	0,99979	0,99973	0,99966	0,99958	0,99949	88
2	0,99939	0,99929	0,99917	0,99905	0,99892	0,99878	87
3	0,99863	0,99847	0,99831	0,99813	0,99795	0,99776	86
4	0,99756	0,99736	0,99714	0,99692	0,99668	0,99644	85
5	0,99619	0,99594	0,99567	0,99540	0,99511	0,99482	84
6	0,99452	0,99421	0,99390	0,99357	0,99324	0,99290	83
7	0,99255	0,99219	0,99182	0,99144	0,99106	0,99067	82
8	0,99027	0,98986	0,98944	0,98902	0,98858	0,98814	81
9	0,98769	0,98723	0,98676	0,98629	0,98580	0,98531	80
10	0,98481	0,98430	0,98378	0,98325	0,98272	0,98218	79
11	0,98163	0,98107	0,98050	0,97992	0,97934	0,97875	78
12	0,97815	0,97754	0,97692	0,97630	0,97566	0,97502	77
13	0,97437	0,97371	0,97304	0,97237	0,97169	0,97100	76
14	0,97030	0,96959	0,96887	0,96815	0,96742	0,96667	75
15	0,96593	0,96517	0,96440	0,96363	0,96285	0,96206	74
16	0,96126	0,96046	0,95964	0,95882	0,95799	0,95715	73
17	0,95630	0,95545	0,95459	0,95372	0,95284	0,95195	72
18	0,95106	0,95015	0,94924	0,94832	0,94740	0,94646	71
19	0,94552	0,94457	0,94361	0,94264	0,94167	0,94068	70
20	0,93969	0,93869	0,93769	0,93667	0,93565	0,93462	69
21	0,93358	0,93253	0,93148	0,93042	0,92935	0,92827	68
22	0,92718	0,92609	0,92499	0,92388	0,92276	0,92164	67
23	0,92050	0,91936	0,91822	0,91706	0,91590	0,91472	66
24	0,91355	0,91236	0,91116	0,90996	0,90875	0,90753	65
25	0,90631	0,90507	0,90383	0,90259	0,90133	0,90007	64
26	0,89879	0,89752	0,89623	0,89493	0,89363	0,89232	63
27	0,89101	0,88968	0,88835	0,88701	0,88566	0,88431	62
28	0,88295	0,88158	0,88020	0,87882	0,87743	0,87603	61
29	0,87462	0,87321	0,87178	0,87036	0,86892	0,86748	60
30	0,86603	0,86457	0,86310	0,86163	0,86015	0,85866	59
31	0,85717	0,85567	0,85416	0,85264	0,85112	0,84959	58
32	0,84805	0,84650	0,84495	0,84339	0,84182	0,84025	57
33	0,83867	0,83708	0,83549	0,83389	0,83228	0,83066	56
34	0,82904	0,82741	0,82577	0,82413	0,82248	0,82082	55
35	0,81915	0,81748	0,81580	0,81412	0,81242	0,81072	54
36	0,80902	0,80730	0,80558	0,80386	0,80212	0,80038	53
37	0,79864	0,79688	0,79512	0,79335	0,79158	0,78980	52
38	0,78801	0,78622	0,78442	0,78261	0,78079	0,77897	51
39	0,77715	0,77531	0,77347	0,77162	0,76977	0,76791	50
40	0,76604	0,76417	0,76229	0,76041	0,75851	0,75661	49
41	0,75471	0,75280	0,75088	0,74896	0,74703	0,74509	48
42	0,74314	0,74120	0,73924	0,73728	0,73531	0,73333	47
43	0,73135	0,72937	0,72737	0,72537	0,72337	0,72136	46
44	0,71934	0,71732	0,71529	0,71325	0,71121	0,70916	45
45	0,70711	0,70505	0,70298	0,70091	0,69883	0,69675	44
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	Grad
	Sinus						

unter 45° 60′ bis 89° 60′ zu suchen.

Grad	Tangens						Grad
	0′	10′	20′	30′	40′	50′	
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01455	89
1	0,01746	0,02036	0,02328	0,02619	0,02910	0,03201	88
2	0,03492	0,03783	0,04075	0,04366	0,04658	0,04949	87
3	0,05241	0,05533	0,05824	0,06116	0,06408	0,06700	86
4	0,06993	0,07285	0,07578	0,07870	0,08163	0,08456	85
5	0,08749	0,09042	0,09335	0,09629	0,09923	0,10216	84
6	0,10510	0,10805	0,11099	0,11394	0,11688	0,11983	83
7	0,12278	0,12574	0,12869	0,13165	0,13461	0,13758	82
8	0,14054	0,14351	0,14648	0,14945	0,15243	0,15540	81
9	0,15838	0,16137	0,16435	0,16734	0,17033	0,17333	80
10	0,17633	0,17933	0,18233	0,18534	0,18835	0,19136	79
11	0,19438	0,19740	0,20042	0,20345	0,20648	0,20952	78
12	0,21256	0,21560	0,21864	0,22169	0,22475	0,22781	77
13	0,23087	0,23393	0,23700	0,24008	0,24316	0,24624	76
14	0,24933	0,25242	0,25552	0,25862	0,26172	0,26483	75
15	0,26795	0,27107	0,27419	0,27732	0,28046	0,28360	74
16	0,28675	0,28990	0,29305	0,29621	0,29938	0,30255	73
17	0,30573	0,30891	0,31210	0,31530	0,31850	0,32171	72
18	0,32492	0,32814	0,33136	0,33460	0,33783	0,34108	71
19	0,34433	0,34758	0,35085	0,35412	0,35740	0,36068	70
20	0,36397	0,36727	0,37057	0,37388	0,37720	0,38053	69
21	0,38386	0,38721	0,39055	0,39391	0,39727	0,40065	68
22	0,40403	0,40741	0,41081	0,41421	0,41763	0,42105	67
23	0,42447	0,42791	0,43136	0,43481	0,43828	0,44175	66
24	0,44523	0,44872	0,45222	0,45573	0,45924	0,46277	65
25	0,46631	0,46985	0,47341	0,47698	0,48055	0,48414	64
26	0,48773	0,49134	0,49495	0,49858	0,50222	0,50587	63
27	0,50953	0,51319	0,51688	0,52057	0,52427	0,52798	62
28	0,53171	0,53545	0,53920	0,54296	0,54673	0,55051	61
29	0,55431	0,55812	0,56194	0,56577	0,56962	0,57348	60
30	0,57735	0,58124	0,58513	0,58905	0,59297	0,59691	59
31	0,60086	0,60483	0,60881	0,61280	0,61681	0,62083	58
32	0,62487	0,62892	0,63299	0,63707	0,64117	0,64528	57
33	0,64941	0,65355	0,65771	0,66189	0,66608	0,67028	56
34	0,67451	0,67875	0,68301	0,68728	0,69157	0,69588	55
35	0,70021	0,70455	0,70891	0,71329	0,71769	0,72211	54
36	0,72654	0,73100	0,73547	0,73996	0,74447	0,74900	53
37	0,75355	0,75812	0,76272	0,76733	0,77196	0,77661	52
38	0,78129	0,78598	0,79070	0,79544	0,80020	0,80498	51
39	0,80978	0,81461	0,81946	0,82434	0,82923	0,83415	50
40	0,83910	0,84407	0,84906	0,85408	0,85912	0,86419	49
41	0,86929	0,87441	0,87955	0,88473	0,88992	0,89515	48
42	0,90040	0,90569	0,91099	0,91633	0,92170	0,92709	47
43	0,93252	0,93797	0,94345	0,94896	0,95451	0,96008	46
44	0,96569	0,97133	0,97700	0,98270	0,98843	0,99420	45
45	1,00000	1,00583	1,01170	1,01761	1,02355	1,02951	44
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	Grad
	Cotangens						

Die Winkel von 46° bis 90° sind unter 45° 60′ bis 89° 60′ zu suchen.

Grad	Cotangens						Grad
	0′	10′	20′	30′	40′	50′	
0	∞	343,77371	171,88540	114,58865	85,93979	68,75009	89
1	57,28996	49,10388	42,96408	38.18846	34,36777	31,24158	88
2	28,63625	26,43160	24,54176	22,90377	21,47040	20,20555	87
3	19,08114	18,07498	17,16934	16,34986	15,60478	14,92442	86
4	14,30067	13,72674	13,19688	12,70621	12,25051	11,82617	85
5	11,43005	11,05943	10,71191	10,38540	10,07803	9,78817	84
6	9,51436	9,25530	9,00983	8,77689	8,55555	8,34496	83
7	8,14435	7,95302	7,77035	7,59575	7,42871	7,26873	82
8	7,11537	6,96823	6,82694	6,69116	6,56055	6,43484	81
9	6,31375	6,19703	6,08444	5,97576	5,87080	5,76937	80
10	5,67128	5,57638	5,48451	5,39552	5,30928	5,22566	79
11	5,14455	5,06584	4,98940	4,91516	4,84301	4,77286	78
12	4,70463	4,63825	4,57363	4,51071	4,44942	4,38969	77
13	4,33148	4,27471	4,21933	4,16531	4,11256	4,06107	76
14	4,01078	3,96165	3,91364	3,86671	3,82083	3,77595	75
15	3,73205	3,68909	3,64705	3,60588	3,56557	3,52609	74
16	3,48741	3,44951	3,41236	3,37594	3,34023	3,30521	73
17	3,27085	3,23714	3,20406	3,17159	3,13972	3,10842	72
18	3,07768	3,04749	3,01783	2,98868	2,96004	2,93189	71
19	2,90421	2,87700	2,85023	2,82391	2,79802	2,77254	70
20	2,74748	2,72281	2,69853	2,67462	2,65109	2,62791	69
21	2,60509	2,58261	2,56046	2,53865	2,51715	2,49597	68
22	2,47509	2,45451	2,43422	2,41421	2,39449	2,37504	67
23	2,35585	2,33693	2,31826	2,29984	2,28167	2,26374	66
24	2,24604	2,22857	2,21132	2,19430	2,17749	2,16090	65
25	2,14451	2,12832	2,11233	2,09654	2,08094	2,06553	64
26	2,05030	2,03526	2,02039	2,00569	1,99116	1,97680	63
27	1,96261	1,94858	1,93470	1,92098	1,90741	1,89400	62
28	1,88073	1,86760	1,85462	1,84177	1,82906	1,81649	61
29	1,80405	1,79174	1,77955	1,76749	1,75556	1,74375	60
30	1,73205	1,72047	1,70901	1,69766	1,68643	1,67530	59
31	1,66428	1,65337	1,64256	1,63185	1,62125	1,61074	58
32	1,60033	1,59002	1,57981	1,56969	1,55966	1,54972	57
33	1,53987	1,53010	1,52043	1,51084	1,50133	1,49190	56
34	1,48256	1,47330	1,46411	1,45501	1,44598	1,43703	55
35	1,42815	1,41934	1,41061	1,40195	1,39336	1,38484	54
36	1,37638	1,36800	1,35968	1,35142	1,34323	1,33511	53
37	1,32704	1,31904	1,31110	1,30323	1,29541	1,28764	52
38	1,27994	1,27230	1,26471	1,25717	1,24969	1,24227	51
39	1,23490	1,22758	1,22031	1,21310	1,20593	1,19882	50
40	1,19175	1,18474	1,17777	1,17085	1,16398	1,15715	49
41	1,15037	1,14363	1,13694	1,13029	1,12369	1,11713	48
42	1,11061	1,10414	1,09770	1,09131	1,08496	1,07864	47
43	1,07237	1,06613	1,05994	1,05378	1,04766	1,04158	46
44	1,03553	1,02952	1,02355	1,01761	1,01170	1,00583	45
45	1,00000	0,99420	0,98843	0,98270	0,97700	0,97133	44
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	Grad
	Tangens						

v	h	v	h	v	h
0,1	0,00051	9,90458	**5,0**	**30,0**	45,8701
0,2	0,00204	**10,0**	5,09680	31,3206	**50,0**
0,3	0,00459	10,8499	**6,0**	**32,0**	52,1913
0,4	0,00816	**11,0**	6,16713	32,8493	**55,0**
0,5	0,01274	11,7199	**7,0**	**34,0**	58,9190
0,6	0,01835	**12,0**	7,33939	34,3100	**60,0**
0,7	0,02497	12,5282	**8,0**	35,5469	**65,0**
0,8	0,03262	**13,0**	8,61359	**36,0**	66,0545
0,9	0,04128	13,2882	**9,0**	37,0590	**70,0**
1,0	0,05097	**14,0**	9,98972	**38,0**	73,5977
1,40071	**0,1**	14,0070	**10,0**	38,1835	**75,0**
1,98089	**0,2**	14,6907	**11,0**	39,6179	**80,0**
2,0	0,20387	**15,0**	11,46780	**40,0**	81,5487
2,42608	**0,3**	15,3439	**12,0**	40,6494	**85,0**
2,5	0,31855	15,9702	**13,0**	**42,0**	89,0076
2,78907	**0,4**	**16,0**	13,04781	42,0297	**90,0**
3,0	0,45871	16,5773	**14,0**	42,9741	**95,0**
3,13206	**0,5**	**17,0**	14,72975	**44,0**	98,6741
3,43115	**0,6**	17,1550	**15,0**	44,2940	**100,0**
3,5	0,62436	17,7176	**16,0**	**46,0**	107,848
3,96177	**0,8**	**18,0**	16,51363	**48,0**	117,430
4,0	0,81549	18,0538	**17,0**	**50,0**	127,420
4,20210	**0,9**	18,7835	**18,0**	54,2489	**150,0**
4,42940	**1,0**	**19,0**	18,39944	**55,0**	154,178
4,5	1,03210	19,3078	**19,0**	**60,0**	183,485
5,0	1,27420	19,8089	**20,0**	62,6412	**200,0**
5,42488	**1,5**	**20,0**	20,3872	**65,0**	215,340
5,5	1,54178	**21,0**	22,4769	**70,0**	249,743
6	1,83485	**22,0**	24,6686	70,0349	**250,0**
6,26412	**2,0**	22,1470	**25,0**	**75,0**	287,423
6,5	2,15340	**23,0**	26,9621	76,7194	**300,0**
7,0	2,49743	**24,0**	29,3576	**80,0**	326,947
7,5	2,86695	24,2608	**30,0**	82,4856	**350,0**
7,67195	**3,0**	**25,0**	31,8550	**85,0**	368,243
8,0	3,26195	**26,0**	34,4544	88,5880	**400,0**
8,28664	**3,5**	26,2047	**35,0**	**90,0**	412,841
8,5	3,68240	**27,0**	37,1557	92,4594	**450,0**
8,85880	**4,0**	**28,0**	39,9589	**95,0**	459,986
9,0	4,12841	28,0140	**40,0**	99,0442	**500,0**
9,39618	**4,5**	**29,0**	42,8641	**190,0**	509,680
9,5	4,59986	29,7138	**45,0**		

Tabelle über Bogen- und Winkelgeschwindigkeit (v und w° bezw. $\widehat{w}$ pro Sek.) und Umdrehungen n pro Minute für den Radius = 1.

Für den Radius $\rho = 1$ wird Winkelgeschwindigkeit = Umfangsgeschwindigkeit

$\widehat{w} = v = \frac{\pi n}{30} = 0{,}10472\,n$, $n = \frac{30}{\pi} v = \frac{30}{\pi} \widehat{w} = 9{,}5493\,v$, aus $\widehat{w} : w^\circ = 2\pi : 36$

folgt $w^\circ = \frac{180}{\pi} \widehat{w} = \frac{180}{\pi} v = 6n$, $\widehat{w} = \frac{\pi}{180} w^\circ = 0{,}017453\,w^\circ$.

n	$v = \widehat{w}$	w°	n	$v = \widehat{w}$	w°
1	0,1047	6	35	3,6652	210
2	0,2094	12	36	3,7699	216
3	0,3142	18	37	3,8746	222
4	0,4189	24	38	3,9794	228
5	0,5236	30	38,197	4,0	229° 9′ 55″
6	0,6283	36	39	4,0841	234
7	0,7330	42	40	4,1888	240
8	0,8378	48	41	4,2935	246
9	0,9425	54	42	4,3982	252
9,549	1,0	57° 17′ 45″	42,972	4,5	257° 49′ 52″
10	1,0472	60	43	4,5029	258
11	1,1519	66	44	4,6077	264
12	1,2566	72	45	4,7124	270
13	1,3614	78	46	4,8171	276
14	1,4661	84	47	4,9218	282
14,324	1,5	85° 56′ 37″	47,747	5,0	286° 28′ 45″
15	1,5708	90	48	5,0265	288
16	1,6755	96	49	5,1313	294
17	1,7802	102	50	5,2360	300
18	1,8850	108	51	5,3407	306
19	1,9897	114	52	5,4454	312
19,099	2,0	114° 35′ 30″	52,521	5,5	315° 7′ 37″
20	2,0944	120	53	5,5501	318
21	2,1991	126	54	5,6549	324
22	2,3038	132	55	5,7596	330
23	2,4086	138	56	5,8643	336
23,873	2,5	143° 14′ 22″	57	5,9690	342
24	2,5133	144	57,296	6,0	343° 46′ 30″
25	2,6180	150	58	6,0737	348
26	2,7227	156	59	6,1785	354
27	2,8274	162	60	6,2832	360
28	2,9322	168	61	6,3879	366
28,648	3,0	171° 53′ 15″	62	6,4926	372
29	3,0369	174	62,070	6,5	372° 25′ 12″
30	3,1416	180	63	6,5973	378
31	3,2463	186	64	6,7021	384
32	3,3510	192	65	6,8068	390
33	3,4558	198	66	6,9115	396
33,423	3,5	200° 32′ 7″	66,845	7,0	401° 4′ 12″
34	3,5605	204	67	7,0162	402

n	$v = \widehat{w}$	w°	n	$v = \widehat{w}$	w°
68	7,1209	408	95,493	**10,0**	572° 57′ 29″
69	7,2257	414	**96**	10,053	576
70	7,3304	420	**97**	10,158	582
71	7,4351	426	**98**	10,263	588
71,620	**7,5**	429° 43′ 7″	**99**	10,367	594
72		432	**100**	10,472	600
73	7,6445	438	143,240	**15,0**	859° 26′ 14″
74	7,7493	444	**150**	15,708	900
75	7,8540	450	190,986	**20,0**	1145° 54′ 58″
76	7,9587	456	**200**	20,944	1200
76,394	**8,0**	458° 21′ 59″	238,733	**25,0**	1432° 23′ 53″
77	8,0634	462	**250**	26,180	1500
78	8,1681	468	286,479	**30,0**	1708° 52′ 26″
79	8,2729	474	**300**	31,416	1800
80	8,3776	480	334,226	**35,0**	2005° 21′ 22″
81	8,4823	486	**350**	36,652	2100
81,169	**8,5**	487° 0′ 51″	381,972	**40,0**	2301° 49′ 55″
82	8,5870	492	**400**	41,888	2400
83	8,6917	498	429,719	**45,0**	2578° 18′ 50″
84	8,7965	504	**450**	47,124	2700
85	8,9012	510	477,465	**50,0**	2864° 47′ 24″
85,944	**9,0**	515° 39′ 44″	**500**	52,360	3000
86	9,0059	516	572,958	**60,0**	3437° 44′ 53″
87	9,1106	522	**600**	62,632	3600
88	9,2153	528	668,451	**70,0**	4010° 42′ 22″
89	9,3201	534	**700**	73,304	4200
90	9,4248	540	763,944	**80,0**	4583° 39′ 50″
90,718	**9,5**	544° 18′ 36″	**800**	83,776	4800
91	9,5295	546	859,437	**90,0**	5156° 37′ 19″
92	9,6342	552	**900**	94,248	5400
93	9,7389	558	954,930	**100,0**	5729° 34′ 48″
94	9,8437	564	**1000**	104,720	6000°
95	9,9484	570			

Grösse:	Zahlenwert:
π	3,141592653589
$\frac{\pi}{2}$	1,570796
$\frac{\pi}{3}$	1,047198
$\frac{\pi}{4}$	0,785398
$\frac{\pi}{5}$	0,628319
$\frac{\pi}{6}$	0,523599
$\frac{\pi}{7}$	0,448942
$\frac{\pi}{8}$	0,392699
$\frac{\pi}{9}$	0,349066
$\frac{\pi}{12}$	0,261799
$\frac{\pi}{16}$	0,196350
$\frac{\pi}{32}$	0,098175
$\frac{\pi}{64}$	0,049087
$\frac{\pi}{90}$	0,034907
$\frac{\pi}{180}$	0,017453
π^2	9,869604
$4\pi^2$	39,478417
$\frac{1}{4}\pi^2$	2,467401
$\frac{1}{16}\pi^2$	0,616850
$\frac{1}{\pi^2}$	0,101321
$\frac{1}{\pi}$	0,318310
$\frac{16}{\pi}$	5,092958
$\frac{64}{\pi}$	20,371833
$\frac{30}{\pi}$	9,549297
$\frac{180}{\pi}$	57,295780
π^3	31,006277

Grösse:	Zahlenwert:
$\frac{1}{\pi^3}$	0,032252
π^4	97,409091
$\frac{1}{\pi^4}$	0,010266
π^5	306,019685
$\frac{1}{\pi^5}$	0,003268
π^6	961,389194
$\frac{1}{\pi^6}$	0,001040
$\sqrt{\pi}$	1,772454
$\sqrt{2\pi}$	2,506628
$2\sqrt{\pi}$	3,544908
$\pi\sqrt{2}$	4,442884
$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$	1,253314
$\sqrt{\frac{1}{\pi}}$	0,564190
$\sqrt{\frac{2}{\pi}}$	0,797885
$\sqrt{\frac{3}{\pi}}$	0,977205
$\sqrt{\frac{90}{\pi}}$	5,352372
$\sqrt[3]{\pi}$	1,462447
$\sqrt[3]{2\pi}$	1,845270
$\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}$	1,162447
$\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$	0,682784
$\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$	0,860254
$\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}$	0,984745
$\pi\sqrt[3]{\pi}$	4,601149
$\sqrt[3]{\frac{1}{\pi^2}}$	0,466202
$\sqrt[4]{\pi}$	1,331335
$\sqrt[4]{\frac{1}{\pi}}$	0,751130

Grösse:	Zahlenwert:
$\sqrt[6]{\pi}$	1,210197
$\sqrt[6]{\frac{1}{\pi}}$	0,826311
$\log \pi$	0,4971499
$\log \frac{1}{\pi}$	0,502850−1
$\log \pi^2$	0,994300
$\log \frac{1}{\pi^2}$	0,005700−1
$\log \pi^3$	1,491451
$\log \frac{1}{\pi^3}$	0,508550−2
$\log \sqrt{\pi}$	0,248575
$\log \sqrt{\frac{1}{\pi}}$	0,751425−1
$\log \sqrt[3]{\pi}$	0,165717
$\log \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$	0,834283−1
e	2,7182818
$\frac{1}{e}$	0,367879
$\log e$	0,434294
g	9,808
$\frac{1}{g}$	0,101936
$\frac{1}{2g}$	0,050968
g^2	96,2361
$\frac{1}{g^2}$	0,010391
$\sqrt{g}$	3,13209
$\frac{1}{\sqrt{g}}$	0,319275
$\sqrt{2g}$	4,42940
$\pi\sqrt{g}$	9,83974
$\frac{\pi}{\sqrt{g}}$	1,003033
$2\sqrt{g}$	6,26418
$\pi\sqrt{2g}$	13,91536
$\frac{\pi}{\sqrt{2g}}$	0,709258
$\frac{\pi^2}{g}$	1,006075

A. Feste Körper.

Achat	2,59
Alabaster	2,876
Alaunschiefer	2,3—2,4
Aluminium gehämmert	2,67
„ geschmolzen	2,56
Anthracit	1,34—1,46
Antimon	6,65—6,72
Asbest	2,1—2,8
Asphalt	1,07—1,16
Basalt	2,8—3,2
Baustein im Mittel	2,5
Bimstein	0,91—1,65
Blei (bei 14° C.)	11,376
Braunkohle	0,8—1,5
Braunstein	4,72—4,92
Bronze	8,3—8,6
Butter	0,94
Cement	2,72—3,05
Koks in Stücken	0,51
Gaskoks	0,33
Diamant	3,5
Eis (bei 0° C.)	0,92
Eisen (rein)	7,79
Gusseisen weiss	7,50
„ grau	7,10
„ halbiert	7,06
„ Stabeisen	7,6—7,8
„ im Draht	7,6—7,75
Elfenbein	1,8—1,92
Erde (lehmige Erde, fest gestampft)	
frisch	2,06
trocken	1,93
Gartenerde frisch	2,05
„ trocken	1,63
Erde, mager und trocken	1,34
Feldsteine	2,5
Glas Fenster-	2,64
„ Spiegel-	2,46
„ Krystall-	2,89
„ Flint-	3,33
Glockenmetall	8,81
Gold gegossen	19,26
„ gediegen	18,6—19,1
Granit	2,51—3,05
Gummi vulkanisiert	1,00
Guttapercha	0,98
Gips gebrannt	1,82
„ gegossen, trocken	0,97
Holz in Stücken	
trocken Buchen	0,45
„ „ Eichen	0,52
„ „ Fichten	0,32
„ „ Tannen	0,30
Holzkohle von Nadelholz	0,28—0,44
„ „ Eichenholz	0,57
„ in Haufen von Nadelholz	0,18
Eichenholz	0,23
Kalk gebrannt	2,3—3,18
Kalkmörtel trocken	1,64
„ frisch	1,78
Kalkstein	2,46—2,84
Kanonengut	8,44
Kautschuk	0,93
Kies	1,8
Knochen	1,66
Kochsalz	2,1—2,2
Kreide, weisse	1,8—2,66
Kupfer gegossen	8,59—8,90
Draht oder gehämmert	8,78—9,0
Lehm trocken	1,52
„ frisch	1,67—2,85
Marmor	2,52—2,85
Mauerwerk, Bruchstein	2,4—2,46
„ Sandstein	2,05—2,2
„ Ziegelstein	1,47—1,70
„ poröse od. Lochziegel	0,95
Mehl	0,7—0,8
Messing gegossen	8,4—8,71
„ gewalzt	8,52—8,62
„ gezogen	8,43—8,73
Papier	0,7—1,16
Pech	1,071
Platin	21,45
Porzellan	2,38—2,49
Quarz	2,5—2,8
Roggen (geschüttet)	0,65—0,78
Sand fein, trocken	1,4—1,64
„ fein, feucht	1,9—2,05
„ grob	1,37—1,49
Sandstein	1,9—2,7
Schiefer	2,64—2,67
Schnee	0,125
Silber gegossen	10,1—10,47
„ gehämmert	10,51—10,62
Stahl Cement-	7,26—7,8
„ gefrischt	7,5—7,81
„ Guss-	7,83—7,92
Stärkemehl	1,53
„ Cannel	1,42
Stückkohle	1,21—1,51
Steinsalz	2,22—2,3
Thon	1,8—2,63
Torf, trocken	0,51
Wachs	0,97
[Wasser (bei 4°)	1,00]
Wismuth	9,78
Ziegelstein	1,4—2,2
„ -Klinker	1,52—2,29

Tabelle über Bogen- und Winkelgeschwindigkeit (v und w° bezw. $\widehat{w}$ pro Sek.) und Umdrehungen n pro Minute für den Radius $= 1$.

Für den Radius $\rho = 1$ wird Winkelgeschwindigkeit = Umfangsgeschwindigkeit

$$\widehat{w} = v = \frac{\pi n}{30} = 0{,}10472\,n,\quad n = \frac{30}{\pi}\,v = \frac{30}{\pi}\,\widehat{w} = 9{,}5493\,v,\ \text{aus}\ \widehat{w} : w^\circ = 2\pi : 360$$

$$\text{folgt}\ w^\circ = \frac{180}{\pi}\,\widehat{w} = \frac{180}{\pi}\,v = 6\,n,\quad \widehat{w} = \frac{\pi}{180}\,w^\circ = 0{,}017453\,w^\circ.$$

n	$v = \widehat{w}$	w°	n	$v = \widehat{w}$	w°
1	0,1047	6	35	3,6652	210
2	0,2094	12	36	3,7699	216
3	0,3142	18	37	3,8746	222
4	0,4189	24	38	3,9794	228
5	0,5236	30	38,197	4,0	229° 9′ 55″
6	0,6283	36	39	4,0841	234
7	0,7330	42	40	4,1888	240
8	0,8378	48	41	4,2935	246
9	0,9425	54	42	4,3982	252
9,549	1,0	57° 17′ 45″	42,972	4,5	257° 49′ 52″
10	1,0472	60	43	4,5029	258
11	1,1519	66	44	4,6077	264
12	1,2566	72	45	4,7124	270
13	1,3614	78	46	4,8171	276
14	1,4661	84	47	4,9218	282
14,324	1,5	85° 56′ 37″	47,747	5,0	286° 28′ 45″
15	1,5708	90	48	5,0265	288
16	1,6755	96	49	5,1313	294
17	1,7802	102	50	5,2360	300
18	1,8850	108	51	5,3407	306
19	1,9897	114	52	5,4454	312
19,099	2,0	114° 35′ 30″	52,521	5,5	315° 7′ 37″
20	2,0944	120	53	5,5501	318
21	2,1991	126	54	5,6549	324
22	2,3038	132	55	5,7596	330
23	2,4086	138	56	5,8643	336
23,873	2,5	143° 14′ 22″	57	5,9690	342
24	2,5133	144	57,296	6,0	343° 46′ 30″
25	2,6180	150	58	6,0737	348
26	2,7227	156	59	6,1785	354
27	2,8274	162	60	6,2832	360
28	2,9322	168	61	6,3879	366
28,648	3,0	171° 53′ 15″	62	6,4926	372
29	3,0369	174	62,070	6,5	372° 25′ 12″
30	3,1416	180	63	6,5973	378
31	3,2463	186	64	6,7021	384
32	3,3510	192	65	6,8068	390
33	3,4558	198	66	6,9115	396
33,423	3,5	200° 32′ 7″	66,845	7,0	401° 4′ 12″
34	3,5605	204	67	7,0162	402

n	$v = \overset{\frown}{w}$	w°	n	$v = \overset{\frown}{w}$	w°
68	7,1209	408	95,493	**10,0**	572° 57′ 29″
69	7,2257	414	**96**	10,053	576
70	7,3304	420	**97**	10,158	582
71	7,4351	426	**98**	10,263	588
71,620	**7,5**	429° 43′ 7″	**99**	10,367	594
72		432	**100**	10,472	600
73	7,6445	438	143,240	**15,0**	859° 26′ 14″
74	7,7493	444	**150**	15,708	900
75	7,8540	450	190,986	**20,0**	1145° 54′ 58″
76	7,9587	456	**200**	20,944	1200
76,394	**8,0**	458° 21′ 59″	238,733	**25,0**	1432° 23′ 53″
77	8,0634	462	**250**	26,180	1500
78	8,1681	468	286,479	**30,0**	1708° 52′ 26″
79	8,2729	474	**300**	31,416	1800
80	8,3776	480	334,226	**35,0**	2005° 21′ 22″
81	8,4823	486	**350**	36,652	2100
81,169	**8,5**	487° 0′ 51″	381,972	**40,0**	2301° 49′ 55″
82	8,5870	492	**400**	41,888	2400
83	8,6917	498	429,719	**45,0**	2578° 18′ 50″
84	8,7965	504	**450**	47,124	2700
85	8,9012	510	477,465	**50,0**	2864° 47′ 24″
85,944	**9,0**	515° 39′ 44″	**500**	52,360	3000
86	9,0059	516	572,958	**60,0**	3437° 44′ 58″
87	9,1106	522	**600**	62,832	3600
88	9,2153	528	668,451	**70,0**	4010° 42′ 22″
89	9,3201	534	**700**	73,304	4200
90	9,4248	540	763,944	**80,0**	4583° 39′ 50″
90,718	**9,5**	544° 18′ 36″	**800**	83,776	4800
91	9,5295	546	859,437	**90,0**	5156° 37′ 19″
92	9,6342	552	**900**	94,248	5400
93	9,7389	558	954,930	**100,0**	5729° 34′ 48″
94	9,8437	564	**1000**	104,720	6000°
95	9,9484	570			

Grösse:	Zahlenwert:
π	3,141592653589
$\frac{\pi}{2}$	1,570796
$\frac{\pi}{3}$	1,047198
$\frac{\pi}{4}$	0,785398
$\frac{\pi}{5}$	0,628319
$\frac{\pi}{6}$	0,523599
$\frac{\pi}{7}$	0,448942
$\frac{\pi}{8}$	0,392699
$\frac{\pi}{9}$	0,349066
$\frac{\pi}{12}$	0,261799
$\frac{\pi}{16}$	0,196350
$\frac{\pi}{32}$	0,098175
$\frac{\pi}{64}$	0,049087
$\frac{\pi}{90}$	0,034907
$\frac{\pi}{180}$	0,017453
π^2	9,869604
$4\pi^2$	39,478417
$\frac{1}{4}\pi^2$	2,467401
$\frac{1}{16}\pi^2$	0,616850
$\frac{1}{\pi^2}$	0,101321
$\frac{1}{\pi}$	0,318310
$\frac{16}{\pi}$	5,092958
$\frac{64}{\pi}$	20,371833
$\frac{30}{\pi}$	9,549297
$\frac{180}{\pi}$	57,295780
π^3	31,006277

Grösse:	Zahlenwert:
$\frac{1}{\pi^3}$	0,032252
π^4	97,409091
$\frac{1}{\pi^4}$	0,010266
π^5	306,019685
$\frac{1}{\pi^5}$	0,003268
π^6	961,389194
$\frac{1}{\pi^6}$	0,001040
$\sqrt{\pi}$	1,772454
$\sqrt{2\pi}$	2,506628
$2\sqrt{\pi}$	3,544908
$\pi\sqrt{2}$	4,442884
$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$	1,253314
$\sqrt{\frac{1}{\pi}}$	0,564190
$\sqrt{\frac{2}{\pi}}$	0,797885
$\sqrt{\frac{3}{\pi}}$	0,977205
$\sqrt{\frac{90}{\pi}}$	5,352372
$\sqrt[3]{\pi}$	1,462447
$\sqrt[3]{2\pi}$	1,845270
$\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}$	1,162447
$\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$	0,682784
$\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$	0,860254
$\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}$	0,984745
$\pi\sqrt[3]{\pi}$	4,601149
$\sqrt[3]{\frac{1}{\pi^2}}$	0,466202
$\sqrt[4]{\pi}$	1,331335
$\sqrt[4]{\frac{1}{\pi}}$	0,751130

Grösse:	Zahlenwert:
$\sqrt[6]{\pi}$	1,210197
$\sqrt[6]{\frac{1}{\pi}}$	0,826311
$\log \pi$	0,4971499
$\log \frac{1}{\pi}$	0,502850—1
$\log \pi^2$	0,994300
$\log \frac{1}{\pi^2}$	0,005700—1
$\log \pi^3$	1,491451
$\log \frac{1}{\pi^3}$	0,508550—2
$\log \sqrt{\pi}$	0,248575
$\log \sqrt{\frac{1}{\pi}}$	0,751425—1
$\log \sqrt[3]{\pi}$	0,165717
$\log \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$	0,834283—1
e	2,7182818
$\frac{1}{e}$	0,367879
$\log e$	0,434294
g	9,808
$\frac{1}{g}$	0,101936
$\frac{1}{2g}$	0,050968
g^2	96,2361
$\frac{1}{g^2}$	0,010391
$\sqrt{g}$	3,13209
$\frac{1}{\sqrt{g}}$	0.319275
$\sqrt{2g}$	4,42940
$\pi\sqrt{g}$	9,83974
$\frac{\pi}{\sqrt{g}}$	1,003033
$2\sqrt{g}$	6,26418
$\pi\sqrt{2g}$	13,91536
$\frac{\pi}{\sqrt{2g}}$	0,709258
$\frac{\pi^2}{g}$	1,006075

A. Feste Körper.			
Achat	2,59	Holzkohle von Nadelholz	0,28—0,44
Alabaster	2,876	„ „ Eichenholz	0,57
Alaunschiefer	2,3—2,4	„ in Haufen von Nadelholz	0,18
Aluminium gehämmert	2,67	Eichenholz	0,23
„ geschmolzen	2,56	Kalk gebrannt	2,3—3,18
Anthracit	1,34—1,46	Kalkmörtel trocken	1,64
Antimon	6,65—6,72	„ frisch	1,78
Asbest	2,1—2,8	Kalkstein	2,46—2,84
Asphalt	1,07—1,16	Kanonengut	8,44
Basalt	2,8—3,2	Kautschuk	0,93
Baustein im Mittel	2,5	Kies	1,8
Bimstein	0,91—1,65	Knochen	1,66
Blei (bei 14° C.)	11,376	Kochsalz	2,1—2,2
Braunkohle	0,8—1,5	Kreide, weisse	1,8—2,66
Braunstein	4,72—4,92	Kupfer gegossen	8,59—8,90
Bronze	8,3—8,6	Draht oder gehämmert	8,78—9,0
Butter	0,94	Lehm trocken	1,52
Cement	2,72—3,05	„ frisch	1,67—2,85
Koks in Stücken	0,51	Marmor	2,52—2,85
Gaskoks	0,33	Mauerwerk, Bruchstein	2,4—2,46
Diamant	3,5	„ Sandstein	2,05—2,2
Eis (bei 0° C.)	0,92	„ Ziegelstein	1,47—1,70
Eisen (rein)	7,79	„ poröse od. Lochziegel	0,95
Gusseisen weiss	7,50	Mehl	0,7—0,8
„ grau	7,10	Messing gegossen	8,4—8,71
„ halbiert	7,06	„ gewalzt	8,52—8,62
„ Stabeisen	7,6—7,8	„ gezogen	8,43—8,73
„ im Draht	7,6—7,75	Papier	0,7—1,16
Elfenbein	1,8—1,92	Pech	1,071
Erde (lehmige Erde, fest gestampft)		Platin	21,45
frisch	2,06	Porzellan	2,38—2,49
trocken	1,93	Quarz	2,5—2,8
Gartenerde frisch	2,05	Roggen (geschüttet)	0,65—0,78
„ trocken	1,63	Sand fein, trocken	1,4—1,64
Erde, mager und trocken	1,34	„ fein, feucht	1,9—2,05
Feldsteine	2,5	„ grob	1,37—1,49
Glas Fenster-	2,64	Sandstein	1,9—2,7
„ Spiegel-	2,46	Schiefer	2,64—2,67
„ Krystall-	2,89	Schnee	0,125
„ Flint-	3,33	Silber gegossen	10,1—10,47
Glockenmetall	8,81	„ gehämmert	10,51—10,62
Gold gegossen	19,26	Stahl Cement-	7,26—7,8
„ gediegen	18,6—19,1	„ gefrischt	7,5—7,81
Granit	2,51—3,05	„ Guss-	7,83—7,92
Gummi vulkanisiert	1,00	Stärkemehl	1,53
Guttapercha	0,98	„ Cannel	1,42
Gips gebrannt	1,82	Stückkohle	1,21—1,51
„ gegossen, trocken	0,97	Steinsalz	2,22—2,3
Holz in Stücken		Thon	1,8—2,63
trocken Buchen	0,45	Torf, trocken	0,51
„ „ Eichen	0,52	Wachs	0,97
„ „ Fichten	0,32	[Wasser (bei 4°)	1,00]
„ „ Tannen	0,30	Wismuth	9,78
		Ziegelstein	1,4—2,2
		„ -Klinker	1,52—2,29

Zink gegossen	6,8—7,05
„ gewalzt	7,125
Zinn	7,29
Zucker	1,61
B. Flüssigkeiten.	
Äther	0,737
Alkohol	0,793
Kaumöl	0,917
Benzin	0,850
Bergamottenöl	0,85
Bier	1,023—1,034
Eisweiss	1,041
Glycerin	1,270
Kreosot	1,037
Leinöl	0,935
Leberthran	0,945
Milch	1,025
Mohnöl	0,924
Olivenöl	0,918
Quecksilber	13,596
Rüböl	9,914
Salpetersäure	1,58
Salzsäure	1,19
Schwefelsäure	1,842
Seewasser	1,03
Theer	1,195
Terpentinöl	0,878
Wasser	1,000
Wein	0,992—1,002
C. Gasförmige Körper.	
Ammoniak	0,596
Chlor	2,470
Kohlenoxyd	0,967
Kohlensäure	1,529
Kohlenwasserstoff . . .	0,978
Grubengas	0,559
Sauerstoff	1,106
Stickstoff	0,972
Steinkohlengas	0,48—0,51
Wasserdampf bei 100° .	0,47
Wasserstoff	0,0692
Luft bei 0°	1,000
Luft (wenn Wasser = 1)	0,0018



